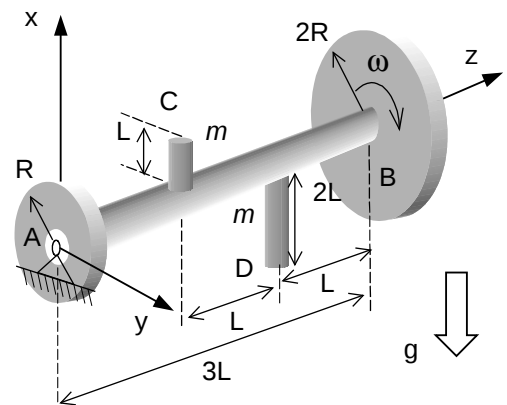




PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 10 de abril de 2012  
 Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3 pontos)

Originalmente o conjunto rígido formado por um eixo e dois discos (sem as hastes) mostrado na figura tem massa total  $6m$ , seu centro de massa encontra-se em  $x_G=0; y_G=0; z_G=2L$ , e gira em torno do eixo  $z$  com velocidade angular constante  $\omega$ . O eixo de comprimento  $3L$  é apoiado na articulação  $A$  e no anel  $B$ . O disco em  $A$  tem raio  $R$  e o disco em  $B$  tem raio  $2R$ . Ao conjunto foram adicionadas uma haste  $C$  de comprimento  $L$  e massa  $m$  e outra haste  $D$  de comprimento  $2L$  e massa  $m$ , ambas alinhadas com o eixo  $x$  e nas posições mostradas na figura. Considerando o sistema de coordenadas  $Axyz$  solidário ao corpo, pede-se:



a) determinar a posição do baricentro do conjunto com as hastes; (0,5)

A massa total  $m^t$  é  $8m$ . Da definição de baricentro,

$$8m(G - O) = 6m(2L\vec{k}) + m_1(L/2\vec{i} + L\vec{k}) + m_2(-L\vec{i} + 2L\vec{k})$$

e portanto,

$$G - O = \frac{15}{8}\vec{k} - \frac{1}{16}L\vec{i}$$

b) calcular os produtos de inércia; (1,0)

Os produtos de inércia  $J_{xy}$  e  $J_{zy}$  são nulos. Já o produto de inércia  $J_{xz}$  não será nulo,

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i$$

que para um corpo contínuo,

$$J_{xz} = L \int_0^L \frac{m}{L} x dx + 2L \int_{-2L}^0 \frac{m}{2L} x dx$$

que resulta,

$$J_{xz} = -\frac{3mL^2}{2}$$



c) a localização e os valores de duas massas compensadoras  $m_1 \geq 0$  e  $m_2 \geq 0$  a serem fixadas nas bordas dos discos A e B, respectivamente, para balancear o conjunto. (1.5)

A localização das massas deve obedecer os critérios  $X_G^t = 0$ ,  $Y_G^t = 0$ ,  $J_{xz}^t = 0$  e  $J_{yz}^t = 0$ , onde o superescrito significa total, ou seja, incluindo as massas  $m_1$  e  $m_2$ .

Da definição de baricentro,

$$(m_1 + m_2 + 8m)(G^t - O) = 8mL \left( \frac{-1}{16} \vec{i} + \frac{15}{16} \vec{k} \right) + m_1(-R)\vec{i} + m_2(2R)\vec{i} + m_2(3L)\vec{k}$$

