

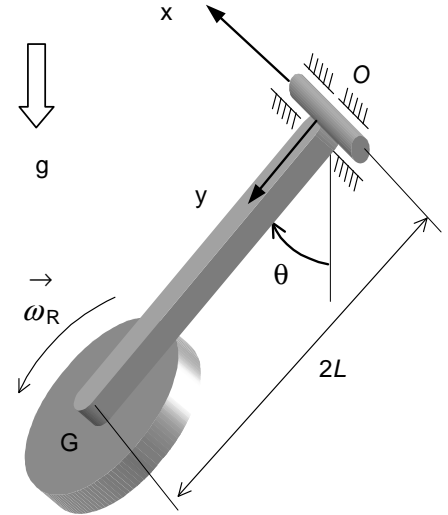


Mecânica – B – PME 2200 –1ª. Prova – 01/4/2014

Duração da Prova: 110 minutos

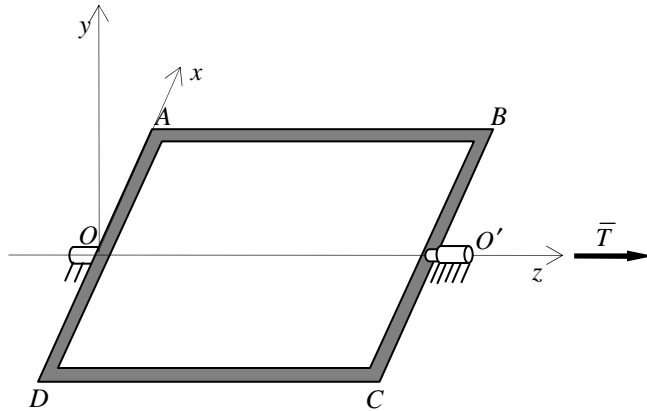
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e demais equipamentos eletrônicos similares)

**1ª Questão (3,5 pontos).** Um avião, que acaba de decolar, está em translação retilínea com velocidade constante. A roda permanece em movimento com velocidade angular constante  $\vec{\omega}_R = \omega_R \vec{k}$  relativamente à barra  $OG$ . O trem de pouso é recolhido com velocidade angular de arrastamento constante  $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{i} = \dot{\theta} \vec{i}$ , conforme mostrado na figura. Considere a roda como um disco delgado de raio  $R$ , massa  $m$  e momentos de inércia  $J_{Gx} = J_{Gy} = J$ ,  $J_{Gz} = 2J$ . A barra  $OG$  tem massa desprezível e comprimento  $2L$ . Pede-se, para a configuração correspondente a esse instante, em função dos parâmetros dados e expressos na base tri-ortogonal  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , solidária à barra  $OG$ :



- o vetor rotação absoluta da roda;
- o vetor momento da quantidade de movimento  $\vec{H}_G$  da roda relativo ao pólo  $G$ ;
- o momento aplicado pela roda à barra  $OG$ ;

**2ª QUESTÃO (3,5 pontos).** Um aro quadrado constituído por 4 barras delgadas de comprimento  $2\ell$  e massas  $m_{AD} = m_1$ ,  $m_{BC} = m_2$ ,  $m_{AB} = M_1$  e  $m_{CD} = M_2$ , é posto a girar com velocidade angular  $\omega$  constante em torno do eixo  $Oz$ , sob a ação de um momento externo  $T(t)\vec{k}$ , conforme indicado na figura. Utilizando o sistema de eixos  $Oxyz$  ligados ao aro, determinar:



- as coordenadas do centro de massa do aro;
- a aceleração do centro de massa do aro;
- a matriz de inércia do aro relativa ao pólo  $O$  e descrita no sistema de eixos  $Oxyz$ ;
- os valores de duas massas  $m$  e  $m'$  que, localizadas sobre dois vértices convenientes do aro (indicá-los), mantenham-no em equilíbrio dinâmico.

