ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

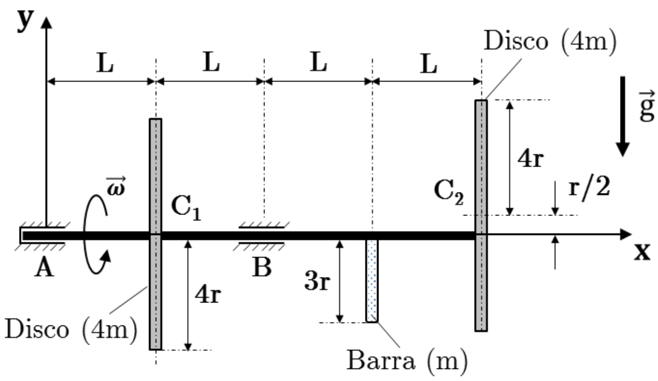
MECÂNICA II - PME 3200 – Primeira Prova – 20 de abril de 2017

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

RESOLUÇÃO

(Versão de 12/05/2017)

1ª Questão (3,5 pontos). O rotor mostrado na figura ao lado gira em torno do eixo *AB* com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$, constante. Este eixo está apoiado nos mancais *A* e *B* e possui comprimento *4L* e massa desprezível. O sistema é composto por dois discos de pequena espessura idênticos de massa *4m* e raio *4r*, e uma barra delgada de comprimento *3r* e massa *m*. O disco de centro C_2 está montado de forma excêntrica tal que C_2 localiza-se a uma distância *r/2* do eixo. Considerando o sistema de coordenadas *Axyz* solidário ao rotor e a configuração indicada na figura, determine:



(a) A posição do centro de massa do sistema **(1,0 ponto)**

$$Mx_G = \sum m_i x_{G_i} \Rightarrow (9m)x_G = 4mL + m3L + 4m4L \Rightarrow x_G = \frac{23L}{9}$$

$$My_G = \sum m_i y_{G_i} \Rightarrow (9m)y_G = 4m0 - m\frac{3r}{2} + 4m\frac{r}{2} \Rightarrow y_G = \frac{r}{18}$$

$$Mz_G = \sum m_i z_{G_i} \Rightarrow z_G = 0 \text{ (simetria)}$$

(b) Os produtos de inércia do sistema em relação ao sistema de coordenadas *Axyz* **(0,5 ponto)**

$$J_{xy} = J_{D1_{xy}} + J_{B_{xy}} + J_{D2_{xy}} = -\frac{9mrL}{2} + 8mrL = \frac{7mrL}{2}$$

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \text{ (simetria)}$$

(c) A localização e os valores das duas massas que devem ser adicionadas na periferia dos discos de forma a balancear o sistema **(2,0 pontos)**

Balanceamento Estático:

$$y_G{}' = 0 \Rightarrow (9m)y_G + m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \Rightarrow \frac{mr}{2} + m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \quad \text{(c1)}$$

$$z_G{}' = 0 \Rightarrow (9m)z_G + m_1z_1 + m_2z_2 = 0 \Rightarrow m_1z_1 + m_2z_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(c2)}$$

Balanceamento Dinâmico

$$J_{xy}{}' = 0 \Rightarrow J_{xy} + m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 = 0 \Rightarrow \frac{7mrL}{2} + m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 = 0 \quad \text{(c3)}$$

$$J_{xz}{}' = 0 \Rightarrow J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0 \quad \text{OK, pois } J_{xz} = 0,\ z_1 = 0,\ z_2 = 0 \quad \text{(c4)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Vale observar que as massas de balanceamento foram posicionadas no plano *xy* de forma a manter os valores de z_G', J_{xy}', J_{xz}' nulos (ver Eqs. c2 e c4). Adicionalmente, considerando que as massas devem ser adicionadas na periferia dos discos, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = L \\ x_2 = 4L \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 = 4r \quad \text{ou} \quad y_1 = -4r \\ y_2 = \frac{9r}{2} \quad \text{ou} \quad y_2 = -\frac{7r}{2} \end{cases} \qquad \text{(c5)}$$