que, na direção  $i$ , implica,

$$R(2m_2 - m_1) = \frac{mL}{2}.$$

Do critério  $J_{xz}^t = 0$  decorre,

$$J_{xz}^t = J_{xz} + m_1(-R)(0) + m_2(2R)(3L)$$

que resulta,

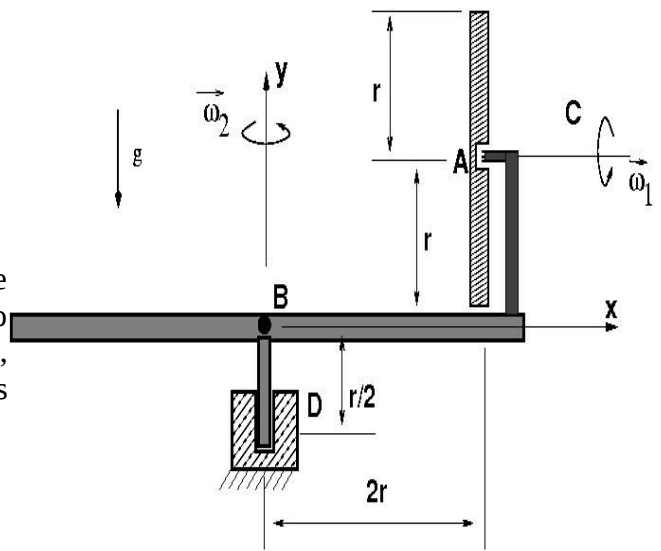
$$m_2 = \frac{mL}{4R}$$

que, ao ser introduzida na equação do baricentro, produz

$$m_1 = 0$$

### 2ª Questão (4 pontos)

Considere um disco de centro A, raio  $r$  e massa  $m$  e um disco com centro B, raio  $2r$  e massa  $M$ . Eles são sustentados pelos mancais C e D, respectivamente, conforme a figura. O mancal C permite apenas





rotação na direção  $Ax$ . O mancal D permite apenas rotação na direção  $By$ . O disco A gira com velocidade angular de módulo constante  $\omega_1$  em relação ao disco de centro B, e o disco B gira com velocidade angular constante  $\omega_2$  em relação a um referencial inercial, suporte do mancal D. Dadas as dimensões da figura pede-se, expressando os valores em relação ao sistema de coordenadas  $Axyz$ , solidário ao disco de centro B :

(a) a aceleração do ponto A, velocidade angular e aceleração angular do disco de centro A; (0.5)

A aceleração do ponto A pode ser obtida por derivação do vetor posição e resulta

$$a_A = -2r\omega_2^2 \vec{i}$$

O vetor de rotação do ponto A pode ser obtido por composição de movimentos,

$$\vec{\omega}_A = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}$$

e o vetor aceleração angular pode ser obtido por derivação

$$\dot{\vec{\omega}}_A = -\omega_1 \omega_2 \vec{k}$$

(b) o momento da quantidade de movimento do disco A em relação ao seu baricentro; (0.5)

O momento da quantidade de movimento angular do disco A é

$$\vec{H}_A = J_A[\omega]$$

que de forma detalhada é

$$\vec{H}_A = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta expressão resulta,

$$\vec{H}_A = \frac{mR^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \frac{mR^2}{4} \omega_2 \vec{j}$$

(c) as reações vinculares no mancal C, incluindo binários reativos; (1.0)



Do Teorema do Movimento do Baricentro,

$$m\vec{a}_A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} - mg\vec{j}$$

e decorre,

$$A_x = -2rm\omega_2^2$$

e

$$A_y = mg$$

Do Teorema do Momento Angular,

$$M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mR^2}{2}\omega_1\vec{i} + \frac{mR^2}{4}\omega_2\vec{j} \right)$$

resulta  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$  e

$$M_z = -\frac{mR^2}{2}\omega_1\omega_2$$

(d) o momento da quantidade de movimento do disco B em relação ao seu baricentro, desprezando a inércia do mancal C; (0.5)

