ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

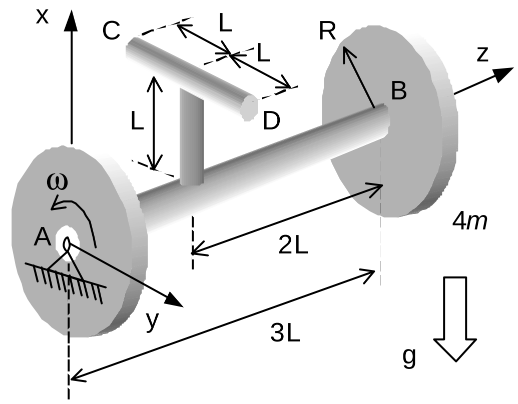
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 8 de Abril de 2008

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

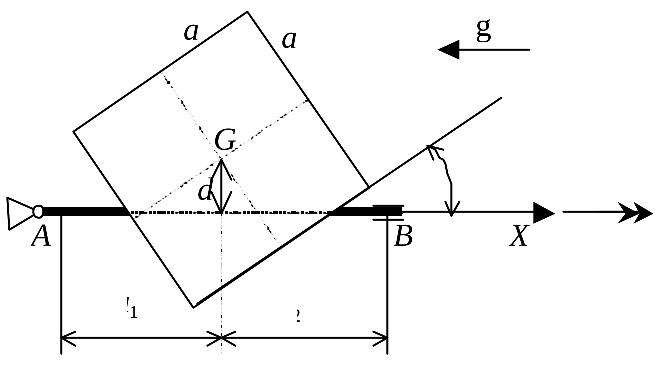
O eixo de comprimento 3***L*** é apoiado na articulação ***A*** e no anel ***B***. O eixo tem massa 3***m*** e possui dois discos de raio ***R*** e massa 4***m*** em cada extremidade. O eixo possui ainda uma haste no formato ***T*** formada por um segmento reto vertical de comprimento ***L*** e massa ***m*** e outro segmento ***CD*** alinhado com o eixo ***y*** de comprimento 2***L*** e massa 2***m***. O sistema gira em torno do eixo ***z*** com velocidade angular constante w. Considerando o referencial ***Axyz*** solidário ao corpo, pede-se determinar:



a) a posição do baricentro do conjunto;
b) os produtos de inércia e o momento de inércia em relação ao eixo ***z***;
c) a localização e os valores de duas massas compensadoras $\boldsymbol{m}_1$ e $\boldsymbol{m}_2$ fixadas na parte externa dos discos, suficientes para balancear o sistema.

2ª Questão (3,0 pontos)

A figura mostra uma placa homogênea quadrada de massa ***m*** e lado 2***a*** que gira ao redor do eixo *X* com velocidade angular w constante; são conhecidos o ângulo a e as distâncias ***d***, l_1 e l_2. Considere que a aceleração da gravidade atua na direção do eixo *X* e calcule as reações na articulação ***A*** e no anel ***B***.

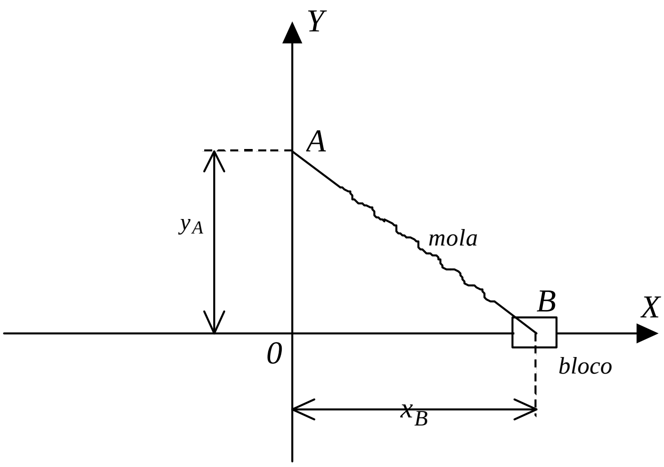


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos) A figura mostra um bloco de massa ***m*** que desliza sem atrito sobre uma guia horizontal preso à extremidade de uma mola linear de comprimento natural $\boldsymbol{L_O}$ e constante elástica ***K***. A outra extremidade da mola percorre uma guia vertical sujeita a um movimento descrito pela equação $y_A = \bar{y}_A + \tilde{y}_A$, onde $\bar{y}_A$ é uma constante e $\tilde{y}_A$ é uma função do tempo a ser definida.