Logo, as Eqs. (c1) e (c3) são reescritas, como segue:

$$\begin{cases} m_1 y_1 + m_2 y_2 = -\frac{mr}{2} \\ m_1 y_1 + 4 m_2 y_2 = -\frac{7mr}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m_2 y_2 = -mr \\ m_1 y_1 = \frac{mr}{2} \end{matrix} \qquad \text{(c6)}$$

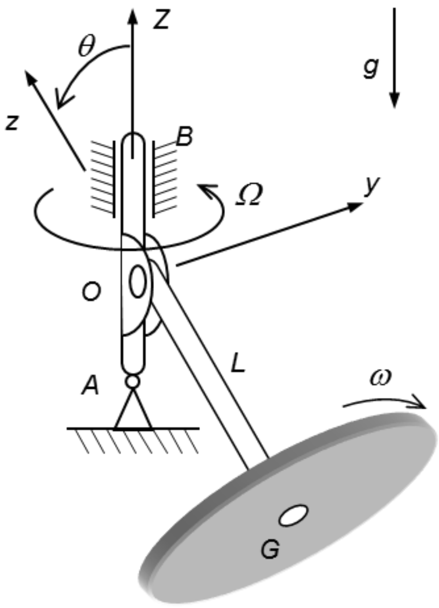
Como as massas de balanceamento devem ser adicionadas ao conjunto, então $m_1 > 0$ e $m_2 > 0$. Portanto:

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{7r}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{2m}{7} \\ y_1 = 4r \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{m}{8} \end{cases} \qquad \text{(c7)}$$

Resumindo, para o balanceamento do conjunto, tem-se:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{m}{8} \\ x_1 = L \\ y_1 = 4r \\ z_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 = \frac{2m}{7} \\ x_2 = 4L \\ y_2 = -\frac{7r}{2} \\ z_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(c8)}$$

2ª Questão (3,5 pontos) O disco de massa *m* e raio *R* gira em torno do eixo *Gz* com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante. O sistema composto pelo disco e a barra *OG* de comprimento *L* e massa desprezível, é articulado em *O* podendo girar sem atrito em torno do eixo *Oy*, formando o ângulo θ com o eixo *OZ*. Nestas condições, o sistema, incluindo a barra *AB* de massa desprezível, gira em torno do eixo *OZ* com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{K}$, constante. Sabendo-se que o ângulo θ também permanece constante, e utilizando o sistema de coordenadas *Oxyz*, pede-se:



(a) <u>O vetor rotação absoluta do disco</u>

Utilizando o sistema de coordenadas *Oxyz*, definido pelo plano *OZz* tem-se:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{k} + \Omega\vec{K}, \text{ onde } \vec{K} = \cos\theta\,\vec{k} + \text{sen}\,\theta\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \Omega\,\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + (\omega + \Omega\cos\theta)\vec{k}} \qquad \textbf{(1,0 ponto)}$$

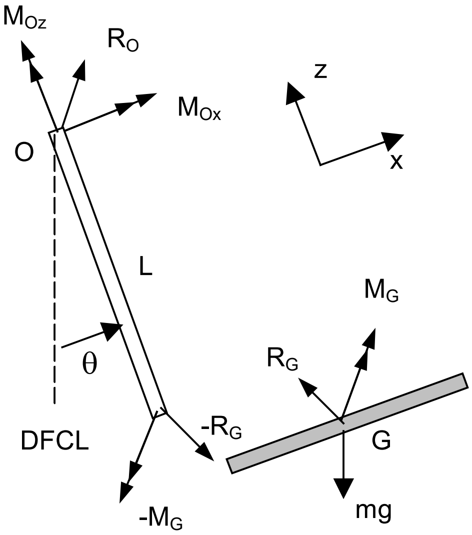
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

(b) <u>O diagrama de corpo-livre do sistema composto pelo disco e a barra *OG*, indicando as forças e binários</u>