O momento da quantidade de movimento angular do disco B é

$$\vec{H}_B = J_B[\omega]$$

que de forma detalhada é

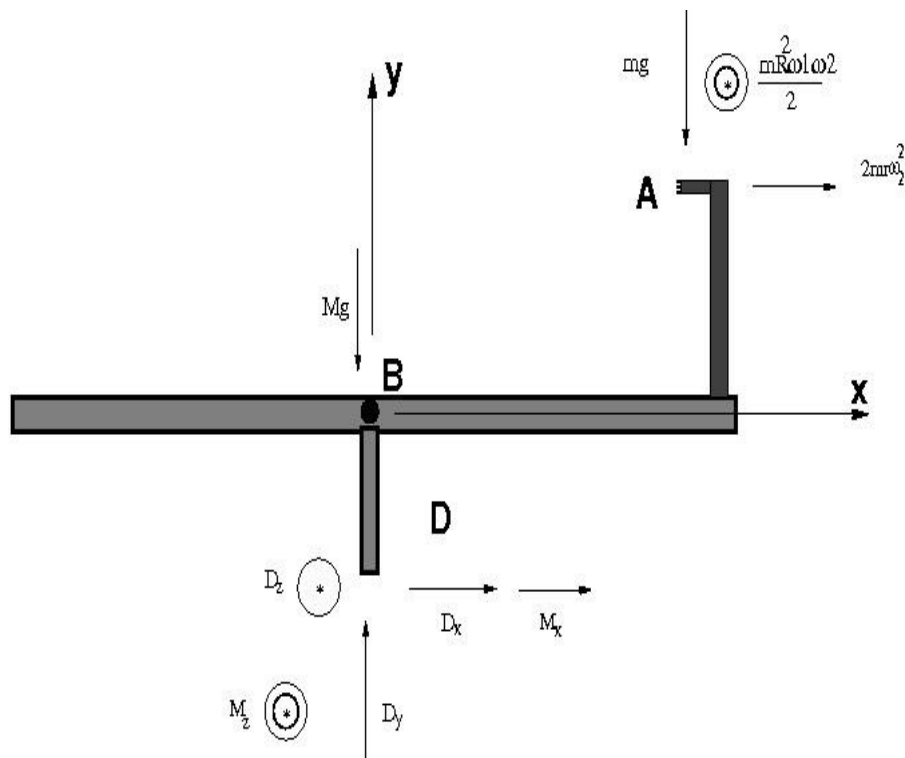
$$\vec{H}_B = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4r^2 M}{2}\omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $I = m4r^2/4$  e  $J = m4r^2/2$ . Resulta,

$$\vec{H}_B = 2rM\omega_2\vec{j}$$



(e) o diagrama de corpo livre (forças e momentos) do disco com centro B; (0,5)



(f) as reações vinculares no mancal D. (1.0)

A partir do Teorema do Momento Angular podemos determinar os binários vinculares no mancal D,

$$M_x^D \vec{i} + \left( M_z^D - 2rmg + \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 - 2r^2 m \omega_2^2 \right) \vec{k} = \vec{0}$$



na direção  $\vec{i}$ ,

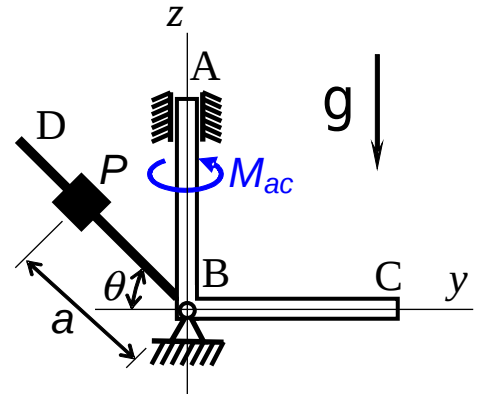
$$M_x^D = 0$$

e na direção  $\vec{k}$

$$M_z^D = 2rmg - \frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2 + 2r^2m\omega_2^2$$

### 3ª Questão (3 pontos) - Baseada no EMSC#1

No sistema mostrado na figura ao lado, a barra  $ABC$  tem diâmetro desprezível e os trechos  $AB$  e  $BC$  têm massa  $m$  e comprimento  $L$ . Ao longo da barra  $BD$ , de massa desprezível, pode-se fixar a posição  $P$  de uma partícula de massa concentrada de valor  $2m$ , definida pelo ângulo  $\theta$  constante e pela distância  $a$  ao ponto  $B$ . O sistema pode girar em torno do eixo  $z$  com vetor de rotação  $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi} \vec{k}$  e pode sofrer a ação de um momento externo  $\vec{M}_{ac} = (T_o - C\dot{\phi}) \vec{k}$ . Na solução do EMSC 1, solicitou-se considerar o sistema de coordenadas  $Bxyz$ , solidário à barra  $ABC$ . Considerando a solução dos itens em cada uma das partes do exercício, pede-se:



- Escreva a equação diferencial de movimento para o grau de liberdade,  $\phi$  ou seja,  $\phi = \phi(t)$ . Indique qual foi o teorema usado na obtenção da equação, bem como em qual direção ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) a equação vetorial foi projetada para originar  $\phi = \phi(t)$ .
- Considerando as simulações com condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = -8$  rad/s, esboce um gráfico da variação da reação  $Y_A$  (paralela a  $y$  no ponto  $A$ ) ao longo dos 10 segundos de simulação.
- Para as condições do item anterior, descreva como seria a variação temporal das reações vinculares caso estivessem expressas em relação a sistema de coordenadas solidário ao referencial fixo.
- Esboce o gráfico da variação das reações vinculares no ponto  $A$  para as simulações feitas na Parte 4 do exercício, ou seja,  $T_o = 0$ ;  $C = 0$  e  $\dot{\phi}(0)$  variando entre 0.5 e 4 rad/s.

### Resolução da 3ª questão:

- O Teorema do Momento Angular TMA para o problema do EMSC #1 pode ser equacionado na forma



$$\frac{d}{dt}([I_B]\{\vec{\omega}\}) + m(G - B) \wedge \vec{a}_B = \vec{M}_B, \text{ onde}$$

$$a_B = 0 \quad e \quad [I_B]\{\omega\} = -J_{xz}\dot{\phi} i - J_{yz}\dot{\phi} j + J_z\dot{\phi} k$$

Fazendo-se a derivada em relação ao tempo e substituindo os termos referentes a  $M_B$ , tem-se:

$$\begin{cases} -J_{xz}\ddot{\phi} + J_{yz}\dot{\phi}^2 = -\frac{mgl}{2} + 2mga \cos \theta - Y_A L \\ -J_{yz}\ddot{\phi} - J_{xz}\dot{\phi}^2 = X_A L \\ J_z\ddot{\phi} = M_{AC} = T_o - C\dot{\phi} \end{cases}$$

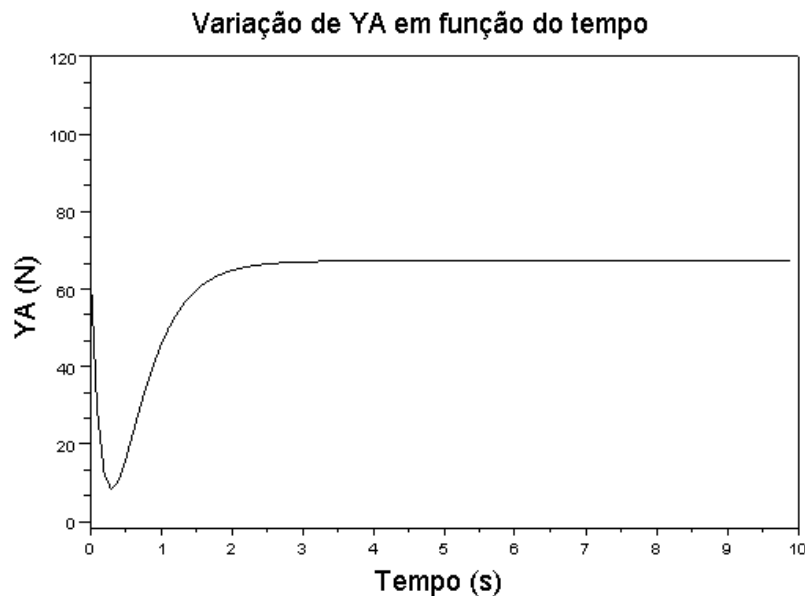
0,5

A equação diferencial de movimento  $\phi = \phi(t)$  é  $J_z\ddot{\phi} = T_o - C\dot{\phi}$  e foi obtida pela projeção do

TMA na direção z. Pelos cálculos,  $J_z = \frac{mL^2}{3} + 2ma^2 \cos^2 \theta$

0,5

(b) Gráfico da variação de  $Y_A$  em função do tempo:

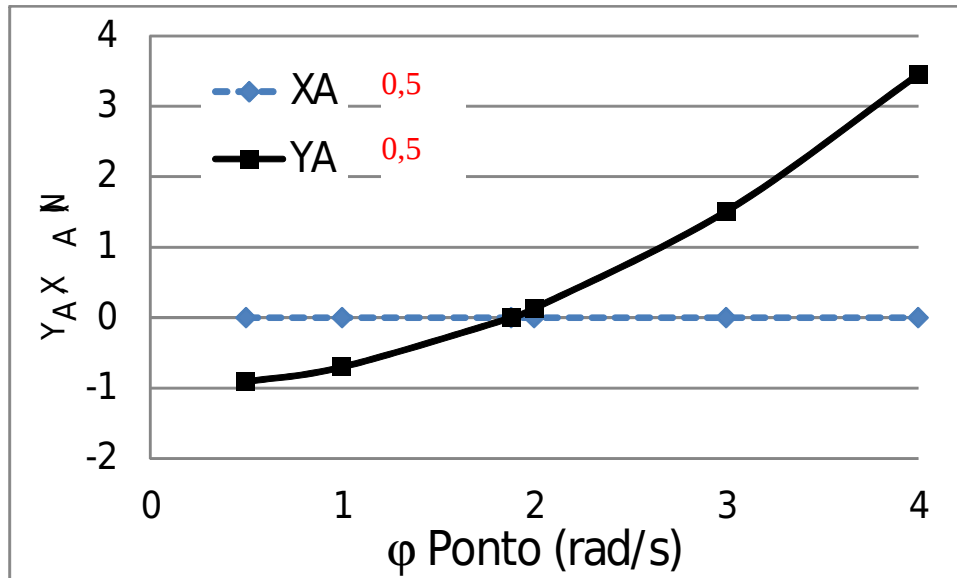


0,5

(c) A variação temporal das reações vinculares, caso estivessem expressas em relação a sistema de coordenadas solidário ao referencial fixo, dada pela projeção das reações expressas no sistema de coordenadas solidário ao corpo sobre o sistema de coordenadas fixo. Em função da rotação do corpo, definida pela variação do ângulo  $\phi$ , a variação das reações expressas no sistema fixo se daria de forma senoidal.



(d) Gráfico das variações de  $X_A$  e  $Y_A$  quando  $\dot{\varphi}(0)$  é variado entre 0.5 e 4 rad/s:

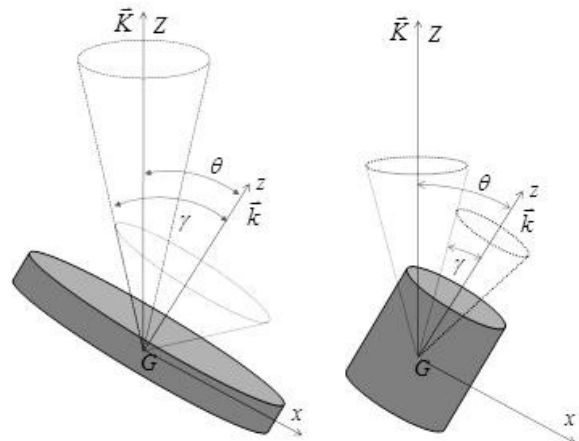


**4ª Questão (1.0 ponto)**

Considere dois corpos de revolução em movimento livre de forças externas, exceto as de origem gravitacional, conforme esquematizado nas duas figuras abaixo. Nelas são mostrados os cones ‘fixo’ e ‘do corpo’ (ou ‘base’ e ‘rolante’). Os eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$  são orientados pelos versores  $\bar{k}$  e  $\bar{K}$ . Nas duas situações, os ângulos formados entre o eixo de precessão e o de rotação própria são inferiores a  $\pi/2$ . Sejam:  $J_i; i=1,2$  os momentos centrais de inércia em torno dos respectivos eixos de revolução  $(Gz)$  e  $I_i; i=1,2$  os dois outros momentos centrais de inércia, em torno dos respectivos eixos  $(Gx)$  ou  $(Gy)$ . Sejam, também,  $H_{G_i}; i=1,2$  os respectivos vetores de momento angular, medidos em relação aos correspondentes centros de massa. Considere que a precessão seja estacionária, com  $\omega_{p_i}; i=1,2$  e  $\omega_{r_i}; i=1,2$  as respectivas taxas de precessão e de rotação própria, de tal sorte que vale a equação de equilíbrio  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i\omega_{r_i} \sin \theta_i = 0; i=1,2$ .

Justificando suas respostas, pede-se, para os dois casos estudados:

- (a) O que se pode afirmar acerca da variação temporal dos vetores de momento angular?
- (b) Indicar, graficamente, os respectivos vetores de rotação e suas decomposições nos eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$ .
- (c) Classificar, a rotação própria como *direta* ou *retrógrada* com respeito à precessão.



