ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

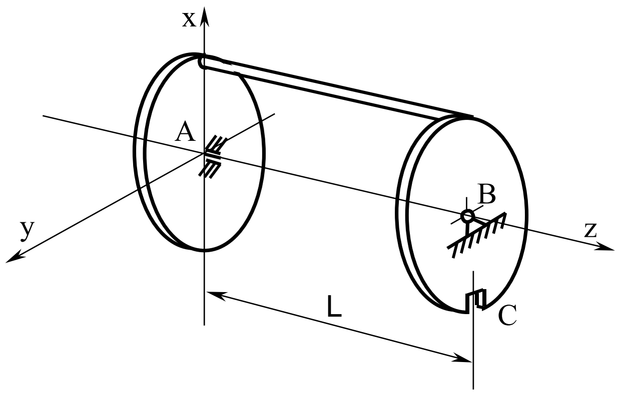
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 04 de abril de 2006

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos)

A barra delgada de massa *2m* e comprimento *L* está ligada aos volantes A e B, de raio *R*, como indicado na figura. Os volantes giram em torno do eixo *Az* com a mesma velocidade angular, constante. O volante A tem massa *4m* e o volante B tem massa *3m*, devido a um defeito de dimensões desprezíveis no ponto C. Portanto, o defeito é responsável pela subtração de uma massa *m* desse volante. No instante considerado, tanto a barra como o defeito encontram-se no plano *xz*. Considerando o sistema Axyz, solidário ao volante A, pede-se:



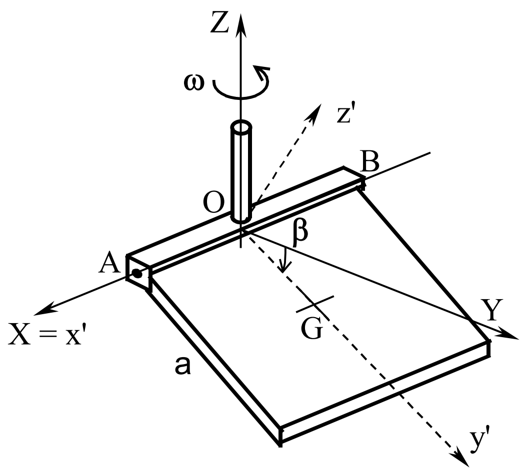
(a) Determinar as reações (considerando o peso) no anel em A e na articulação em B.

(b) Determinar a localização e os valores de duas massas m_1 e m_2, fixadas na parte externa do volantes A e B, suficientes para balancear o sistema

2ª Questão (3,0 pontos)

Uma placa homogênea quadrada de lado *a* e massa *m* está articulada em um garfo *AB*, como indicado na figura. O garfo *AB* gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{K}$. O sistema de eixos *Ox'y'z'* é solidário à placa. Determinar o valor de ω para que a placa se mantenha em equilíbrio em ângulo β constante igual a 30°.

Dado: $J_{x_G} = J_{y_G} = \dfrac{1}{12}ma^2$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,0 pontos). O EP1 solicitou analisar a dinâmica de um pêndulo formado por uma barra em formato de Z, de seção transversal circular com raio *R*, densidade de massa ρ, considerando-se o atrito no mancal desprezível. Você deve ter encontrado que o centro de massa do pêndulo tem coordenadas:

$$x_G \cong \frac{1}{2}\frac{2ab+b^2+2bR}{(a+b+c)} = 0{,}4833\text{m}$$

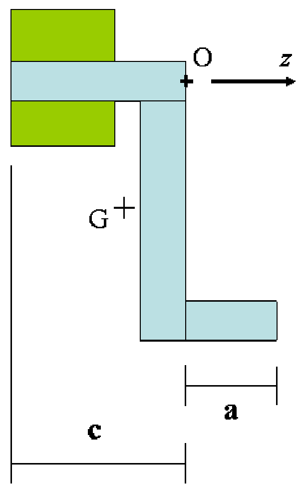
$$y_G = 0$$

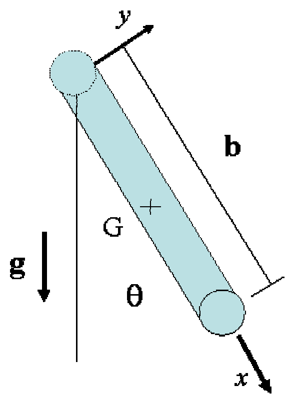
$$z_G = \frac{1}{2}\frac{a^2-2bR-c^2}{(a+b+c)} = -0{,}0333\text{m}$$