Note que $M_{Oy} = 0$ **(0,5 ponto)**



(c) <u>A matriz de inércia do sistema calculada nas coordenadas *Oxyz*</u>

A matriz de inércia do sistema composto pelo disco e a barra *OG* em relação ao sistema de coordenadas *Oxyz*. Considerando que a barra *OG* tem massa desprezível, considerando o pólo *O* e utilizando o teorema de eixos paralelos, obtêm-se:

$$[I]_O = [I]_G + [T]_{G\to O} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_G + m\begin{bmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I]_O = \frac{m}{4}\begin{bmatrix} R^2+4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2+4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}_O$$

(0,5 ponto)

(d) <u>A equação do movimento do sistema composto pelo disco e a barra *OG*</u>

Aplicando o *TQMA* no disco para o pólo *O* fixo e extensão ideal do disco, obtém-se a equação geral do movimento angular:

$$\vec{\omega}\wedge\left[\vec{H}_O\right] + [I]_O \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Omega \operatorname{sen}\theta \\ 0 \\ \omega + \Omega\cos\theta \end{bmatrix} = \vec{M}_G + (G-O)\wedge\vec{R}_G + (G-O)\wedge m\vec{g} \quad \text{(I)}$$

Aplicando o *TQMA* na barra para o pólo *O* fixo e considerando que a barra *OG* tem massa desprezível e, portanto, matriz de inércia nula:

$$\frac{d}{dt}\left[[I_{barra}]_O\{\vec{\omega}_{arr}\}\right] = \vec{M}_O - \vec{M}_G + (G-O)\wedge(-\vec{R}_G) = 0 \;\rightarrow\; \vec{M}_O = \vec{M}_G + (G-O)\wedge\vec{R}_G = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oz}\vec{k} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) para velocidades angulares constantes, portanto acelerações angulares nulas, compatíveis com o movimento de precessão estacionária, quando θ é constante, obtêm-se:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_O\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{4}\begin{bmatrix} R^2+4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2+4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega \operatorname{sen}\theta \\ 0 \\ \omega+\Omega\cos\theta \end{bmatrix}\right]=M_{Ox}\vec{i}+mg\,L\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}+M_{Oz}\vec{k}$$

As derivadas dos versores são:

$$\dot{\vec{i}}=\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{i}=(\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\Omega\cos\theta\,\vec{k})\wedge\vec{i}=\Omega\cos\theta\,\vec{j}\,;$$
$$\dot{\vec{j}}=(\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\Omega\cos\theta\,\vec{k})\wedge\vec{j}=\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}-\Omega\cos\theta\,\vec{i}\,;$$
$$\dot{\vec{k}}=(\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\Omega\cos\theta\,\vec{k})\wedge\vec{k}=-\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

Resultando, em cada direção:

$$0=M_{Ox}$$
$$[\Omega\cos\theta\left(R^2+4L^2\right)-2R^2\left(\omega+\Omega\cos\theta\right)]\Omega\operatorname{sen}\theta\, m/4=mg\,L\operatorname{sen}\theta$$
$$0=M_{Oz}$$

Portanto: $M_{Ox}=0$; $M_{Oz}=0$ e

$$\boxed{[\Omega\cos\theta\left(4L^2-R^2\right)-2R^2\,\omega]\Omega\operatorname{sen}\theta=4g\,L\operatorname{sen}\theta} \qquad (1,0)$$

O disco executa um movimento de precessão estacionária, i.e., com $\boxed{[\theta=const;\ \dot{\phi}=\Omega=const;\ \dot{\psi}=\omega=const]}$. A barra OG acompanha o disco em seu movimento de rotação em torno do eixo *OZ*.

