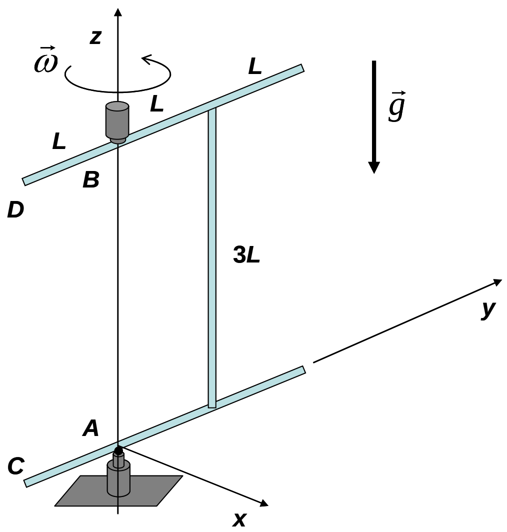
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – 1ª Prova – 10/04/2007 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



1ª Questão (3,0 pontos).

O sistema mostrado na figura, composto por três barras, de massa *m* e comprimento 3*L*, gira em torno do eixo *Az* com rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante.

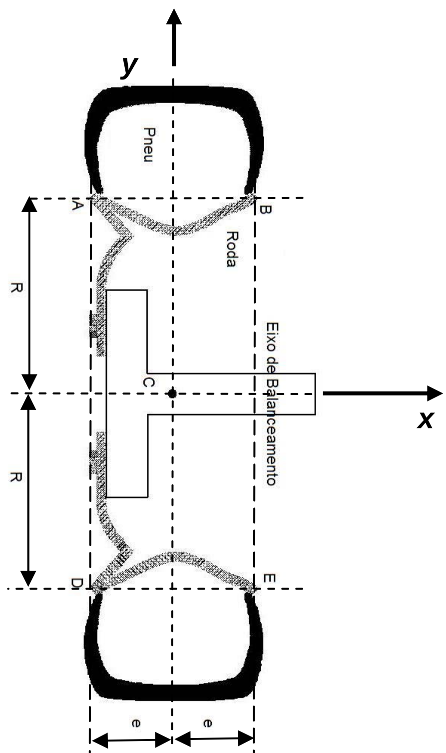
Determine:

a) As reações (X_A, Y_A), na articulação *A* e (X_B, Y_B), no anel *B* (considere o peso);

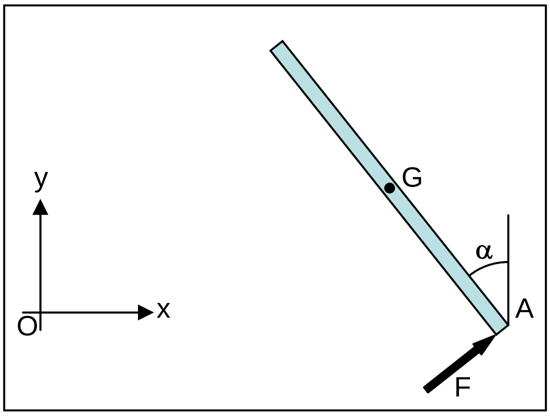
b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos *C* e *D*, respectivamente, necessárias para balancear o sistema.

2ª Questão (3,5 pontos)

Um conjunto roda/pneu, de massa *m*, é preso a uma máquina de balanceamento e posto a girar a uma rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$, mantida constante. O sistema *Oxyz* está fixo no conjunto, que pode ser considerado como corpo rígido. O eixo *x* é horizontal. Sabe-se, que o centro de massa do conjunto roda/pneu está no plano *Cyz*. Admite-se que o torque aplicado ao eixo de rotação varia de forma a se contrapor ao torque ocasionado pela força peso e pelo atrito nos mancais, mantendo a rotação constante. Verifica-se, então, que *as parcelas dinâmicas* (descontados os efeitos da força peso) das forças exercidas *pelo conjunto sobre a máquina* são equivalentes a uma força $\vec{F} = F\vec{j},\ F > 0$, aplicada em *C* e a um binário de momento $\vec{M}_C = M\vec{k},\ M > 0$. Sabe-se também, que $M < Fe$. Pede-se:



a) As coordenadas (y_G, z_G), do centro de massa do conjunto;
b) Os produtos de inércia J_{xy} e J_{xz};
c) Os valores m_1 e m_2 de duas pequenas massas de balanceamento, a serem respectivamente posicionadas nos pontos $D = (-e, -R, 0)$ e $E = (e, -R, 0)$.
d) Qual das duas massas tem maior valor? Ambas tem valor positivo? Justifique.

