ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

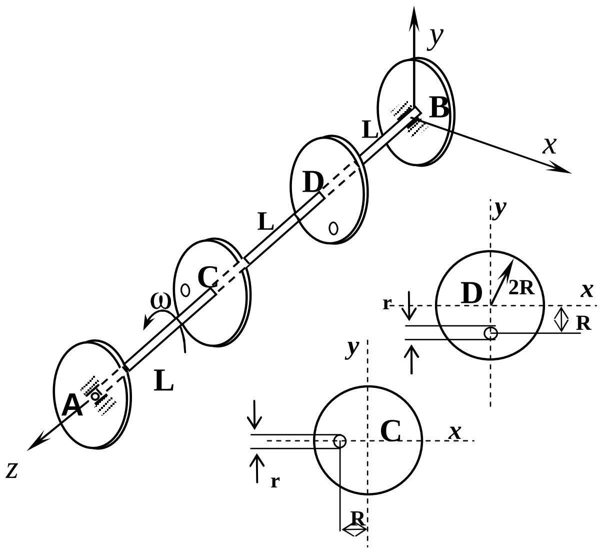
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 09 de abril de 2013

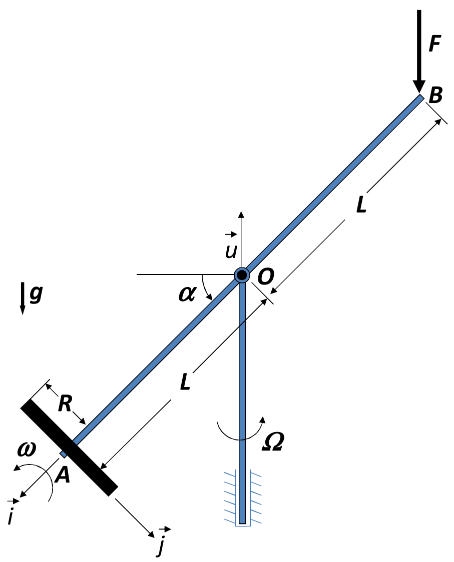
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de quaisquer dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos)

Um eixo horizontal ABCD de massa desprezível possui acoplados rigidamente 4 discos de raio **2R** em A, B, C e D. O espaçamento entre eles é **L**. Os discos A e D possuem massa **m**. Os discos C e D possuem massa **3m/4** pois, em cada um deles, foi efetuado um furo conforme mostrado nas respectivas figuras. O conjunto é sustentado por mancais ideais (anéis) em A e B, e possui rotação $\omega\vec{k}$, constante. Considere o sistema de referência móvel B*xyz*, solidário ao disco B. Pedem-se:



(a) as coordenadas dos baricentros dos discos C e D;
(b) as coordenadas do baricentro do conjunto;
(c) as reações dinâmicas nos mancais A e B (faça o diagrama de corpo livre do conjunto);
(d) balancear o sistema acrescentando ou retirando massa dos discos A e B, a uma distância R do eixo de rotação.



2ª Questão (3,5 pontos)

O disco de centro *A*, massa *m* e raio *R* tem rotação própria $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ dada e executa um movimento de precessão estacionária em torno do eixo vertical. São dados o ângulo $\alpha \neq \pi/2$ e a velocidade angular de precessão $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}$. A base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é solidária ao eixo *AOB*. O vínculo em ***O*** é um pino ideal. As massas de *AOB* e do eixo vertical são desprezíveis. Pedem-se:

a) a velocidade angular absoluta do disco na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
b) o momento angular do disco em relação ao pólo *O*;
c) o valor da força *F* necessária para manter a inclinação α ;
d) determinar o valor de *L* para que o valor da força *F* independa do ângulo α .