**3ª Questão (1,0 ponto)**

Seja  $[\mathbf{B}] = [\cos \alpha_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , a matriz de mudança entre duas bases canônicas,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  e  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , que orientam dois sistemas cartesianos  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , ambos com mesma origem em  $O$ . Os elementos desta matriz,  $\cos \alpha_{ij}$ , são os cossenos diretores, ou seja, o cosseno dos ângulos formados entre os correspondentes eixos cartesianos. Seja também um corpo rígido, cuja matriz de inércia é designada  $[\mathbf{J}_O]$  e  $[\mathbf{J}'_O]$  nos respectivos sistemas cartesianos. Pede-se:

- Qual é a relação matemática que permite calcular  $[\mathbf{J}'_O]$ , uma vez conhecida  $[\mathbf{J}_O]$ ?

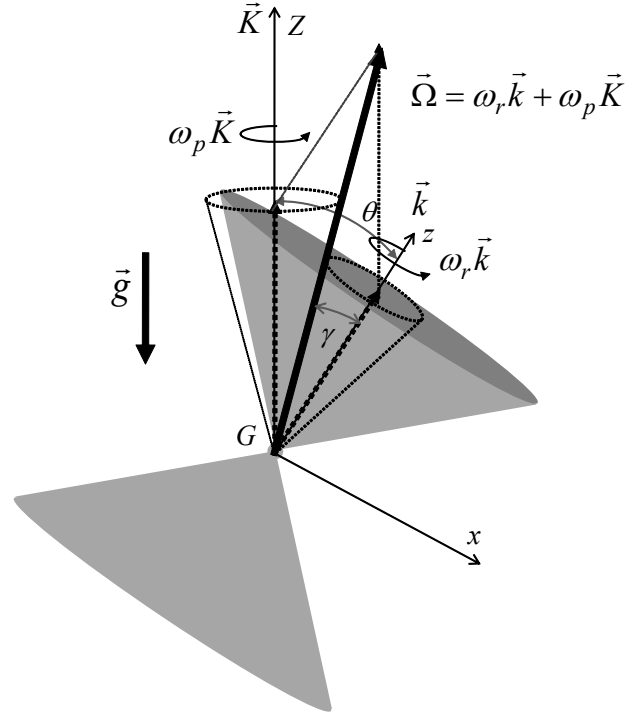
Seja, agora,  $[\mathbf{P}]$  a matriz de mudança de base que diagonaliza  $[\mathbf{J}_O]$ . Pergunta-se:

- Como pode ser construída a matriz de diagonalização?



**4ª Questão (3,0 pontos).** A figura ao lado mostra um corpo rígido de revolução formado por dois cones idênticos, soldados pelos vértices, em contraposição. Os cones são perfeitamente simétricos, sólidos e de material homogêneo. O centro de massa  $G$  do corpo coincide com a articulação que o sustenta, sob ação do campo gravitacional. Os eixos  $Gz$  e  $GZ$ , mostrados na figura, são orientados pelos versores  $\vec{k}$  e  $\vec{K}$ . Os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $Gx$  e  $Gz$  são indicados por  $I$  e  $J$ , respectivamente.

Sabe-se que o conjunto executa *movimento de precessão livre e estacionária*, com ângulo de nutação  $\theta$ , taxa de precessão  $\omega_p$  e de rotação própria  $\omega_r$ ; com  $\omega_p > 0$ ,  $\omega_r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ , conforme indicado. As superfícies demarcadas com linhas tracejadas ilustram os denominados cones ‘espacial’ e ‘do corpo’, ou seja, a base e a rolante. Pede-se:



- Identificar os cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
- Descrever como pode ser interpretada a cinemática do corpo, à luz dos significados dos cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
- Determinar  $\omega_r$ , expresso em função de  $\omega_p$ ,  $\theta$  e dos momentos de inércia  $I$  e  $J$ .
- Para que o estado de precessão livre, estacionária e direta, mostrado na figura, seja possível, qual dos momentos de inércia deve ter maior valor,  $I$  ou  $J$ ? Justifique.

Note que, *em um movimento geral*, sendo  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  as taxas de precessão, nutação e rotação própria, o momento da quantidade de movimento do corpo, calculado em relação ao centro de massa e expresso na base de versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  que o acompanha, mas não é a ele solidário, é dado por  $\vec{H}_G = -I\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + I\dot{\theta} \vec{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}$ .

### Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)

a) compor o vetor de rotação absoluto da roda;

$$\vec{\omega} = \omega_B \vec{i} + \omega_R \vec{k} \quad (1,0)$$

b) determinar o vetor momento da quantidade de movimento  $\vec{H}_G$  da roda com respeito ao pólo  $G$ ;

$$[\vec{H}_G] = [J]_{Gxyz} \begin{Bmatrix} \omega_B \\ 0 \\ \omega_R \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{H}_G = J\omega_B \vec{i} + 2J\omega_R \vec{k} \quad (1,0)$$

c) calcular o momento aplicado pela roda à barra  $OG$ ;

Aplicando o *TQMA* na roda e lembrando que  $\dot{\vec{\omega}}_R = 0$  e  $\dot{\vec{\omega}}_B = 0$  e  $\dot{\vec{i}} = 0$ :  $\rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$\dot{\vec{H}}_G = 2J\omega_R \dot{\vec{k}} = 2J\omega_R (\omega_B \vec{i} \wedge \vec{k}) = -2J\omega_R \omega_B \vec{j} \rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -2J\omega_R \omega_B \vec{j} \quad (1,0)$$



Assim, o momento giroscópico aplicado pela roda na barra é igual a:

$$\vec{M}_{Gir} = 2J\omega_R\omega_B\vec{j} \quad (0,5)$$

### Resolução da 2ª Questão

As coordenadas do centro de massa do aro são obtidas por meio da composição de centros de massas das 4 barras delgadas, conforme mostrado a seguir:

$$x_G = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + M_1 \cdot \ell - M_2 \cdot \ell}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell$$

$$y_G = 0$$

$$z_G = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 2\ell + M_1 \cdot \ell + M_2 \cdot \ell}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} = \frac{2m_2 + M_1 + M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell$$

Portanto, o centro de massa do aro se situa em:

$$G = \left( \frac{M_1 - M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell, 0, \frac{2m_2 + M_1 + M_2}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \ell \right) \quad (1,0)$$

A aceleração do centro de massa do aro é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (\vec{G} - \vec{O}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{O})] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (\vec{G} - \vec{O}) + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (x_G \vec{i} + z_G \vec{k})] = -\omega^2 x_G \vec{i}$$

$$\therefore \vec{a}_G = \frac{M_2 - M_1}{m_1 + m_2 + M_1 + M_2} \omega^2 \ell \vec{i} \quad (0,5)$$

Considerando-se que o aro se situa no plano  $xz$ , seus produtos de inércia  $J_{Oxy}$  e  $J_{Oyz}$  são ambos nulos. Os demais componentes da matriz de inércia são obtidos mediante aplicação da técnica de composição de momentos e produtos de inércia, conforme indicado a seguir:

$$J_{Ox} = (J_{Ox})_{AD} + (J_{Ox})_{BC} + (J_{Ox})_{AB} + (J_{Ox})_{CD} = 0 + (0 + m_2 4\ell^2) + \frac{M_1 4\ell^2}{3} + \frac{M_2 4\ell^2}{3} = 4 \cdot \left( m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} \right) \ell^2$$

$$J_{Oy} = (J_{Oy})_{AD} + (J_{Oy})_{BC} + (J_{Oy})_{AB} + (J_{Oy})_{CD} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \left( \frac{m_2 4\ell^2}{12} + m_2 4\ell^2 \right) + \left( \frac{M_1 4\ell^2}{12} + M_1 2\ell^2 \right) + \left( \frac{M_2 4\ell^2}{12} + M_2 2\ell^2 \right)$$