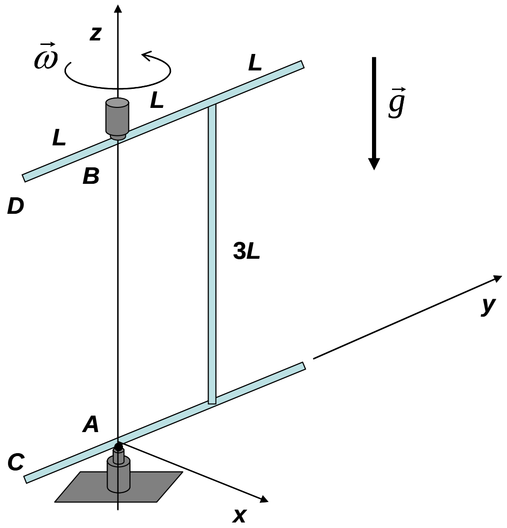


3ª Questão (3,5 pontos)
Considerando o enunciado do EP # 1:

A barra homogênea da figura tem massa m = 0,5 Kg, comprimento L = 2 m e está livre para se deslocar, sem atrito, no plano horizontal. Uma força F, de magnitude constante 1N e direção sempre ortogonal à barra, está aplicada à sua extremidade A. No instante inicial (t = 0) o baricentro G está na origem O do sistema Oxy ($x_G = 0$ e $y_G = 0$), o ângulo α é nulo e a barra se encontra em repouso.

a) Deduza as equações escalares que governam o movimento da barra;
b) Esquematize um diagrama Scicos que contenha apenas a parte necessária para calcular $\alpha(t)$ e apresentar o seu gráfico;
c) Esboce o gráfico de $\alpha(t)$ para $0 \le t \le 4s$;
d) Esboce o gráfico da trajetória de G para $0 \le t \le 4s$;
e) Esboce o gráfico da trajetória de A para $0 \le t \le 4s$;
f) Esboce o gráfico da velocidade escalar do baricentro para $0 \le t \le 4s$;
g) Esboce o gráfico da velocidade escalar do ponto A para $0 \le t \le 4s$.

PME 2200 – MECÂNICA B – 1ª Prova – 10/04/2007 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



1ª Questão (3,0 pontos).

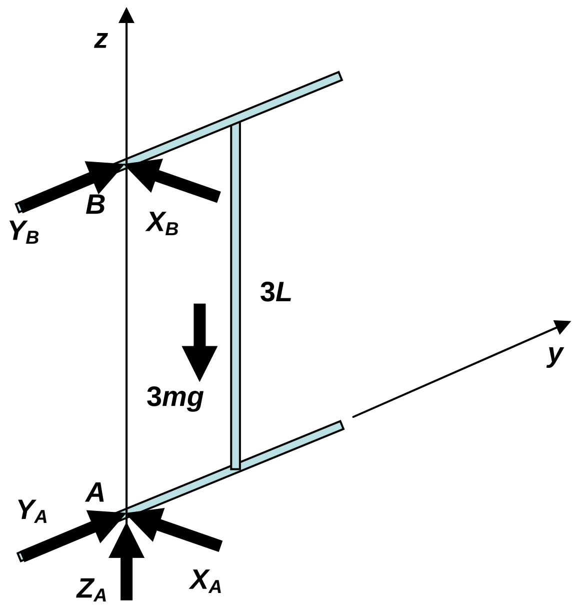
O sistema mostrado na figura, composto por três barras, de massa m e comprimento $3L$, gira em torno do eixo Az com rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante.