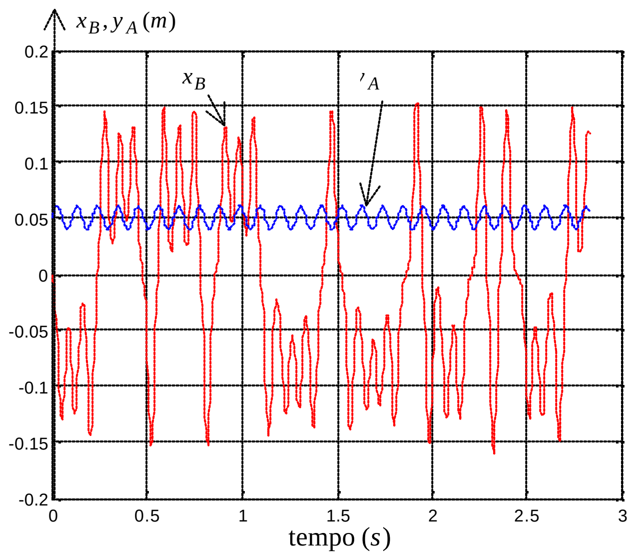


1) Deduza a equação diferencial do movimento do bloco em função de m, L_O, K, $\bar{y}_A$ e $\tilde{y}_A$ e também a expressão da reação exercida pela guia sobre o bloco.

2) Foram realizadas simulações adotando o conjunto de parâmetros $x_B(0) = 0$, $\bar{y}_A = 1.5L_0$ e $\tilde{y}_A = 0$ (constante), juntamente com diferentes valores de $\dot{x}_B(0)$: $\dot{x}_B(0) = -0.5, -1.0, -5.0, -10.0$ e -15.0 m/s. Como variou a freqüência das oscilações em função de $\dot{x}_B(0)$?

3) Foram realizadas simulações considerando o conjunto de parâmetros $x_B(0) = 0$, $\dot{x}_B(0) = -1.0$ m/s, $\bar{y}_A = 1.5\,L_0$ e $\tilde{y}_A = Y_A\,sen(w_A t + j_0)$ com $j_0 = 0$; foi atribuído um determinado valor para w_A e foram adotados diferentes valores para Y_A: $Y_A = 0.1L_O$, $Y_A = 0.3L_O$ e $Y_A = 0.5\,L_O$. Como variou a freqüência das oscilações em função de Y_A? O que foi observado ao comparar a freqüência das oscilações com o valor de w_A?

4) Em quais situações foram obtidos resultados análogos aos mostrados na figura ao lado?



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

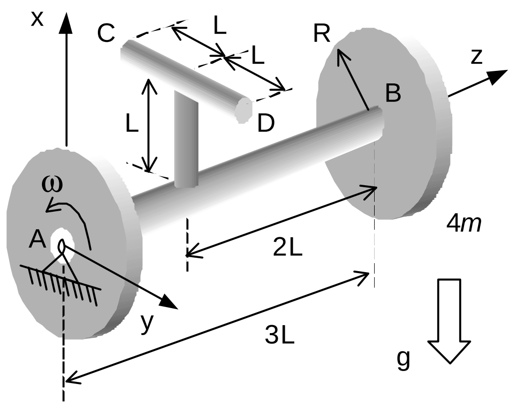
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – Resolução - 08/04/2008

Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)