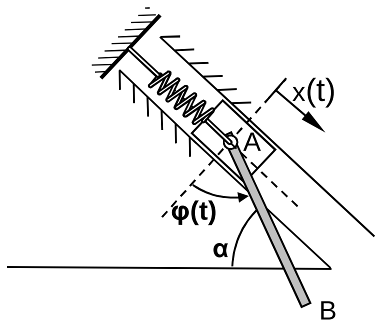
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

No EMSC#1, solicitou-se a modelagem e simulação do sistema mostrado ao lado, composto por um bloco **A** de massa *M*, uma barra homogênea **AB** de massa *m* e comprimento L, e uma mola de rigidez *k*. A inclinação da rampa é fixa, dada pelo ângulo α. A coordenada x(t) descreve o deslocamento do bloco a partir da posição indeformada da mola. Desprezam-se atritos de qualquer espécie. Solicita-se:



a) exprimir a coordenada x_e, de equilíbrio do sistema em repouso, em função dos parâmetros acima;
b) calcular a aceleração do baricentro da barra;
c) obter as equações do TMB e do TMA (pólo A) para a barra **AB**;
d) descreva, sucintamente, como você modelou este sistema no Scilab.

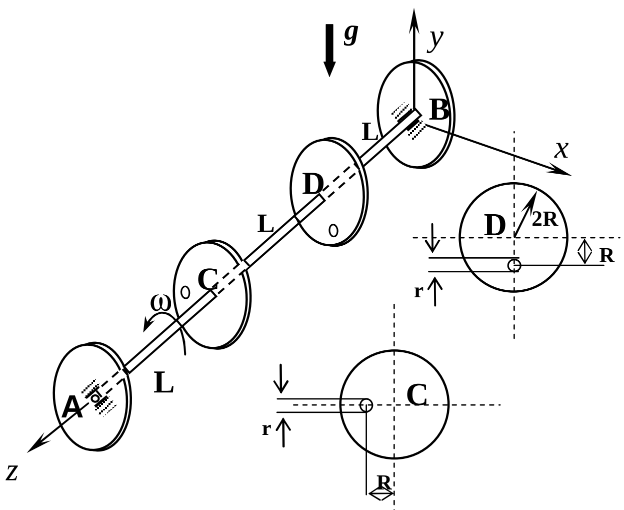
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (3,5 pontos)

Um eixo horizontal ABCD de massa desprezível possui acoplados rigidamente 4 discos de raio **2R** em A, B, C e D. O espaçamento entre eles é **L**. Os discos A e D possuem massa **m**. Os discos C e D possuem massa **3m/4** pois, em cada um deles, foi efetuado um furo conforme mostrado nas respectivas figuras. O conjunto é sustentado por mancais ideais (anéis) em A e B, e possui rotação $\omega\vec{k}$, constante. Considere o sistema de referência móvel B*xyz*, solidário ao disco B. Pedem-se:



(a) as coordenadas dos baricentros dos discos C e D;
(b) as coordenadas do baricentro do conjunto;
(c) as reações dinâmicas nos mancais A e B (faça o diagrama de corpo livre do conjunto);
(d) balancear o sistema acrescentando ou retirando massa dos discos A e B, a uma distância R do eixo de rotação.

Solução

(a) de acordo com a figura, tem-se:
para o disco C

$$x_C = \frac{1}{3m/4}\left(m.0 - \frac{m}{4}.(-R)\right) = \frac{R}{3} \therefore G_C(R/3;0;2L)$$

(0,5)

Analogamente, para o disco D,

$$y_C = \frac{1}{3m/4}\left(m.0 - \frac{m}{4}.(-R)\right) = \frac{R}{3} \therefore G_D(0;R/3;\ L)$$

(b) baricentro do conjunto

$$\left(m + \frac{3m}{4} + \frac{3m}{4} + m\right)x_G = \left(m.0 + \frac{3m}{4}\cdot\frac{R}{3} + \frac{3m}{4}\cdot\frac{R}{3} + m.0\right) \Rightarrow x_G = \frac{R}{14}$$

Analogamente, obtém-se a coordenada $y_G = \dfrac{R}{14}$ e, por simetria, $z_G = \dfrac{3L}{2}$

$$\therefore G\left(\frac{R}{14};\frac{R}{14};\frac{3L}{2}\right)$$

(0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

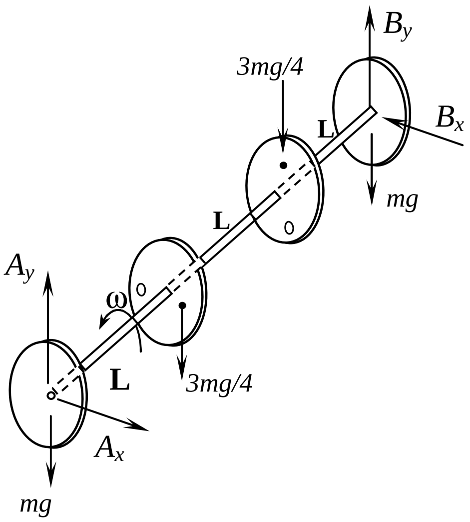
Departamento de Engenharia Mecânica

(c) Reações dinâmicas nos mancais (1,5)