Determine:

a) As reações (X_A, Y_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B (considere o peso);
b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos C e D, respectivamente, necessárias para balancear o sistema.

Solução:

a) As reações (X_A, Y_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B (considere o peso):



Posição do baricentro:

$\boxed{x_G = 0}$

$3my_G = mL/2 + mL + mL/2 \Rightarrow \boxed{y_G = 2L/3}$

$\boxed{z_G = 3L/2 \text{ (simetria)}}$

Aceleração do baricentro ($\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante):

$\boxed{\vec{a}_G = -(2L/3)\omega^2\vec{j}}$ (0,5)

TMB:

$-X_A - X_B = 0$

$Y_A + Y_B = 3m\left(-(2L/3)\omega^2\right)$

$\boxed{Z_A = 3mg}$ (0,5)

Momento Angular, pólo A (fixo):

$$\vec{H}_A = [J_A]\{\vec{\omega}\} = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = -J_{xz}\omega\dot{\vec{i}} - J_{yz}\omega\dot{\vec{j}} + J_z\omega\dot{\vec{k}} = -J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i}$$

Mas $\boxed{J_{xz} = 0}$; e $J_{yz} = (J_{yz})_{barra1} + (J_{yz})_{barra2} + (J_{yz})_{barra3} = 0 + (0 + m.L.3L/2) + (0 + m.L/2.3L)$

$\Rightarrow \boxed{J_{yz} = 3mL^2}$ e, portanto, $\boxed{\dot{\vec{H}}_A = 3mL^2\omega^2\vec{i}}$ (0,5)

TMA, pólo *A* (fixo):

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 3mL^2\omega^2 = -Y_B 3L - 3mg.2L/3 \\ 0 = -X_B 3L \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_A = X_B = 0 \\ Y_A = 2mg/3 - mL\omega^2 \\ Y_B = -2mg/3 - mL\omega^2 \end{array}} \qquad (0,5)$$

b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos *C* e *D*, respectivamente, necessárias para balancear o sistema:

m_1 em $(0,-L,0)$ e m_2 em $(0,-L,3L)$

Baricentro na condição balanceada ($y'_G = 0$): $3m.2L/3 - m_1L - m_2L = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m$

Produtos de inércia na condição balanceada nulos: $J'_{yz} = 0 = 3mL^2 + 0 - 3m_2L^2 \Rightarrow m_2 = m$

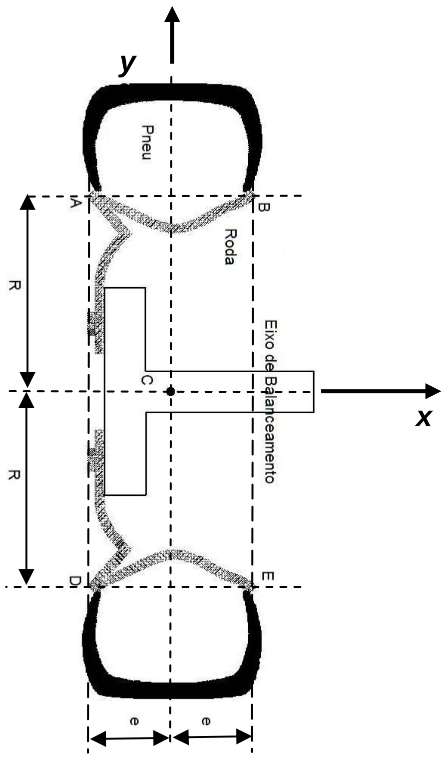
Assim: $\boxed{m_1 = m_2 = m}$. (1,0)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos)