O eixo de comprimento 3***L*** é apoiado na articulação ***A*** e no anel ***B***. O eixo tem massa 3***m*** e possui dois discos de raio ***R*** e massa 4***m*** em cada extremidade. O eixo possui ainda uma haste no formato ***T*** formada por um segmento reto vertical de comprimento ***L*** e massa ***m*** e outro segmento ***CD*** alinhado com o eixo ***y*** de comprimento 2***L*** e massa 2***m***. O sistema gira em torno do eixo ***z*** com velocidade angular constante w. Considerando o referencial ***Axyz*** solidário ao corpo, pede-se determinar:



a) a posição do baricentro do conjunto; massa total: $M = 14m$

$$x_G = (m(L/2) + 2m(L))/14m = \frac{5}{28}L; \qquad y_G = 0$$

$$z_G = (4m(0) + 3m(3L/2) + m(L) + 2m(L) + 4m(3L))/14m = \frac{39}{28}L \qquad \boxed{G = (5L/28,\ 0,\ 39L/28)}$$

(0,5)

b) os produtos de inércia e o momento de inércia em relação ao eixo ***z***;

$$J_{xz} = m(L)(L/2) + 2m(L)(L) = \frac{5}{2}mL^2; \qquad \boxed{J_{xy} = 0} \qquad \boxed{J_{yz} = 0} \qquad \boxed{J_{xz} = \frac{5}{2}mL^2} \quad (1,0)$$

considerando os eixos esbeltos:

$$J_z = 4mR^2/2 + mL^2/3 + (2m(2L)^2/12 + 2mL^2) + 4mR^2/2 \qquad \boxed{J_z = m(4R^2 + 3L^2)} \quad (0,5)$$

c) a localização e os valores de duas massas compensadoras $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$ fixadas na parte externa dos discos, suficientes para balancear o sistema.

Posições das massas: $\boldsymbol{m_1}$ (-*R*, 0, 0); $\boldsymbol{m_2}$ (-*R*, 0, 3*L*);

$J'xz = Jxz + m_1(-R)(0) + m_2(-R)(3L) = 0$ (0,5) $\rightarrow$ $\boxed{m_2 = \frac{5}{6}\frac{mL}{R}}$ em (-*R*, 0, 3*L*);

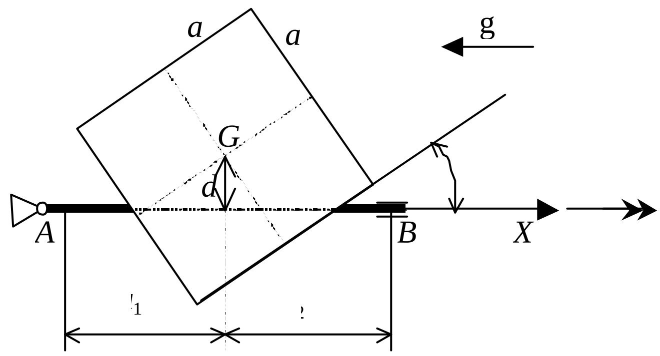
$M x_G + m_1(-R) + m_2(-R) = 0$ (0,5) $\rightarrow$ $\boxed{m_1 = \frac{5}{3}\frac{mL}{R}}$ em (-*R*, 0, 0). (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

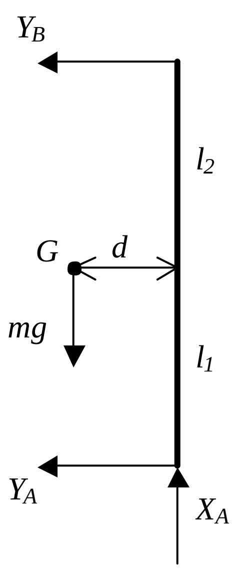
Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos)



A figura mostra uma placa homogênea quadrada de massa ***m*** e lado *2**a*** que gira ao redor do eixo *X* com velocidade angular w constante; são conhecidos o ângulo a e as distâncias ***d***, l_1 e l_2 . Considere que a aceleração da gravidade atua na direção do eixo *X* e calcule as reações na articulação ***A*** e no anel ***B***.