Tendo em vista que o vetor rotação do conjunto é $\omega\vec{k}$ e o pólo B é fixo, escreve-se

$$\vec{H}_B = \begin{bmatrix} Jx & -Jxy & -Jxz \\ -Jyx & Jy & -Jyz \\ -Jzx & -Jzy & Jz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k}$$

Inicia-se pelo DCL do conjunto:



Em seguida, utilizam-se o TMB e o TMA (pólo B)

TMB

A aceleração do baricentro é:

$$\vec{a}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (G - B) = \frac{\omega R^2}{14}(-\vec{i} - \vec{j})$$

O TMB fornece, então, em componentes,

$$(\vec{i}): A_x - B_x = -\frac{7m}{2}\frac{\omega R^2}{14} = -\frac{m\omega R^2}{4} \qquad (1)$$

$$(\vec{j}): A_y + B_y - \frac{7mg}{2} = -\frac{m\omega R^2}{4} \qquad (2)$$

TMA

Diferenciando a equação do momento angular no pólo B em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B \qquad (3)$$

$$\dot{\vec{H}}_B = -J_{xz}\omega\dot{\vec{i}} - J_{yz}\omega\dot{\vec{j}} = -J_{xz}\omega(\omega\vec{k} \wedge \vec{i}) - J_{yz}\omega(\omega\vec{k} \wedge \vec{j})$$

$$\dot{\vec{H}}_B = -J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i} \qquad (4)$$

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Portanto, de todos os termos da matriz de inércia, somente os constantes da equação (4) precisam ser determinados. Lembrando as propriedades de composição de momentos e produtos de inércia, basta transportar os produtos de inércia das massas retiradas dos discos C e D até o pólo B. Assim,

$$J_{xz} = -\frac{m}{4}\cdot(-R)\cdot 2L - \frac{m}{4}\cdot(0)\cdot L = \frac{mRL}{2}$$
$$J_{yz} = -\frac{m}{4}\cdot(0)\cdot 2L - \frac{m}{4}\cdot(-R)\cdot L = \frac{mRL}{4}$$
$$\therefore \dot{\vec{H}}_B = -\frac{mRL}{2}\omega^2\vec{j} + \frac{mRL}{4}\omega^2\vec{i}$$

O momento das forças externas em relação ao pólo B é dado por:

$$\vec{M}_B = (A-B)\wedge(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} - mg\vec{j}) + (G_C - B)\wedge\left(-\frac{3mg}{4}\vec{j}\right) + (G_D - B)\wedge\left(-\frac{3mg}{4}\vec{j}\right) \qquad (5)$$

Resolvendo (5) e utilizando (3) tem-se:

$$\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B \qquad (3)$$
$$-J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i} = \left(-3LA_y + \frac{21Lmg}{4}\right)\vec{i} + 3LA_x\vec{j} - \frac{Rmg}{4}\vec{k} \qquad (6)$$

Salienta-se que, na equação (6), o termo final do lado direito corresponde ao efeito estático (pois não depende da rotação $\omega\vec{k}$) do desbalanceamento do disco C. Na prática, portanto, para que a rotação seja mantida constante e o termo envolvendo sua derivada temporal possa ser anulado, é necessária a imposição de um momento externo de mesmo módulo e sentido sempre oposto ao dado pelo termo final da equação (6).