Um conjunto roda/pneu, de massa *m*, é preso a uma máquina de balanceamento e posto a girar a uma rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$, mantida constante. O sistema *Oxyz* está fixo no conjunto, que pode ser considerado como corpo rígido. O eixo *x* é horizontal. Sabe-se, que o centro de massa do conjunto roda/pneu está no plano *Cyz*. Admite-se que o torque aplicado ao eixo de rotação varia de forma a se contrapor ao torque ocasionado pela força peso e pelo atrito nos mancais, mantendo a rotação constante. Verifica-se, então, que *as parcelas dinâmicas* (descontados os efeitos da força peso) das forças exercidas *pelo conjunto sobre a máquina* são equivalentes a uma força $\vec{F} = F\vec{j},\ F > 0$, aplicada em *C* e a um binário de momento $\vec{M}_C = M\vec{k},\ M > 0$. Sabe-se também, que $M < Fe$. Pede-se:



a) As coordenadas (y_G, z_G), do centro de massa do conjunto;
b) Os produtos de inércia J_{xy} e J_{xz};
c) Os valores m_1 e m_2 de duas pequenas massas de balanceamento, a serem respectivamente posicionadas nos pontos $D = (-e, -R, 0)$ e $E = (e, -R, 0)$.
d) Qual das duas massas tem maior valor? Ambas tem valor positivo? Justifique.

Solução:

a) As coordenadas (y_G, z_G), do centro de massa do conjunto:

TMB: $m\vec{a}_G = -F\vec{j}$

(Note que a resultante é igual à parcela dinâmica da força reativa da máquina sobre a roda, pois a parcela estática da reação é o oposto da força peso, que por ela é anulada).

Como neste caso a rotação é constante, $\vec{a}_G = \omega\vec{i} \times \left(\omega\vec{i} \times (x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k})\right)$. Vem, então que

$\boxed{\vec{a}_G = -\omega^2\left(y_G\vec{j} + z_G\vec{k}\right)}$ e, portanto, $-m\omega^2\left(y_G\vec{j} + z_G\vec{k}\right) = -F\vec{j} \Rightarrow \boxed{y_G = F/\left(m\omega^2\right)}$ e $\boxed{z_G = 0}$. (0,5)

(A posição do centro de massa do conjunto será então dada por $(G - C) = F/m\omega^2\ \vec{j}$).

b) Os produtos de inércia J_{xy} e J_{xz}:

Momento Angular do conjunto em relação ao pólo fixo *C*:

$\vec{H}_C = [J_C]\{\vec{\omega}\} = \left(J_{Cx}\vec{i} - J_{Cxy}\vec{j} - J_{Cxz}\vec{k}\right)\omega$.

Como a rotação é constante $\Rightarrow$ $\dot{\vec{H}}_C = \left(-J_{Cxy}\vec{k} + J_{Cxz}\vec{j}\right)\omega^2$. (0,5)

Como é sabido que o centro de massa está no plano *Cyz*, o momento da força peso é nulo em relação a estes eixos. Também é sabido que o torque aplicado ao eixo de rotação varia de forma a se contrapor ao torque ocasionado pela força peso (em torno de *Cx*) e pelo atrito nos mancais, de forma a manter a rotação constante. Assim, do TMA, tomado em relação ao pólo fixo *C*, $\dot{\vec{H}}_C = \vec{M}_C^{ext}$, com $\vec{M}_C^{ext} = -\vec{M}_C = -M\vec{k}$, seguem as equações de equilíbrio dinâmico em torno dos eixos *y* e *z*:

$$J_{Cxz}\omega^2 = 0 \qquad -J_{Cxy}\omega^2 = -M$$

e, portanto, $\boxed{J_{Cxz} = 0}$ e $\boxed{J_{Cxy} = \dfrac{M}{\omega^2}}$ (0,5)

Note que como $M > 0$, então $J_{Cxy} > 0$.

c) Os valores m_1 e m_2 de duas pequenas massas de balanceamento, a serem respectivamente posicionadas nos pontos $D = (-e,-R,0)$ e $E = (e,-R,0)$.