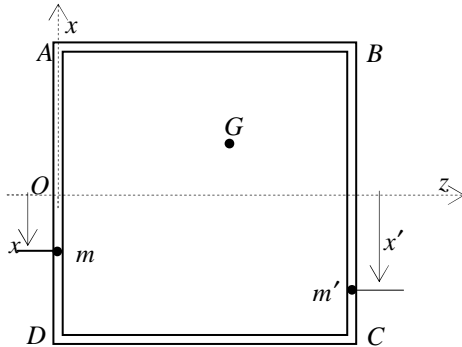
$$\therefore J_{Oy} = \left[ \frac{m_1 + m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} + 2 \cdot (M_1 + M_2) \right] \ell^2$$

$$J_{Oz} = (J_{Oz})_{AD} + (J_{Oz})_{BC} + (J_{Oz})_{AB} + (J_{Oz})_{CD} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \frac{m_2 4\ell^2}{12} + M_1 \ell^2 + M_2 \ell^2 = \left( \frac{m_1 + m_2}{3} + M_1 + M_2 \right) \ell^2$$

$$J_{Oxz} = (J_{Oxz})_{AD} + (J_{Oxz})_{BC} + (J_{Oxz})_{AB} + (J_{Oxz})_{CD} = 0 + (0 + m_2 \cdot 0 \cdot 2\ell) + M_1 \ell \cdot \ell + M_2 (-\ell) \cdot \ell = (M_1 - M_2) \ell^2$$

Portanto, a matriz de inércia do aro, relativa ao pólo  $O$ , é :

$$[J_O] = \begin{bmatrix} 4 \cdot \left( m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} \right) \ell^2 & 0 & -(M_1 - M_2) \ell^2 \\ 0 & \left[ \frac{m_1 + m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1 + M_2}{3} + 2(M_1 + M_2) \right] \ell^2 & 0 \\ -(M_1 - M_2) \ell^2 & 0 & \left( \frac{m_1 + m_2}{3} + M_1 + M_2 \right) \ell^2 \end{bmatrix} \quad (1,0)$$



Considerando-se que a velocidade angular do aro é constante, o seu equilíbrio dinâmico pode ser atingido desde que se acrescentem ou se removam duas massas  $m$  e  $m'$  localizadas sobre planos paralelos ao eixo de rotação  $z$  (vide figura abaixo), de modo tal a fazê-lo coincidir com o eixo central de inércia do aro. Como o corpo já está balanceado em relação ao eixo  $y$ , é suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$(m_1 + m_2 + M_1 + M_2)x_G + mx + m'x' = 0 \quad (18)$$

$$J_{Oxz} + mxz + m'x'z' = 0 \quad (19)$$

Desenvolvendo-se as equações acima, resultam:

$$(M_1 - M_2)\ell + mx + m'x' = 0 \quad (20)$$

$$(M_1 - M_2)\ell^2 + mxz + m'x'z' = 0 \quad (21)$$

Situando-se as massas  $m$  e  $m'$ , respectivamente, nos planos  $z = 0$  e  $z = 2\ell$ , a equação (21) se transforma em:

$$(M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'x' = 0 \quad (22)$$

Supondo que  $M_2 > M_1$  e utilizando o sistema de duas equações (20, 22) a 4 incógnitas ( $m, m', x, x'$ ), identificaremos as duas massas  $m, m'$  requeridas ao equilíbrio dinâmico do aro considerando os 4 casos seguintes:

1º)  $x = x' = \ell$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell + m\ell + m'\ell = 0 \Rightarrow m + m' = M_2 - M_1$$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'\ell = 0$$

Resolvendo-se o sistema acima, obtêm-se:

$$m = m' = \frac{M_2 - M_1}{2}, \text{ massas a serem adicionadas ao aro nos vértices A e B.}$$

2º)  $x = x' = -\ell$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell - m\ell - m'\ell = 0 \Rightarrow m + m' = M_1 - M_2$$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell^2 - 2\ell m'\ell = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtêm-se:

$$m = m' = \frac{M_1 - M_2}{2}, \text{ massas a serem removidas do aro nos vértices C e D.}$$

3º)  $x = \ell, x' = -\ell$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell + m\ell - m'\ell = 0 \Rightarrow m - m' = M_2 - M_1$$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell^2 - 2\ell m'\ell = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtêm-se:

$$m = \frac{M_1 - M_2}{2}, \text{ massa a ser removida do vértice A;}$$

$$m' = \frac{M_2 - M_1}{2}, \text{ massa a ser adicionada ao vértice C}$$

4º)  $x = -\ell, x' = \ell$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell - m\ell + m'\ell = 0 \Rightarrow m' - m = M_2 - M_1$$



$$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'\ell = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior, obtêm-se:

$$m = \frac{M_1 - M_2}{2}, \text{ massa a ser removida do vértice } D;$$

$$m' = \frac{M_2 - M_1}{2}, \text{ massa a ser adicionada ao vértice } B.$$

(1,0)