(e) <u>Determine o ângulo θ em função de ω e Ω e demais parâmetros do problema.</u>

A equação apresenta três soluções:

$\operatorname{sen}\theta=0 \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix}\theta=0\\ \theta=\pi\end{Bmatrix}$, correspondente a movimentos puros de rotação em torno do eixo Z e

$\boxed{\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{2R^2\Omega\omega+4g\,L}{\Omega^2\left(4L^2-R^2\right)}\right)}$, válida para valores de Ω, ω, L e R tais que: $-1\le\dfrac{2R^2\Omega\omega+4g\,L}{\Omega^2\left(4L^2-R^2\right)}\le 1$

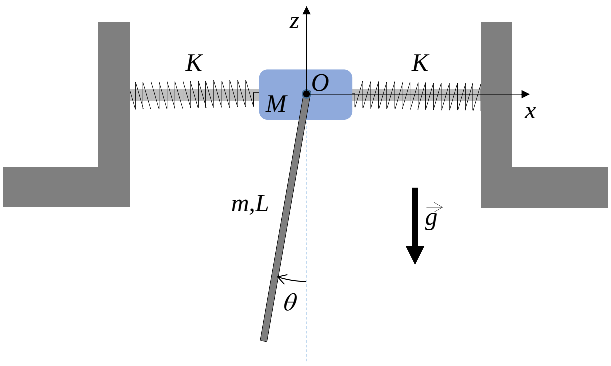
(0,5 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

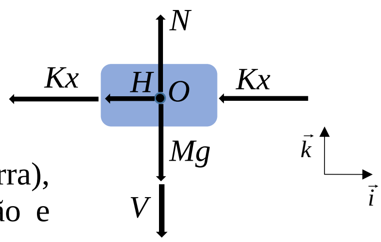
Departamento de Engenharia Mecânica

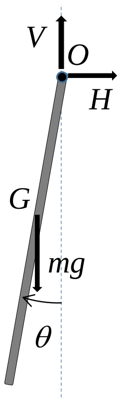
3ª Questão (3 pontos)



O dispositivo da figura é composto por um bloco de massa *M* e uma barra de massa *m* e comprimento *L*. O bloco pode deslizar *sem atrito* ao longo de uma guia horizontal de seção quadrada. O bloco é vazado por um furo de mesma seção quadrada, de forma a envolver a guia perfeitamente, como uma luva. A barra, de distribuição homogênea de massa, está articulada ao bloco em *O*, podendo girar livremente e sem atrito em torno do eixo *Oy*, que é perpendicular ao plano da figura. O bloco está ligado às peças verticais através de duas molas lineares idênticas, de constante *K*. O conjunto está sujeito à ação do campo gravitacional. A base canônica $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orienta o sistema cartesiano *Oxyz*. Pede-se:

(a) Construir os diagramas de corpo-livre do bloco e da barra
(0,5 ponto)





(b) Deduzir as equações de movimento do sistema (bloco e barra), nas variáveis x e θ, considerando, para tanto, configuração e condição cinemática genéricas;

- TMB (Teorema do Movimento do Baricentro) aplicado ao bloco:

$$M\vec{a}_o = M\ddot{x}\vec{i} = -(2Kx + H)\vec{i} + (N - Mg - V)\vec{k}$$

que leva a

$$M\ddot{x} + 2Kx = -H$$
$$V = N - Mg \qquad (1) \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$

- TMB (Teorema do Movimento do Baricentro) aplicado a barra:

$$M\vec{a}_G = H\vec{i} + (V - mg)\vec{k}$$

Como,

$$\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} + \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r\right) = \left(\ddot{x} - \frac{L}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)\right)\vec{i} + \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{k}$$

Então,

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)\right) = H \\ m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = V - mg \end{cases} \qquad (2) \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$

De (1a) e (2a) vem:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$(m+M)\ddot{x}-\frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta+\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta+2Kx=0 \qquad (3)$$

De (1b) e (2b) vem:

$$N=(m+M)g+m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad (4)$$

- <u>TQMA (Teorema da Quantidade de Movimento Angular) aplicado à barra, com polo de momentos de força em *O*:</u>

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt}=\vec{M}_O+(O-G)\wedge m\vec{a}_O$$

Como o movimento é plano,

$$\vec{K}_O=J_O\omega\vec{j} \text{ e } \dot{\vec{K}}_O=J_O\ddot{\theta}\vec{j}$$

E, como,

$$J_O=m\frac{L^2}{3} \text{ e } \vec{M}_O=-mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\vec{j}$$

segue que:

$$m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta}-\frac{mL}{2}\ddot{x}\cos\theta+\frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta=0 \qquad (5)$$ **(0,5 ponto)**