Balanceamento estático:
Com $(x_1, y_1, z_1) = D = (-e,-R,0)$ e $(x_2, y_2, z_2) = E = (e,-R,0)$ e impondo que o centro de massa na condição balanceada esteja posicionado sobre o eixo de rotação *Cx*, ou seja, $(G' - C) = (a,0,0)$, com *a* arbitrário, teremos,

$$mx_G + m_1x_1 + m_2x_2 = (m + m_1 + m_2)a$$
$$my_G + m_1y_1 + m_2y_2 = 0$$
$$mz_G + m_1z_1 + m_2z_2 = 0$$

A primeira equação é irrelevante. A terceira é uma identidade, pois $z_G = z_1 = z_2 = 0$. A segunda envolve duas incógnitas, m_1 e m_2:

$$m_1 + m_2 = \frac{F}{\omega^2 R} \qquad (1)$$ (0,5)

Balanceamento dinâmico:
Na condição balanceada os produtos de inércia devem ser anulados (ou permanecerem nulos). Ou seja, $J'_{Cxy} = m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + J_{Cxy} = 0$ e $J'_{Cxz} = m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 + J_{Cxz} = 0$. A segunda condição fica automaticamente satisfeita, já que $J_{Cxz} = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$. A primeira condição fornece:

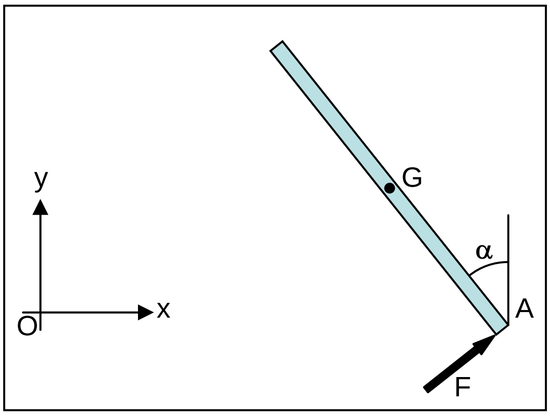
$$m_1 - m_2 = -\frac{M}{e\omega^2 R} \qquad (2)$$ (0,5)

As equações (1) e (2), resolvidas nas incógnitas m_1 e m_2, levam a:

$$\boxed{m_1 = \frac{(Fe - M)}{2eR\omega^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{m_2 = \frac{(Fe + M)}{2eR\omega^2}}$$ (0,5)

d) Qual das duas massas tem maior valor? Ambas tem valor positivo? Justifique.

Como $\boxed{Fe > M > 0}$, então, $\boxed{m_2 > m_1 > 0}$. (0,5)



3ª Questão (3,5 pontos)
Considerando o enunciado do EP # 1:

A barra homogênea da figura tem massa m = 0,5 Kg, comprimento L = 2 m e está livre para se deslocar, sem atrito, no plano horizontal. Uma força F, de magnitude constante 1N e direção sempre ortogonal à barra, está aplicada à sua extremidade A. No instante inicial (t = 0) o baricentro G está na origem O do sistema Oxy ($x_G = 0$ e $y_G = 0$), o ângulo α é nulo e a barra se encontra em repouso.

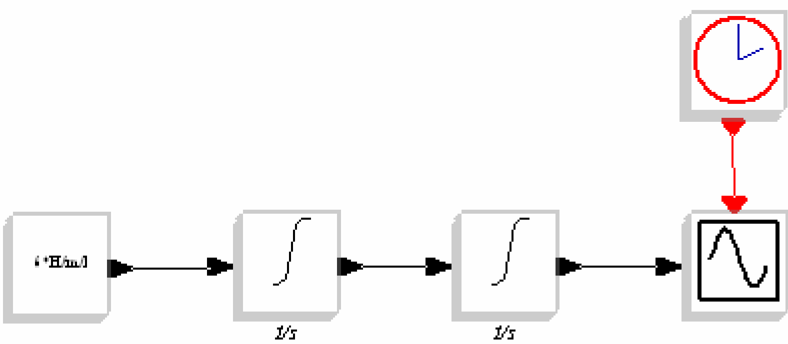
a) Deduza as equações escalares que governam o movimento da barra;
b) Esquematize um diagrama Scicos que contenha apenas a parte necessária para calcular $\alpha(t)$ e apresentar o seu gráfico;
c) Esboce o gráfico de $\alpha(t)$ para $0 \le t \le 4s$;
d) Esboce o gráfico da trajetória de G para $0 \le t \le 4s$;
e) Esboce o gráfico da trajetória de A para $0 \le t \le 4s$;
f) Esboce o gráfico da velocidade escalar do baricentro para $0 \le t \le 4s$;
g) Esboce o gráfico da velocidade escalar do ponto A para $0 \le t \le 4s$.