As duas equações escalares oriundas de (6) formam, com as equações (1) e (2) acima, o seguinte sistema de equações:

$$(\vec{i}): A_x - B_x = -\frac{7m}{2}\frac{\omega R^2}{14} = -\frac{m\omega R^2}{4} \qquad (1)$$
$$(\vec{j}): A_y + B_y - \frac{7mg}{2} = -\frac{m\omega R^2}{4} \qquad (2)$$
$$(\vec{i}): \frac{mRL}{4}\omega^2 = -3LA_y + \frac{21Lmg}{4} \qquad (7)$$
$$(\vec{j}): -\frac{mRL}{2}\omega^2 = 3LA_x \qquad (8)$$

Resolvendo o sistema obtém-se:

de (8): $\boxed{A_x = -\frac{mR}{6}\omega^2}$ de (7): $\boxed{A_y = \frac{7mg}{4} - \frac{mR}{12}\omega^2}$

em (1): $\boxed{B_x = +\frac{mR}{12}\omega^2}$ em (2) $\boxed{B_y = \frac{7mg}{4} - \frac{mR}{6}\omega^2}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

(d) Balanceamento (1,0)

Sabe-se apenas que as massas de balanceamento m_1 e m_2 a serem acrescentadas ou retiradas em A e B distam R do eixo de rotação. Suponha-se, então, que a posição angular em relação ao eixo horizontal (x) seja dada pelos ângulos θ e ϕ, respectivamente nos discos A e B. Tem-se as duas condições:

Balanceamento estático

$$\bar{x}_G = 0 \Rightarrow \frac{7m}{2} \cdot \frac{R}{14} + m_1 \cdot R\cos\theta + m_2 R\cos\phi = 0 \quad (1)$$

$$\bar{y}_G = 0 \Rightarrow \frac{7m}{2} \cdot \frac{R}{14} + m_1 \cdot R\mathrm{sen}\theta + m_2 R\mathrm{sen}\phi = 0 \quad (2)$$

Balanceamento dinâmico

$$\bar{J}_{xz} = 0 \Rightarrow \frac{mRL}{2} + m_1 \cdot R\cos\theta \cdot 3L + m_2 R\cos\phi \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

$$\bar{J}_{yz} = 0 \Rightarrow \frac{mRL}{4} + m_1 \cdot R\mathrm{sen}\theta \cdot 3L + m_2 R\mathrm{sen}\phi \cdot 0 = 0 \quad (4)$$

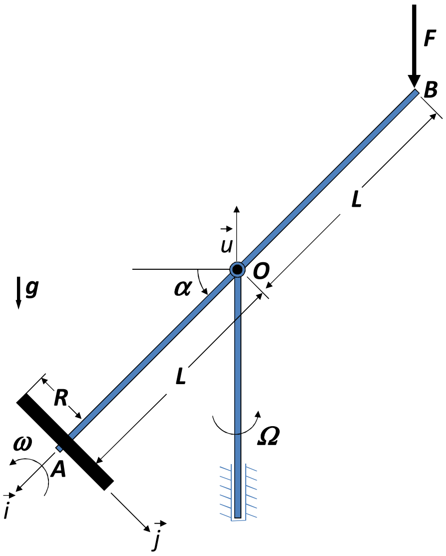
Resolvendo o sistema de equações (1), (2), (3) e (4) chega-se a:

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{\sqrt{5}}{12} m \text{ (massa retirada)} \\ \tan\phi = 2 \Rightarrow m_2 = -\frac{\sqrt{5}}{12} m \text{ (massa retirada)} \end{array}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica



2ª Questão (3,5 pontos)

O disco de centro *A*, massa *m* e raio *R* tem rotação própria $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ dada e executa um movimento de precessão estacionária em torno do eixo vertical. São dados o ângulo $\alpha \neq \pi/2$ e a velocidade angular de precessão $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}$. A base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é solidária ao eixo *AOB*. O vínculo em ***O*** é um pino ideal. As massas de *AOB* e do eixo vertical são desprezíveis. Pedem-se:

a) a velocidade angular absoluta do disco na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

b) o momento angular do disco em relação ao pólo *O*;

c) o valor da força *F* necessária para manter a inclinação α;

d) determinar o valor de *L* para que o valor da força *F* independa do ângulo α.

a) $\boxed{\vec{\omega}_{abs} = (\omega - \Omega \operatorname{sen}\alpha)\vec{i} - \Omega\cos\alpha\,\vec{j}}$ (0,5)

b) $\vec{K}_O = J_x(\omega - \Omega\operatorname{sen}\alpha)\vec{i} - J_y\Omega\cos\alpha\,\vec{j}$; $J_x = \frac{1}{2}mR^2$; $J_y = \frac{1}{4}mR^2 + mL^2$;

