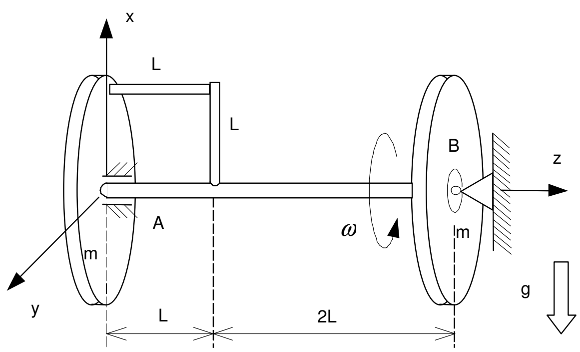
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Primeira Prova – 31 de março de 2016

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras)



1ª Questão (3,0 pontos). Dois discos *A* e *B*, de massas *m*, raios *R* e espessuras desprezíveis, estão fixados ao eixo de massa desprezível vinculado a um anel em *A* e a uma articulação em *B*. Duas barras de massas *m* e comprimento *L* estão ligadas ao conjunto que gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante, como indicado na figura. Considerando o sistema *Axyz* solidário ao conjunto, determinar a localização e os valores de duas massas m_1 e m_2, fixadas na parte externa dos discos *A* e *B*, suficientes para balancear o sistema.

Resolução

Posição inicial do centro de massa:

$$x_G = \frac{mL + m\dfrac{L}{2}}{2m+2m} = \frac{3}{8}L \qquad y_G = 0 \qquad z_G = \frac{m3L + mL + m\dfrac{L}{2}}{2m+2m} = \frac{9}{8}L \qquad \textbf{(1,0)}$$

Produtos de inércia iniciais:

$$J_{Ayz} = 0$$
$$J_{Axz} = m \cdot L \cdot \frac{L}{2} + m \cdot \frac{L}{2} \cdot L = mL^2 \qquad \textbf{(1,0)}$$

Critério de balanceamento:

$$x'_G = 0$$
$$y'_G = 0$$
$$J'_{Axz} = 0 \qquad \textbf{(0,5)}$$
$$J'_{Ayz} = 0$$

O balanceamento pode ser realizado, adicionando-se ou removendo-se massas em posições dos discos próximas a sua periferia. Uma das 4 possíveis soluções consiste em se acrescentar massas m_1 e m_2, respectivamente, nas posições $(-R,0,0)$ *e* $(-R,0,3L)$. Em tal caso, obtêm-se as seguintes equações de balanceamento:

$$x'_G = \frac{4m\dfrac{3L}{8} + m_1(-R) + m_2(-R)}{2(m+m) + m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow \frac{3L}{2}m - m_1 R - m_2 R = 0$$
$$J'_{Axz} = mL^2 + m_1 \cdot (-R) \cdot 0 + m_2 \cdot (-R) \cdot 3L = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior, obtêm-se:

$$\boxed{m_1 = \frac{7mL}{6R} \quad em \quad (-R,0,0)} \quad \text{e} \quad \boxed{m_2 = \frac{mL}{3R} \quad em \quad (-R,0,3L)}$$ **(1,0)**

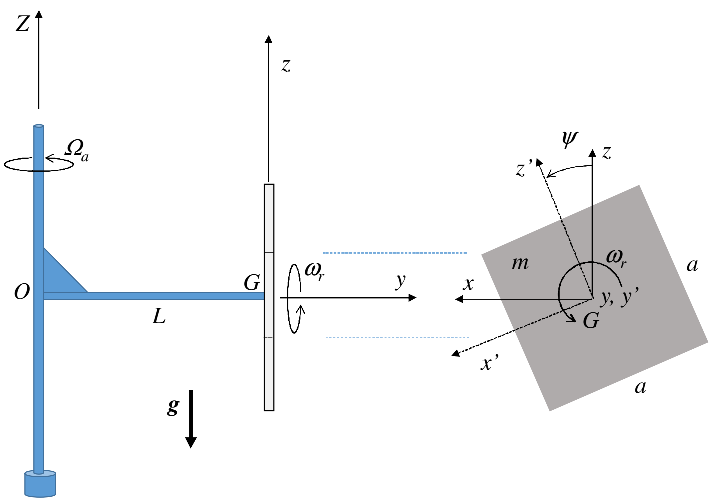
Obs: como, de acordo com a figura L=R, substituições dessas variáveis nas fórmulas anteriores dão origem a soluções igualmente corretas.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos) Uma placa quadrada de espessura desprezível, lado *a* e massa *m*, está presa à estrutura de suporte através de um mancal de eixo paralelo a *Oy*. A placa tem distribuição homogênea de massa e gira em torno de *Oy* com velocidade angular ω_r, constante. A estrutura de suporte, suposta rígida e de massa desprezível, gira com velocidade angular Ω_a, também constante, em torno do eixo vertical *OZ*. *G* é o centro de massa da placa e *Gz* é um eixo sempre vertical. A barra *OG* tem comprimento *L*. São dados os momentos de inércia da placa referentes aos eixos *Gx'y'z'*, mostrados na figura:



$J_{Gx'} = \dfrac{ma^2}{12}$, $J_{Gy'} = \dfrac{ma^2}{6}$, $J_{Gz'} = \dfrac{ma^2}{12}$. Nessas condições, pede-se:

(a) mostrar que o momento de inércia em torno de qualquer eixo contido no plano da placa quadrada, e que seja passante pelo centro *G*, é igual a $ma^2/12$; ou seja, que é invariante com respeito à rotação ψ; ou ainda, que qualquer eixo contido no plano da placa e passante por *G* é um eixo central de inércia;

(b) no sistema *Gxyz*, solidário à estrutura de suporte e orientado pelos versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, escrever os vetores de rotação absoluta, $\vec{\omega}$, e de momento da quantidade de movimento, $\vec{H}_G$, da placa;

(c) o momento $\vec{M}_G$, *aplicado pela estrutura à placa*, compatível com o movimento descrito;

(d) o momento $\vec{M}_O$, relativamente ao polo *O*, *transmitido a partir da placa à barra vertical*;

(e) o comprimento *L* da barra *OG* para que o momento $\vec{M}_O$ seja nulo.

Resolução

(a) Para qualquer eixo $G\vec{u}$ passante por *G* e contido no plano *Gxzy*, tem-se:

$$J_{G\vec{u}} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ma^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi \\ 0 \\ \sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{ma^2}{12}\cos\psi \\ 0 \\ \dfrac{ma^2}{12}\sin\psi \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{12}$$

(0,5)

(b) Expressões de $\vec{\omega}$ e de $\overline{H}_G$ descritas em $Gxyz$

$\vec{\omega} = \omega_r \vec{j} + \Omega_a \vec{k}$

(0,5)

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ \Omega_a \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6}\omega_r \vec{j} + \frac{ma^2}{12}\Omega_a \vec{k}$$

(0,5)

(c) Momento aplicado pela estrutura à placa, em G

$\vec{M}_G = \vec{\Omega}_a \wedge \{[J_G]\cdot[\omega]\} = \Omega_a \vec{k} \wedge \left[\frac{ma^2}{6}\omega_r \vec{j} + \frac{ma^2}{12}\Omega_a \vec{k}\right] = -\frac{ma^2}{6}\Omega_a \omega_r \vec{i}$ (binário giroscópico ativo)

(1,0)

(d) Momento transmitido pela placa à estrutura, em O

Como a estrutura tem peso desprezível, o momento em O é dado por:

$$\vec{M}_O = \frac{ma^2}{6}\Omega_a \omega_r \vec{i} - mgL\vec{i} = \left(\frac{ma^2}{6}\Omega_a \omega_r - mgL\right)\vec{i}$$

(0,5)

(e) Comprimento L requerido para que o momento em O seja nulo:

Impondo-se $\vec{M}_O = \vec{0}$, resulta:

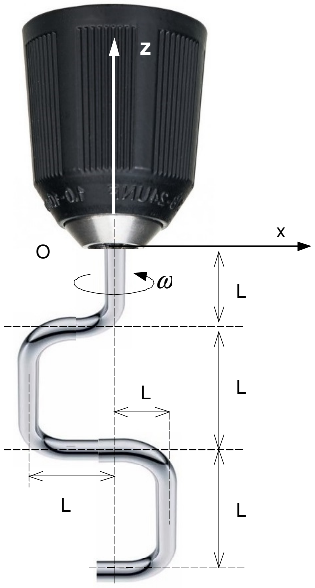
$$L = \frac{a^2}{6g}\Omega_a \omega_r$$

(0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



3ª Questão (3,0 pontos). Um misturador de tinta é composto por uma barra esbelta curva, presa a um mandril. A barra tem densidade linear ρ, e sua linha central, de comprimento $7L$, está contida no plano Oxz, conforme mostra a figura. Através de um sistema de acionamento controlado, o misturador gira a uma velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, constante, em torno do eixo Oz. Desconsiderando a dimensão do diâmetro da seção transversal da barra face ao seu comprimento, determine as ***forças de reação*** e o ***momento reativo***, relativo ao polo O, ***aplicados ao mandril pela barra***. Apresente os resultados no referencial móvel $Oxyz$, solidário a barra.