Solução:

a) Deduza as equações escalares que governam o movimento da barra;

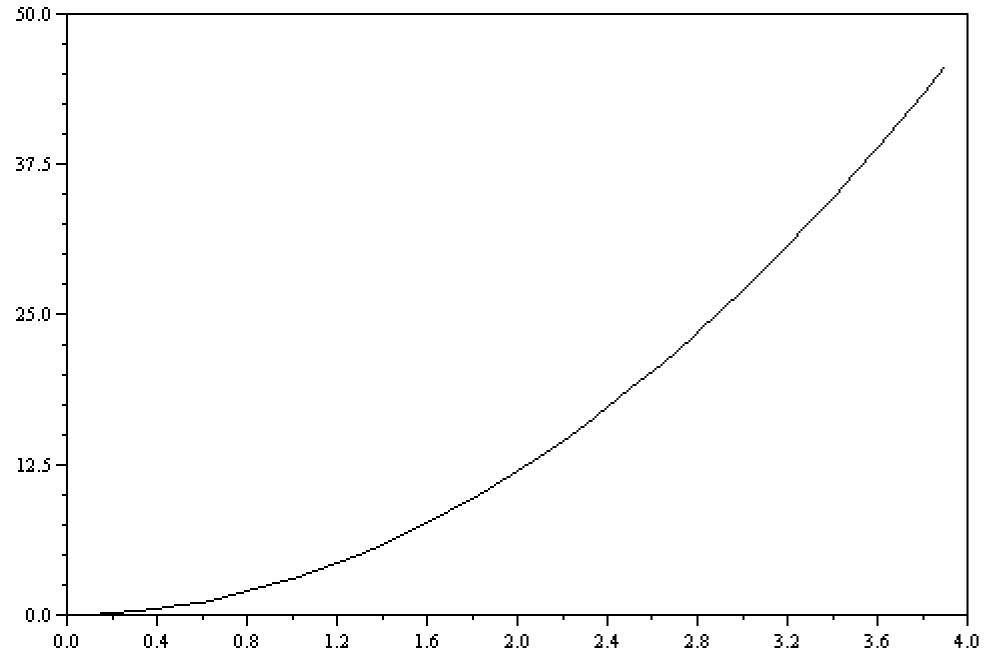
$$\ddot{\alpha} = \frac{6F}{mL} \; ; \; \ddot{x} = \frac{F}{m}\cos\alpha \; ; \; \ddot{y} = \frac{F}{m}\operatorname{sen}\alpha \qquad (0,5)$$

b) Esquematize um diagrama Scicos que contenha apenas a parte necessária para calcular $\alpha(t)$ e apresentar o seu gráfico;



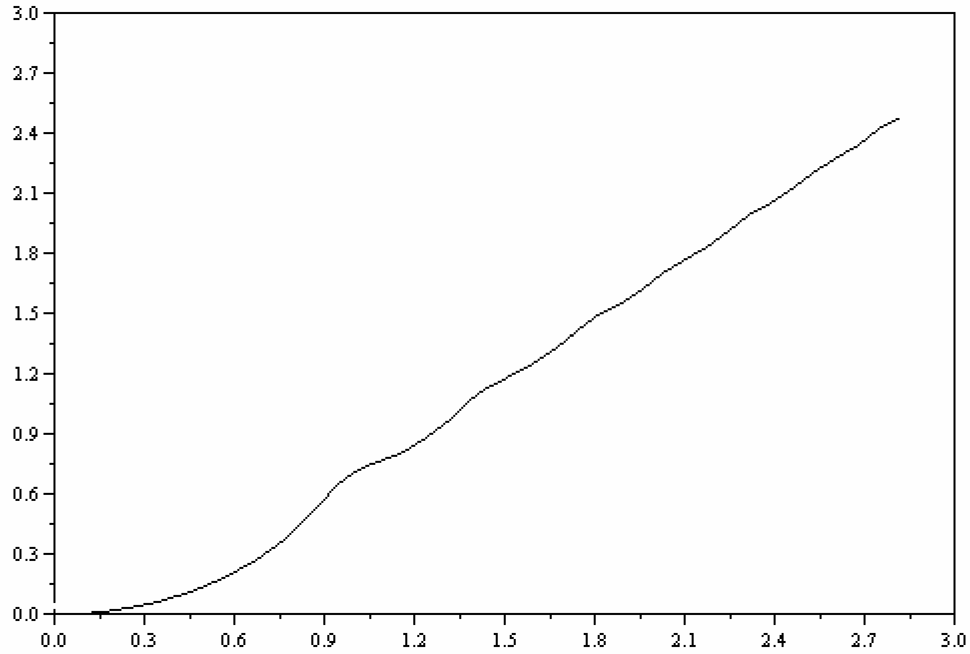
(0,5)