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K}_O = \frac{1}{2}mR^2(\omega - \Omega\operatorname{sen}\alpha)\vec{i} - m\left(\frac{1}{4}R^2 + m^2\right)\Omega\cos\alpha\,\vec{j}} \qquad (1,0)$$

c) TMA polo O (fixo): $\vec{M}_O^{ext} = \dot{\vec{K}}_O$

$\vec{M}_O^{ext} = (mg - F)L\cos\alpha\,\vec{k}$;

$\dot{\vec{K}}_O = J_x(\omega - \Omega\operatorname{sen}\alpha)\dot{\vec{i}} - J_y\Omega\cos\alpha\,\dot{\vec{j}}$;

$\vec{\omega}_{base} = -\Omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} - \Omega\cos\alpha\,\vec{j}$;

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{base} \wedge \vec{i} = \Omega\cos\alpha\,\vec{k}$; $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{base} \wedge \vec{j} = -\Omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec{k}$

$$\Rightarrow (mg - F)L\cos\alpha\,\vec{k} = J_x(\omega - \Omega\operatorname{sen}\alpha)\Omega\cos\alpha\,\vec{k} + J_y\Omega^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\,\vec{k} \qquad (1,5)$$

$$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow F = mg - \frac{1}{L}\left[J_x\omega\Omega - (J_x - J_y)\Omega^2\operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{F = mg - \frac{m}{4L}\left[2R^2\omega\Omega - (R^2 - 4L^2)\Omega^2\operatorname{sen}\alpha\right]}$$

d) $J_x = J_y \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{4}mR^2 + mL^2 \Rightarrow \boxed{L = \frac{R}{2}}$ (0,5)

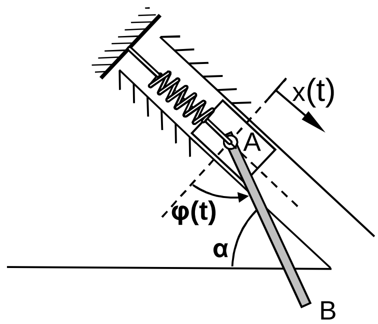
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

No EMSC#1, solicitou-se a modelagem e simulação do sistema mostrado ao lado, composto por um bloco **A** de massa *M*, uma barra homogênea **AB** de massa *m* e comprimento L, e uma mola de rigidez *k*. A inclinação da rampa é fixa, dada pelo ângulo α. A coordenada x(t) descreve o deslocamento do bloco a partir da posição indeformada da mola. Desprezam-se atritos de qualquer espécie. Solicita-se:



a) exprimir a coordenada x_e, de equilíbrio do sistema em repouso, em função dos parâmetros acima;
b) calcular a aceleração do baricentro da barra;
c) obter as equações do TMB e do TMA (pólo A) para a barra **AB**;
d) descreva, sucintamente, como você modelou este sistema no Scilab.

a) $\boxed{x_e = \dfrac{(m+M)g\,sen\,\alpha}{K}}$ (0,2)

b) $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-A)]$; $\vec{a}_A = \ddot{x}\vec{i}$; $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$; $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{k}$; $(G-A) = \dfrac{L}{2}(\text{sen}\,\varphi\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \left[\ddot{x} + \dfrac{L}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\varphi)\right]\vec{i} + \dfrac{L}{2}(\ddot{\varphi}\text{sen}\,\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{j}}$ (0,3)

c)TMB: sendo X_A e Y_A as reações em A $\Rightarrow \boxed{X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} = m\vec{a}_G}$ (0,5)

TMA polo A (acelerado): $\vec{M}_A^{ext} = m(G-A) \wedge \vec{a}_A + J_{AZ}\,\dot{\omega}\vec{k}$

$$mg\frac{L}{2}\text{sen}(\alpha-\varphi)\vec{k} = m\frac{L}{2}(\text{sen}\,\varphi\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}) \wedge \ddot{x}\vec{i} + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi}\vec{k}$$

$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi\,\ddot{x} + \dfrac{2}{3}L\ddot{\varphi} = g\,\text{sen}(\alpha-\varphi)}$ (0,5)

d) (1,5)