(Corpo 1:  $J_1 > I_1$ )

(Corpo 2:  $J_2 < I_2$ )





**Resolução da 4ª questão:**

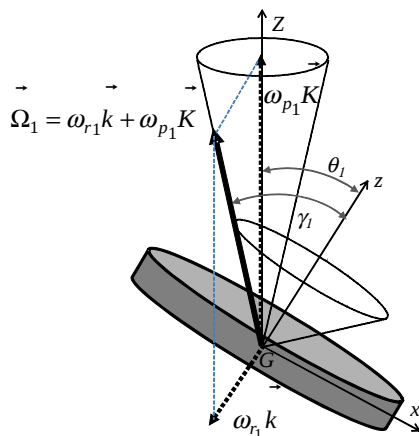
**( 1.0 )**

(a) O que se pode afirmar acerca da variação temporal dos vetores de momento angular?

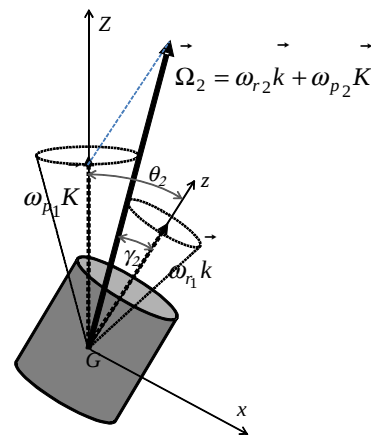
R: Os dois corpos executam movimentos livres de forças, com eventual exceção de forças de natureza gravitacional. Desta forma o momento das forças calculado em relação ao respectivo centro de massa é nulo. Assim, do ‘Teorema do Momento Angular’ pode-se afirmar que os respectivos vetores de ‘Momento Angular’,  $H_{G_i}$ ;  $i=1,2$ , são invariantes. Ou seja o ‘Momento Angular’ é conservado.

(b) Indicar, graficamente, os respectivos vetores de rotação e suas decomposições nos eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$ .

R: Os respectivos vetores de rotação,  $\Omega_i = \omega_{r_i}k + \omega_{p_i}K = -\omega_{p_i} \text{sen } \theta_i i + (\omega_{r_i} + \omega_{p_i} \cos \theta_i)k$ ;  $i=1,2$ , estão indicados abaixo, com suas correspondentes decomposições. Notar que o vetor de rotação tem a direção instantânea coincidente com a da ‘aresta de contato’ entre o ‘cone espacial’ e o ‘cone do corpo’. Ou seja, em precessão estacionária livre, pode-se imaginar o movimento do corpo como aquele decorrente da rotação, sem escorregamento, do cone do corpo sobre a superfície do cone fixo. O ‘cone do corpo’ é o lugar geométrico do vetor de rotação visto do referencial do corpo, enquanto que o ‘cone espacial’ é o lugar geométrico do vetor de rotação visto do referencial “fixo”.



(Corpo 1:  $J_1 > I_1$ )



(Corpo 2:  $J_2 < I_2$ )



(c) Classificar, a rotação própria como *direta* ou *retrógrada* com respeito à precessão.

R: Da equação de equilíbrio,  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i \omega_{r_i} \omega_{p_i} \sin \theta_i = 0$ , é imediato verificar, para  $\omega_{p_i} \sin \theta_i \neq 0$ , que  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i \omega_{r_i} = 0$ . Ou seja,  $\omega_{r_i} = -\frac{(J_i - I_i)}{J_i} \omega_{p_i} \cos \theta_i$ . Em ambos os casos  $0 < \theta_i < \pi/2$ , de tal forma que  $0 < \cos \theta_i < 1$ . No caso do corpo 1 ('oblato'),  $J_1 > I_1$ . Ou seja, as taxas de precessão e rotação própria têm sinais opostos e a rotação própria é, portanto, dita '*retrógrada*' com respeito à precessão. O contrário ocorre no caso do corpo 2 ('prolato') e a rotação própria é denominada '*direta*'. Os diagramas do item (b) permitem visualizar tais assertivas.