As equações (3) e (5), abaixo agrupadas, são as equações de movimento do sistema:

$$\begin{cases}(m+M)\ddot{x}-\left(\frac{mL}{2}\cos\theta\right)\ddot{\theta}+\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta+2Kx=0\\ -\left(\frac{mL}{2}\cos\theta\right)\ddot{x}+m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta}+\frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta=0\end{cases} \qquad (6)$$ **(0,5 ponto)**

(c) Determinar as forças reativas agindo sobre o bloco nas condições do equacionamento, expressando-as na base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

As forças reativas, *N*, *V* e *H*, agindo sobre o bloco advém das equações (4), (1b) e (1a), abaixo repetidas:

$$\begin{cases}N=(m+M)g+m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\\ V=N-Mg=mg+m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\\ H=-(M\ddot{x}+2Kx)=m\ddot{x}-\frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta+\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\end{cases} \qquad (7)$$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

4ª Questão (1 ponto). No instante $t = t_0$ uma esfera de densidade homogênea, massa *m* e raio *r*, não sujeita a quaisquer forças ou binários de força, é animada de movimento de rotação pura em torno de um eixo central (passante pelo centro de massa), caracterizado pelo vetor de rotação $\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0$.

(a) Descreva o movimento subsequente deste sólido. Justifique. **(0,5 ponto)**

O corpo de forma esférica permanecerá girando indefinidamente com vetor rotação permanente $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0$, em torno do eixo inicial de rotação, eixo esse passante pelo centro *G* da esfera e com direção $\vec{u} = \vec{\omega}_0/|\vec{\omega}_0|$. O movimento posterior do corpo será, portanto, um movimento permanente de rotação. Isso ocorre devido a simetria ideal esférica de distribuição de massa e a conservação da quantidade de movimento angular, quando da ausência de forças externas.

Matematicamente, a característica do movimento subsequente descrita acima pode ser verificada através da aplicação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento ao problema proposto. Notando que o elipsoide de inércia associado ao centro de massa de um corpo homogêneo de forma esférica é uma esfera, e que, de acordo com o enunciado, não existem momentos externos atuantes no corpo, resulta que:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = [J_G]\cdot[\dot{\vec{\omega}}] = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z\end{bmatrix} = \vec{M}_G = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\omega_x(t)\\ \omega_y(t)\\ \omega_z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_{x_0}\\ \omega_{y_0}\\ \omega_{z_0}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0$$

(b) Como seria o movimento desse sólido caso ele tivesse a forma de um cubo (mesma massa *m* e lado *L*)? Justifique. **(0,5 ponto)**

Se o sólido fosse um cubo seu movimento posterior também seria o de rotação permanente em torno do eixo inicial de rotação $\vec{u} = \vec{\omega}_0/|\vec{\omega}_0|$. Isso se deve ao fato de que todo eixo passante pelo centro de massa *G* de um cubo homogêneo é (assim como no caso da esfera) um eixo principal de inércia. Em outras palavras, o elipsoide de inércia associado ao centro de massa de um cubo é uma esfera e os mesmos argumentos utilizados no item (a) se aplicam a esse caso.

A conclusão acima pode ser verificada matematicamente admitindo-se que, para um cubo de lado *L* e *Gx*, *Gy*, *Gz* eixos perpendiculares às suas faces, tem-se:

$$J_{Gx} = J_{Gy} = J_{Gz} = \frac{ma^2}{6}$$

Considerando-se um eixo de direção arbitrária $\vec{e} = cos\alpha\vec{i} + cos\beta\vec{j} + cos\gamma\vec{k}$, o momento de inércia do cubo em relação a $G\vec{e}$, é:

$$J_{G\vec{e}} = [cos\alpha \quad cos\beta \quad cos\gamma]\cdot\begin{bmatrix}\frac{ma^2}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}cos\alpha\\ cos\beta\\ cos\gamma\end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6}(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma) = \frac{ma^2}{6}$$