ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

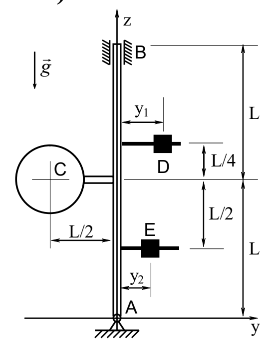
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Primeira Prova – 09 de abril de 2015

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (**3,0 pontos**) No sistema mostrado na figura, o eixo *AB* tem massa desprezível e o disco de centro *C*, localizado no plano *yz*, tem massa *2m*. A barra que une o disco ao eixo *AB* também tem massa desprezível. Dois blocos de massa *m* e dimensões desprezíveis podem ser fixados nos pontos *D* e *E* distantes y_1 e y_2 do eixo *AB*, respectivamente. Considerando o referencial *Axyz*, solidário ao sistema, e admitindo rotação em torno do eixo *Az*, determine os valores de y_1 e y_2 que anulam as reações dinâmicas nos vínculos *A* e *B*.

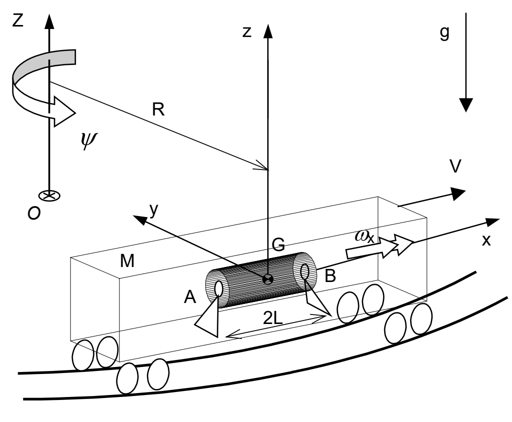


2ª Questão (3,5 pontos) Uma locomotiva diesel/elétrica tem o eixo de rotação do conjunto motor/gerador alinhado com o eixo longitudinal da locomotiva e apoiado na articulação em *A* e no anel em *B*. Este sistema girante tem massa *M*, momentos de inércia J_{Gx}, J_{Gy}, J_{Gz} e tem vetor de rotação constante $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i}$ em relação à locomotiva. O trem percorre um trecho circular de raio *R* com velocidade constante $\vec{V} = V\vec{i}$. Pede-se:

a) determinar a velocidade angular $\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\vec{k}$ de arrastamento da locomotiva e o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ absoluta do rotor;

b) o momento da quantidade de movimento (momento angular) do rotor, tomando como pólo o seu baricentro *G* e expressando na base auxiliar móvel *Gxyz* (que não gira com o rotor);

c) determinar as reações nos mancais *A* e *B*, devidas ao movimento da locomotiva.

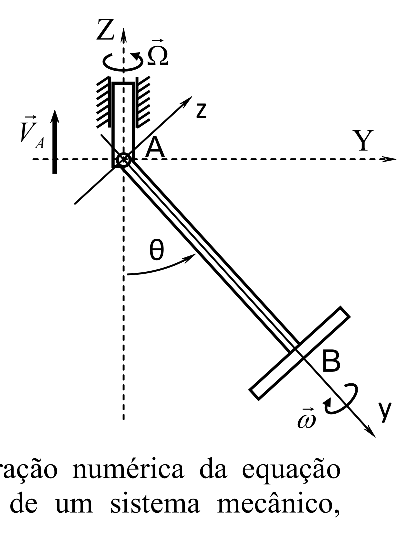


3ª Questão (3,5 pontos) No sistema mostrado na figura, o disco de centro *B*, massa *m* e raio *R* gira em torno do eixo *Ay* com $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$. A barra *AB*, tem massa desprezível e comprimento *L*. No instante considerado, a barra *AB* gira em torno do eixo *AZ* com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{K}$ e o ponto *A* tem velocidade $\vec{V}_A = V\vec{K}$. Sabendo-se que, devido às características do movimento, o ângulo θ permanece constante, pede-se:

(a) O vetor de rotação absoluta do disco.

(b) A quantidade de movimento angular do disco em relação ao pólo *B*.

(c) A quantidade de movimento angular do disco em relação ao pólo *A*.



4ª Questão (0,5 ponto) Descreva sucintamente como realizar a integração numérica da equação diferencial de segunda ordem, que descreve o movimento dinâmico de um sistema mecânico, utilizando o ambiente *SCILAB*.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (3,0 pontos)

RESOLUÇÃO

Problema no plano *Ayz*, de forma que $J_{xz} = 0$ e $x_G = 0$

Cálculo do produto de inércia J_{yz} na condição balanceada:

$$J_{yz} = J_1 + J_2 + J_C \quad \Rightarrow 0 = my_1 \frac{5L}{4} + my_2 \frac{L}{2} + \left[0 + 2mL\left(-\frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow 5y_1 + 2y_2 = 4L \ \ (1)$$

Cálculo da coordenada *y* do baricentro na condição balanceada:

$$4my_G = my_2 + my_1 - 2m\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = L \ \ (2)$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), tem-se:

$\boxed{y_1 = \frac{2L}{3}}$ e $\boxed{y_2 = \frac{L}{3}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos)

RESOLUÇÃO

a) determinar a velocidade angular $\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi}\,\vec{k}$ de arrastamento da locomotiva e o vetor $\vec{\Omega}$ de rotação absoluta do rotor;