**Resolução da 3ª questão** (ref: Pesce, C.P., Dinâmica dos Corpos Rígidos, p. 26-29):

(a) Qual é a relação matemática que permite calcular  $[\mathbf{J}'_O]$ , uma vez conhecida  $[\mathbf{J}_O]$ ?

R: A relação matemática que transforma a matriz de inércia  $[\mathbf{J}_O]$  para o novo sistema coordenado é:

$[\mathbf{J}'_O] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_O][\mathbf{B}]^{-1}$ . Como  $[\mathbf{B}]$  é ortogonal, posto que relaciona duas bases ortogonais, sua inversa é a própria transposta, o que permite também escrever  $[\mathbf{J}'_O] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_O][\mathbf{B}]^T$ . (0,5)

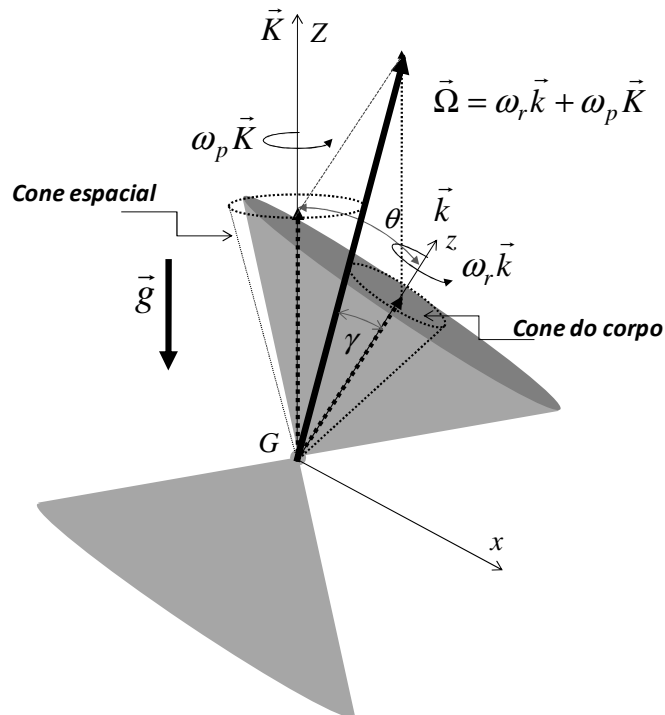
(c) Como pode ser construída a matriz de diagonalização?

R: A matriz  $[\mathbf{P}]$  que diagonaliza  $[\mathbf{J}_O]$  pode ser construída a partir da solução do problema de auto-valor (ou valor próprio) associado à matriz de inércia, e será composta pelos respectivos auto-vetores (ou vetores próprios). (0,5)

**Resolução da 4ª questão** (ref: Pesce, C.P., Dinâmica dos Corpos Rígidos, pp. 123 e 139):

(a) Identificar os cones 'espacial' e 'do corpo'.

R: O cone espacial é o lugar geométrico do vetor de rotação do corpo, visto do referencial fixo. O cone do corpo é o lugar geométrico do vetor de rotação do corpo visto do referencial do corpo.



(0,5)

(b) Descrever como pode ser interpretada a cinemática do corpo, à luz dos significados dos cones 'espacial' e 'do corpo'.

R: Tudo se passa como se o 'cone do corpo', a ele solidário, rolasse sem escorregar sobre o 'cone espacial', suposto fixo. (0,5)



- (c) Determinar  $\omega$ , expresso em função de  $\omega_p$ ,  $\theta$  e dos momentos de inércia  $I$  e  $J$ .