Resolução

a) Determinação da posição do centro de massa

$$x_G = 0\,;\ y_G = 0\,;\ z_G = -\frac{25}{14}L \qquad \textbf{(0,5)}$$

(b) Determinação dos momentos e produtos de inércia (sete partes):

$$J_z = 0 + \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 = \frac{10}{3}\rho L^3$$

$$J_{xz} = 0 + m\frac{-L}{2}(-L) + m(-L)\frac{-3L}{2} + m\frac{-L}{2}(-2L) + m\frac{L}{2}(-2L) + mL\frac{-5L}{2} + m\frac{L}{2}(-3L)$$

$$J_{xz} = -2mL^2 = -2\rho L^3 \qquad \textbf{(1,0)}$$

(c) Aplicação do ***TQMA*** no pólo O, fixo

$$\vec{H}_O = \begin{Bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\\omega\end{Bmatrix} = J_z\,\omega\vec{k} - J_{xz}\omega\vec{i}$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\wedge\vec{i} = \omega_{arr}\,\vec{k}\wedge\vec{i} = \omega\,\vec{j}$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}\wedge\vec{k} = \omega_{arr}\,\vec{k}\wedge\vec{k} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{H}_O = -J_{xz}\,\omega^2\,\vec{j} = 2\rho L^3\omega^2\,\vec{j} = \vec{M}_O$$

Portanto o momento no ponto *O* da barra, desprezando-se eventual torque viscoso do fluido, é:

$$\boxed{M_{Oy} = 2\rho L^3 \omega^2}$$ **(1,0)**

(d) Aplicação do Teorema da Resultante

Aplicando-se o ***TR*** na barra para $\vec{a}_G = 0$, pois o centro de massa coincide com o eixo, tem-se:

$$m\vec{a}_G = \sum \vec{F} = \vec{R}_O - 7mg\,\vec{k}$$

$$\boxed{O_x = 0 \ ; \ O_y = 0 \ ; \ O_z = 7mg\,\vec{k}}$$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

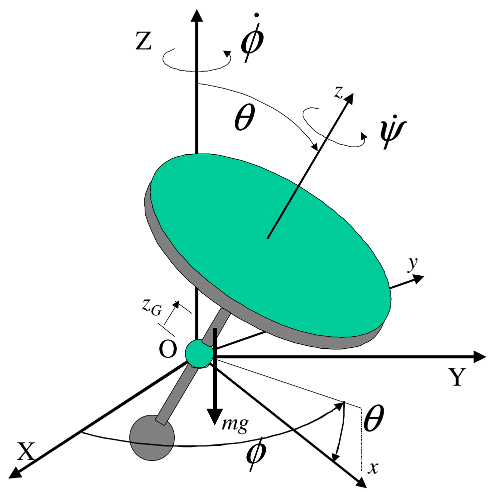
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

4ª Questão (1,0 ponto).

(a) Está correta a assertiva: “***o balanceamento completo de um rotor se resume a fazer do eixo de rotação um eixo central de inércia***”? Justifique sua resposta conceitualmente.

(b) Pode-se mostrar (ver Pesce, CP, *Dinâmica dos Corpos Rígidos*, cap. 6.5.2) que o movimento de um pião ideal, ou seja, na ausência de quaisquer forças de natureza dissipativa, é regido por uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-linear, no ângulo de nutação $\theta(t)$:



$$I\ddot{\theta}+\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)(\beta-\alpha\cos\theta)}{I\,\mathrm{sen}^3\theta}-mgz_G\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

onde

$$\alpha = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)$$
$$\beta = J\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)$$

são dois *invariantes* do movimento.

Pergunta-se: ***o que, fisicamente, estes dois invariantes representam*?**

Resolução

(a) SIM, a assertiva está correta, pois, para que haja balanceamento completo, é necessário que:

i. o centro de massa do sistema seja deslocado para o eixo de rotação;

ii. o eixo de rotação seja um eixo principal de inércia; ou seja, que os produtos de inércia que envolvem este eixo sejam nulos.

A assertiva em tela reúne os dois conceitos de uma só vez.

(b) Os invariantes (α,β) representam, respectivamente, as intensidades das projeções do vetor momento da quantidade de movimento, em relação ao polo fixo O, nas direções: (i) do eixo de precessão, neste caso o eixo vertical, OZ; (ii) do eixo de rotação própria, Oz.

Em Mecânica Analítica, *coordenadas generalizadas* como ϕ e ψ, associadas a correspondentes *quantidades de movimento generalizados invariantes*, são classificadas como *cíclicas* ou *ignoráveis*.