Resolução:

DCL



Aplicando o teorema do movimento do centro de massa:

$$\begin{cases} X_A = mg & (1) \\ -mw^2 d = Y_A + Y_B & (2) \end{cases}$$ (0.5)

Aplicando o teorema do momento angular:

$$\left\{\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}\right\}[J]_G \begin{Bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{M}_G$$ (0.5)

Como a placa é quadrada, a sua matriz de inércia $[J]_G$ é diagonal (0.5) e não varia em função de a; sendo $\vec{i}$ o versor de um eixo paralelo a *X* e solidário à placa, resulta $\dot{\vec{i}} = \vec{0}$, de modo que $\vec{M}_G = \vec{0}$ (0.5) ; portanto

$$X_A d + Y_B l_2 - Y_A l_1 = 0 \qquad (3)$$ (0.5)

Resolvendo as equações (1), (2) e (3) obtém-se:

$$Y_A = \frac{md(g - w^2 l_2)}{l_1 + l_2}; \quad Y_B = \frac{-md(g + w^2 l_2)}{l_1 + l_2}$$ (0.5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

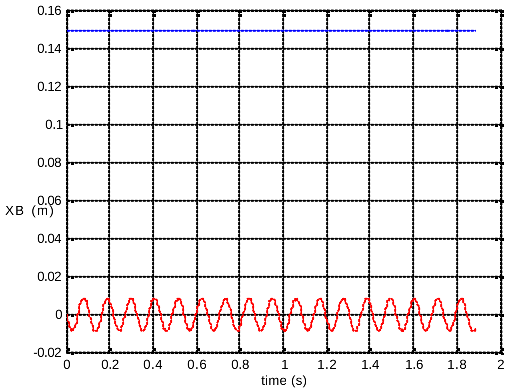
Resolução da 3ª Questão (3,5 pontos)

1) Equação diferencial do movimento do bloco: $\ddot{x}_B = \dfrac{-\dfrac{K}{m}\left\{\left[x_B^2+(\bar{y}_A+\tilde{y}_A)^2\right]^{0.5}-L_0\right\}x_B}{\left[x_B^2+(\bar{y}_A+\tilde{y}_A)^2\right]^{0.5}}$; (0.3)

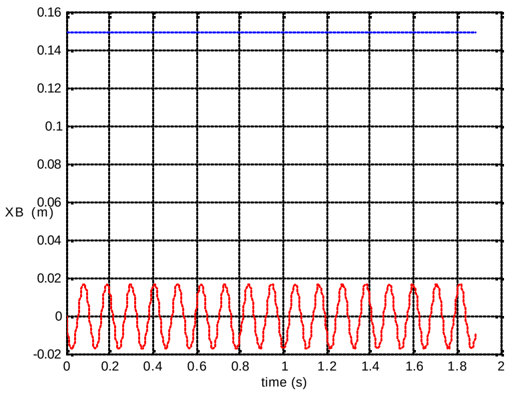
Reação da guia sobre o bloco: $R_Y = \dfrac{-K\left\{\left[x_B^2+(\bar{y}_A+\tilde{y}_A)^2\right]^{0.5}-L_0\right\}y_A}{\left[x_B^2+(\bar{y}_A+\tilde{y}_A)^2\right]^{0.5}}$. (0.2)

2) Considerando $x_B(0)=0$, $\bar{y}_A = 1.5L_0$ e $\tilde{y}_A = 0$ (constante), juntamente com os seguintes valores de $\dot{x}_B(0)$: $\dot{x}_B(0) = -0.5, -1.0, -5.0, -10.0$ e -15.0 m/s, resultam os seguintes gráficos de $x_B(t)$:

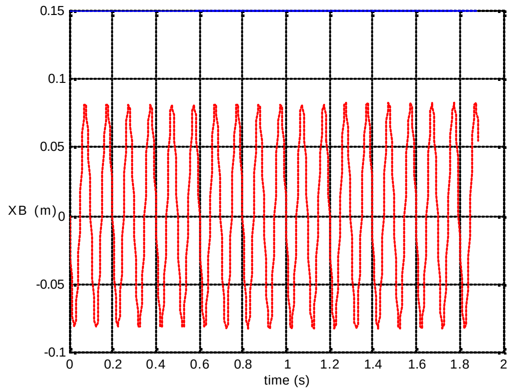
$\dot{x}_B(0) = -0.5$ m/s



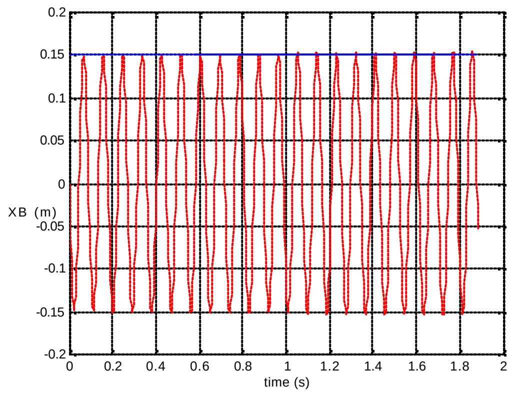
$\dot{x}_B(0) = -1.0$ m/s



$\dot{x}_B(0) = -5.0$ m/s



$\dot{x}_B(0) = -10.0$ m/s

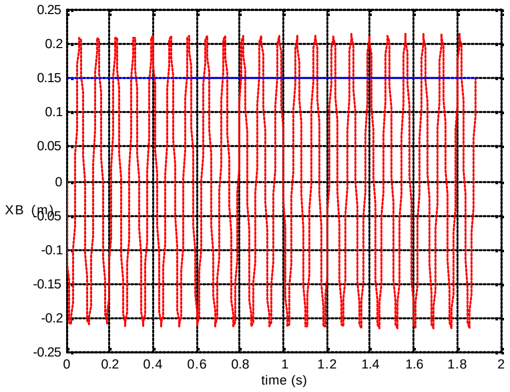


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

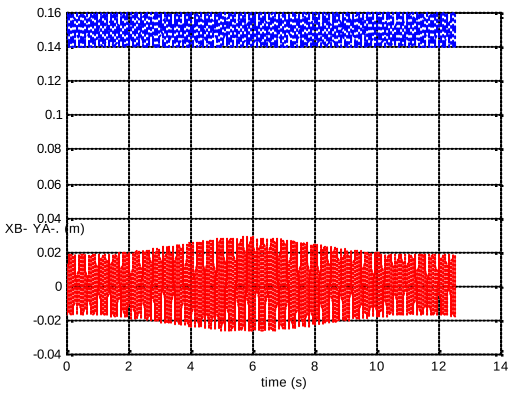
$\dot{x}_B(0) = -15.0$ m/s



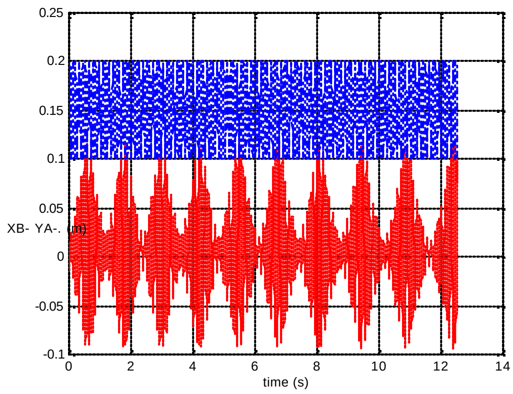
Observa-se que o número de ciclos, e, portanto, a freqüência das oscilações aumentou em função de $|\dot{x}_B(0)|$. (1.0)

3) Considerando o conjunto de parâmetros $x_B(0) = 0$, $\dot{x}_B(0) = -1.0$ m/s, $\bar{y}_A = 1.5\,L_0$ e $\tilde{y}_A = Y_A\,sen(w_A t + j_0)$ com $j_0 = 0$ e atribuindo para w_A o valor estimado da freqüência das oscilações correspondentes a $\dot{x}_B(0) = -1.0$ m/s no item 2, $w_A \approx 9.221 Hz = 57.935 rad/s$, resultam os seguintes gráficos correspondentes aos diferentes valores de Y_A: $Y_A = 0.1 L_O$, $Y_A = 0.3 L_O$ e $Y_A = 0.5\,L_O$:

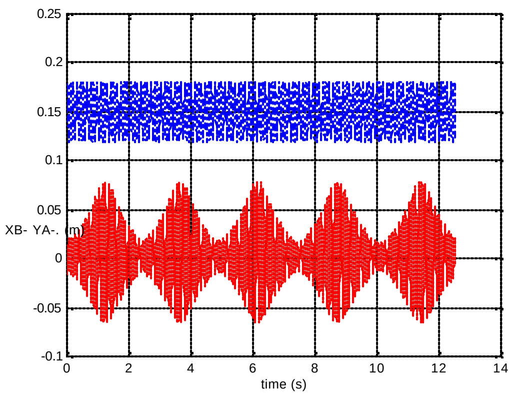
$Y_A = 0.1 L_O$



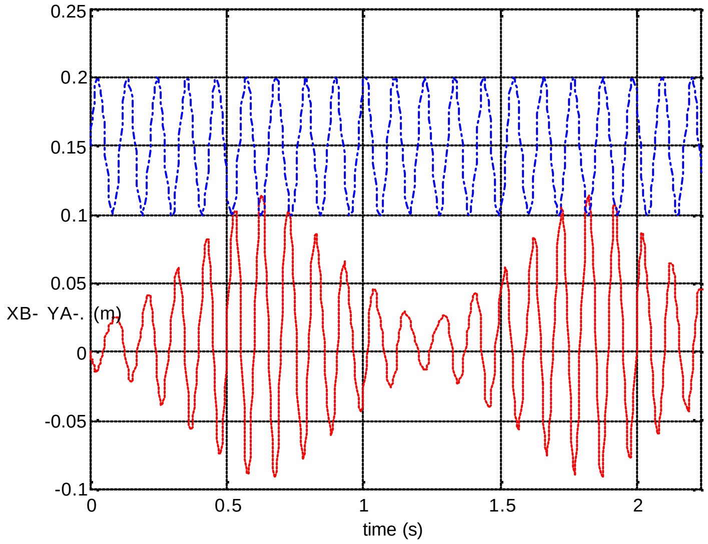
$Y_A = 0.5\,L_O$



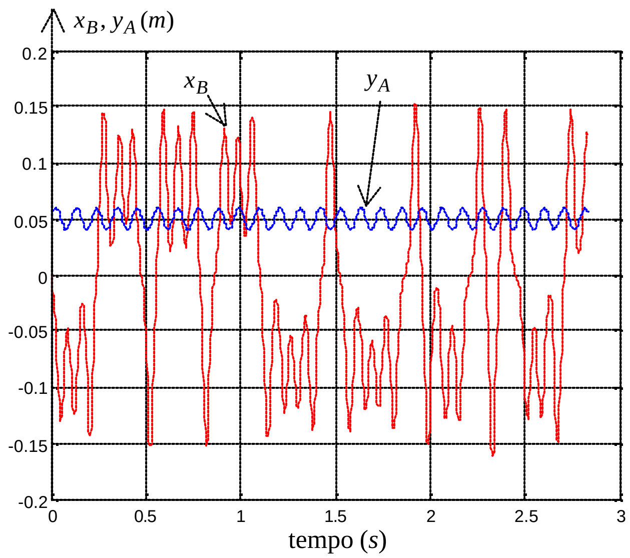
$Y_A = 0.3 L_O$



Independentemente do aspecto do gráfico, é possível observar que a freqüência das oscilações não depende propriamente de Y_A. Reduzindo o intervalo de integração para aproximadamente 2.2 segundos, observa-se que a freqüência das oscilações varia ao longo do tempo, assumindo valores próximos ao valor atribuído a w_A (1.0); as freqüências mais baixas correspondem às amplitudes menores e as freqüências mais altas às amplitudes maiores, conforme exemplificado no gráfico abaixo ($Y_A = 0.5\,L_O$):



4)



O gráfico mostra que a mola está inicialmente comprimida com $\bar{y}_A = 0.5\,L_0$ e que a amplitude das oscilações da extremidade A da mola é $Y_A \approx 0.1 L_O$; observa-se também que $\dot{x}_B(0)$ é negativa. (1.0)