c) Esboce o gráfico de $\alpha(t)$ para $0 \le t \le 4s$;



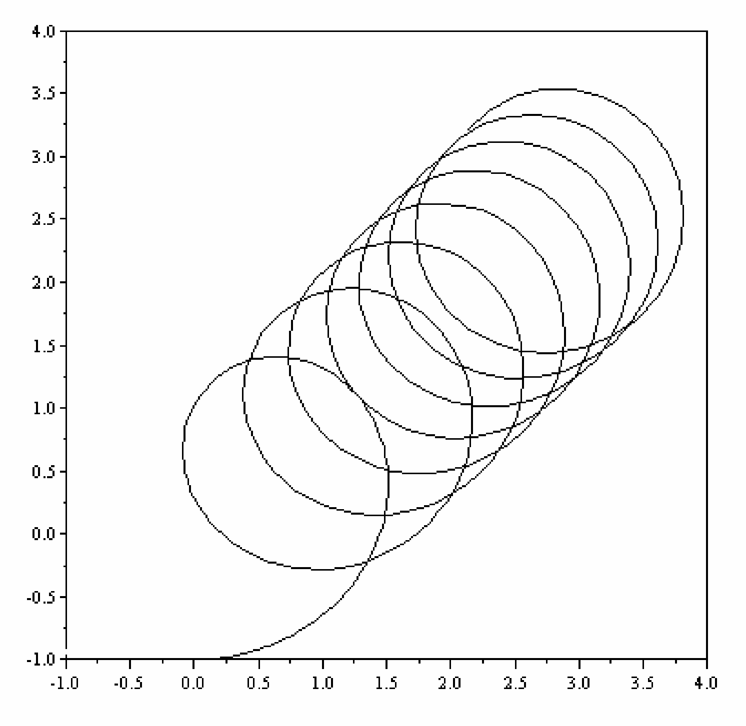
(0,5)

d) Esboce o gráfico da trajetória de G para $0 \le t \le 4s$;



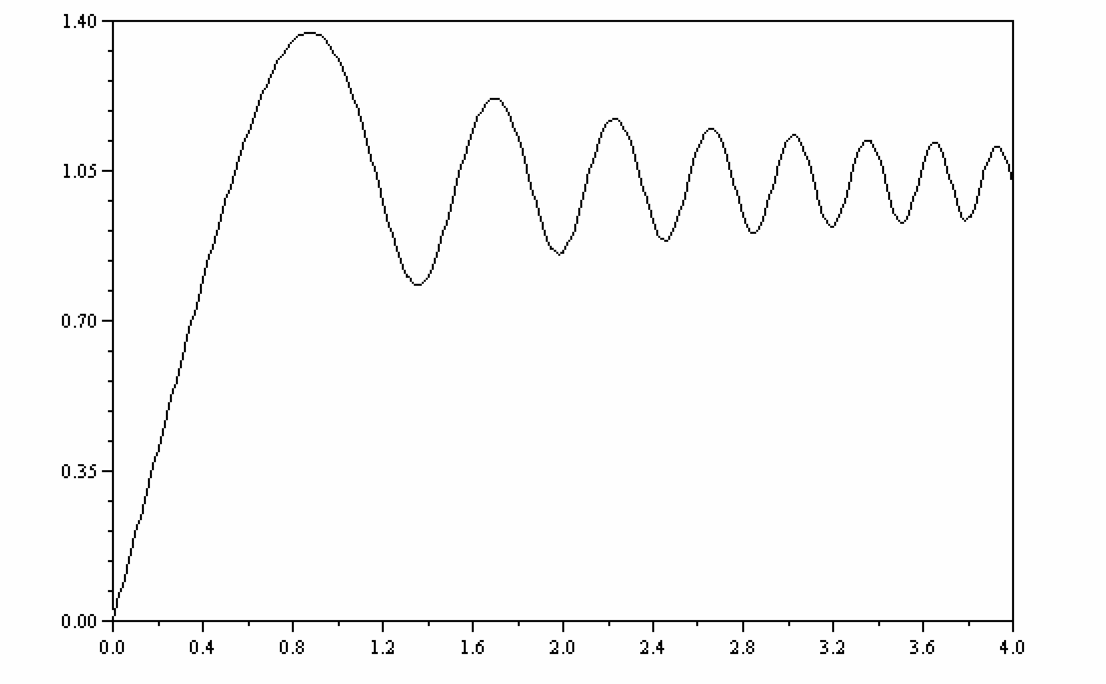
(0,5)