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} \quad \text{e} \quad \vec{\Omega} = \omega_x\,\vec{i} + \dot{\psi}\,\vec{k} \qquad (0,5)$$

b) o momento da quantidade de movimento *(ou momento angular)* do rotor, tomando como pólo o seu baricentro *G* e expressando na base auxiliar móvel *Gxyz* (que não gira com o rotor);

$$\left[\vec{H}_G\right] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_x\omega_x\,\vec{i} + J_z\dot{\psi}\,\vec{k} \qquad (0,5)$$

c) determinar as reações nos mancais *A* e *B*, devido ao movimento da locomotiva. Utilizando o *TQMA* e pólo em *G* obtêm-se:

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext} \quad \rightarrow \quad J_x\omega_x\,\dot{\psi}\,\vec{j} = (A-G)\wedge\vec{R}_A + (B-G)\wedge\vec{R}_B$$

pois: $\dot{\vec{i}} = \dot{\psi}\,\vec{k}\wedge\vec{i} = \dot{\psi}\,\vec{j}$ e $\dot{\vec{k}} = \dot{\psi}\,\vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\psi}} = cte$ e $\vec{\omega} = cte$

$$J_x\omega_x\,\dot{\psi}\,\vec{j} = L\vec{i}\wedge(X_A\,\vec{i} + Y_A\,\vec{j} + Z_A\,\vec{k}) + (-L\,\vec{i})\wedge(Y_B\,\vec{j} + Z_B\,\vec{k}) \qquad (1,0)$$

$$J_x\omega_x\,\dot{\psi}\,\vec{j} = L(Z_B - Z_A)\vec{j} + L(Y_A - Y_B)\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{J_x\omega_x V}{R} = L(Z_B - Z_A)} \quad \text{e} \quad \boxed{Y_A = Y_B} \qquad (0,5)$$

Aplicando o *TMB* obtêm-se as forças externas aplicadas no eixo do rotor:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \ ; \ \vec{a}_G = \frac{V^2}{R}\vec{j}$$

$$\left\{\begin{matrix} Ma_{Gx} = X_A \\ Ma_{Gy} = Y_A + Y_B \\ Ma_{Gz} = Z_A + Z_B - Mg \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} X_A = 0 \\ M\dfrac{V^2}{R} = Y_A + Y_B \\ Z_A + Z_B - Mg = 0 \end{matrix} \qquad (0,5)$$

$$X_A = 0 \qquad Y_A = Y_B = \frac{MV^2}{2R} \qquad Z_B = \frac{J_x\omega_x V + LRMg}{2LR} \qquad Z_A = -\frac{J_x\omega_x V - LRMg}{2LR}$$

As reações nos mancais são:

$$\boxed{X'_A = 0} \quad \boxed{Y'_A = Y'_B = -\frac{MV^2}{2R}} \quad \boxed{Z'_B = -\frac{J_x\omega_x V + LRMg}{2LR}} \quad \boxed{Z'_A = \frac{J_x\omega_x V - LRMg}{2LR}} \qquad (0,5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos)

RESOLUÇÃO

Respostas escritas usando a base *Axyz*, solidária à barra *AB*

a) $\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \vec{\omega}_{abs} = \omega\,\vec{j} + \Omega\vec{K}$, em que $\vec{K} = -\cos\theta\,\vec{j} + sen\,\theta\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = (\omega - \Omega\cos\theta)\,\vec{j} + \Omega sen\theta\,\vec{k}} \qquad (1,0)$$

b) Sabendo que *B* é o baricentro do disco, cálculo da quantidade de movimento angular (ou momento da quantidade de movimento, ou momento angular) em relação ao polo *B*

$$\left[\vec{H}_B\right] = [I_B]\{\omega_{abs}\} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega - \Omega\cos\theta \\ \Omega\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_B = \frac{mR^2}{2}(\omega - \Omega\cos\theta)\,\vec{j} + \frac{mR^2}{4}\Omega sen\theta\,\vec{k}} \qquad (1,0)$$

c) Fórmula da mudança de polo, cálculo da quantidade de movimento angular (ou momento da quantidade de movimento, ou momento angular) em relação ao polo *A*

$\vec{H}_A = \vec{H}_B + (B - A)\wedge m\vec{V}_B$, em que $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega}\wedge(B - A)$ (0,5)

$\Rightarrow \vec{V}_B = V\vec{K} + \Omega\vec{K}\wedge\left(L\,\vec{j}\right)$ ou $\Rightarrow \vec{V}_B = V\left(-\cos\theta\,\vec{j} + sen\theta\,\vec{k}\right) + \Omega\left(-\cos\theta\,\vec{j} + sen\theta\,\vec{k}\right)\wedge\left(L\,\vec{j}\right)$

$$\Rightarrow \vec{V}_B = -\Omega L sen\theta\,\vec{i} - V\cos\theta\,\vec{j} + V sen\theta\,\vec{k} \qquad (0,5)$$

$$\Rightarrow (B - A)\wedge m\vec{V}_B = mVL sen\theta\,\vec{i} + m\Omega L^2 sen\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_A = mVL sen\theta\,\vec{i} + \frac{mR^2}{2}(\omega - \Omega\cos\theta)\,\vec{j} + \left(\frac{mR^2}{4} + mL^2\right)\Omega sen\theta\,\vec{k}} \qquad (0,5)$$

4ª Questão (0,5 ponto)

RESOLUÇÃO
A integração pode ser feita de duas maneiras: conhecidas as condições iniciais, pode-se integrar duas vezes a equação diferencial de segunda ordem, obtendo velocidade e posição em função do tempo, utilizando a função ODE do *SCILAB* ou descrever o sistema na forma de espaço de estados (2n) e realizar a integração uma única vez. Alternativamente pode-se utilizar a ferramenta XCOS incluindo dois blocos de integração.