R: Sabe-se que o momento da quantidade de movimento do corpo ou quantidade de movimento angular, calculado em relação ao centro de massa, é  $\vec{H}_G = -I\dot{\phi}\text{sen}\theta\vec{i} + I\dot{\theta}\vec{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$ . Portanto, sua derivada em relação ao tempo é dada por,  $\dot{\vec{H}}_G = -\frac{d}{dt}(I\dot{\phi}\text{sen}\theta)\vec{i} + \frac{d}{dt}(I\dot{\theta})\vec{j} + \frac{d}{dt}(J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta))\vec{k} - I\dot{\phi}\text{sen}\theta\dot{\vec{i}} + I\dot{\theta}\dot{\vec{j}} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\vec{k}}$ .

A condição de precessão estacionária é caracterizada pelo estado  $(\dot{\theta} = 0; \dot{\phi} = \omega_p; \dot{\psi} = \omega_r)$ , com  $\omega_p$  e  $\omega_r$  invariantes, de tal forma que os três primeiros termos da expressão acima se anulam. Ainda, como:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{i}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{i} = \omega_p \cos\theta \vec{j} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{j} = \vec{0} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{k} = \omega_p \text{sen}\theta \vec{j}\end{aligned}$$

então, 
$$\dot{\vec{H}}_G = [J(\omega_r + \omega_p \cos\theta) - I\omega_p \cos\theta] \omega_p \text{sen}\theta \vec{j}. \quad (0,5)$$

No caso em estudo, o centro de massa coincide com a articulação ideal e, portanto, na ausência de outras forças externas que não as de origem gravitacional, o momento de forças em relação a este polo é nulo. O teorema da quantidade de movimento angular,  $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$ , fica então reduzido à equação algébrica:

$$[J(\omega_r + \omega_p \cos\theta) - I\omega_p \cos\theta] \omega_p \text{sen}\theta = 0. \quad (0,5)$$

Há três soluções possíveis, duas das quais, devem ser descartadas, a partir do enunciado:

(i)  $\omega_p \equiv 0, \forall \theta$  e  $\omega_r$ ; (ii)  $\text{sen}\theta \equiv 0, \forall \omega_r$ , quando a definição de precessão é perdida. Estas duas soluções são, na realidade, equivalentes e podem ser resumidas pela condição  $\omega_p \text{sen}\theta = 0$ . Dizem, essencialmente, que poderá existir equilíbrio na ausência de precessão, unicamente sob rotação própria e de valor arbitrário, para qualquer orientação do eixo de axissimetria do corpo; nesta situação a quantidade de movimento angular, invariante, será dada por:  $\vec{H}_G = J\omega_r \vec{k}$ .

A terceira solução possível é a procurada, (iii): 
$$\omega_r = \frac{I - J}{J} \omega_p \cos\theta \quad (0,5)$$

Note que neste terceiro e último caso, o momento angular, invariante, tem agora a direção do versor  $\vec{K}$ . De fato, se substituirmos a relação acima naquela que expressa a quantidade de movimento angular, i.e.,  $\vec{H}_G = -I\dot{\phi}\text{sen}\theta\vec{i} + I\dot{\theta}\vec{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$ , com  $\dot{\phi} = \omega_p$  e  $\dot{\psi} = \omega_r$ , teremos (verifique):

$$\vec{H}_G = I\omega_p(-\text{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k}) = I\omega_p \vec{K}$$

Como a articulação coincide com o centro de massa do corpo, na ausência de forças outras externas, podemos generalizar e concluir que se houver precessão livre ela se dará em torno do eixo que orienta o vetor da quantidade de movimento angular, qualquer que seja ele.

A estabilidade das referidas condições de equilíbrio não é aqui investigada.

- (d) Para que o estado de precessão livre, estacionária e direta, mostrado na figura, seja possível, qual dos momentos de inércia deve ter maior valor,  $I$  ou  $J$ ? Justifique.

R: Para a situação estudada, em que  $\omega_p > 0$ ,  $\omega_r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ , segue da expressão acima que  $I > J$ .  $(0,5)$

Note que, nesta situação, o cone do corpo é externo ao cone espacial. Caso a precessão fosse retrógrada, situação em que  $I < J$ , o cone do corpo seria interno ao cone espacial.