e) Esboce o gráfico da trajetória de A para $0 \le t \le 4s$;



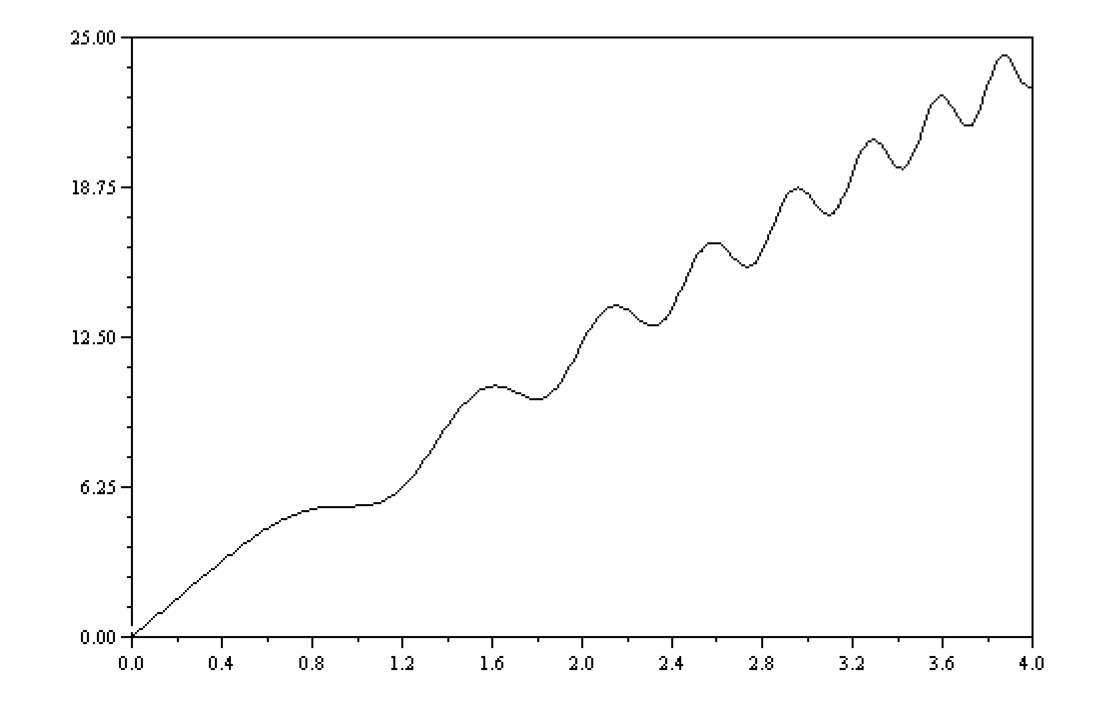
(0,5)

f) Esboce o gráfico da velocidade escalar do baricentro para $0 \le t \le 4s$;



(0,5)

g) Esboce o gráfico da velocidade escalar do ponto A para $0 \le t \le 4s$.



(0,5)