Deve também ter calculado o momento de inércia J_{Ozz} e o produto de inércia J_{Oxz} do pêndulo no sistema coordenado (O*xyz*), a ele solidário, encontrando:

$$J_{Ozz} \cong mR^2 \frac{\left[a\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)+b\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2+\frac{b}{R}\right)+c\right]}{(a+b+c)} = 2{,}7458kgm^2$$

$$J_{Oxz} = -\frac{1}{2}mR^2\frac{b}{(a+b+c)}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-2-\frac{b}{R}\right] = -0{,}03375kgm^2$$





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Na presente questão pede-se:

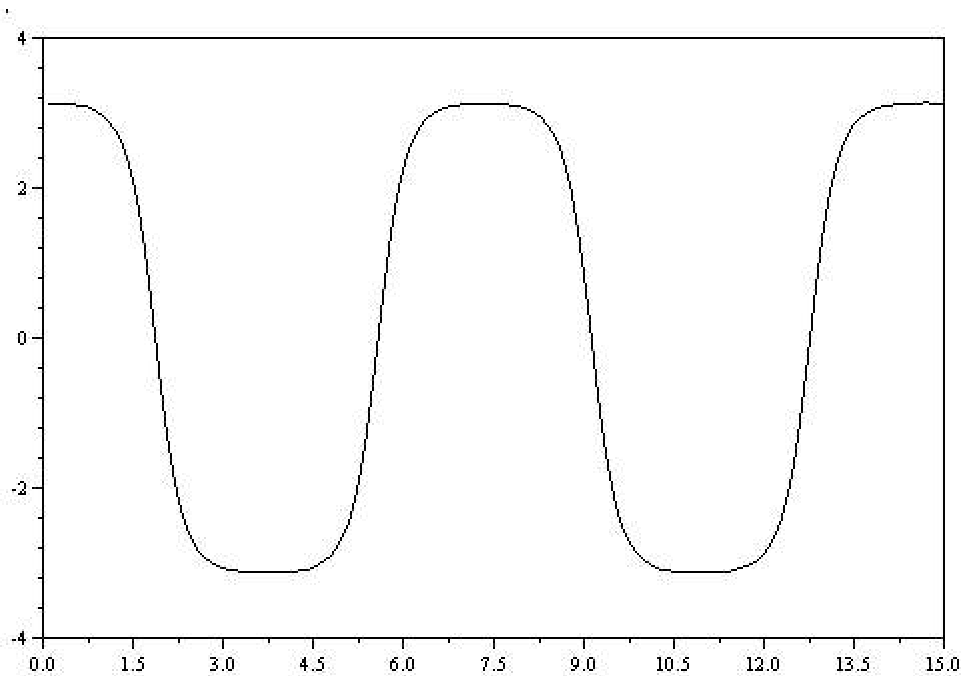
(a) Escreva a equação do movimento e as equações que levam ao cálculo das reações vinculares (forças e momentos).

(b) Elabore o diagrama SCICOS, para a integração da equação de movimento e para o cálculo das reações, incluindo saídas gráficas das variáveis cinemáticas e da componente M_{Oy} do binário reativo aplicado pelo mancal ao pêndulo.

(c) A figura mostra o resultado de duas simulações (1) e (2), sob condições iniciais (CI) distintas, dadas por $(\theta(0);\dot{\theta}(0)) = (\theta_0;\Omega_0)$. Interprete os gráficos de θ em função do tempo e identifique, dentre as 4 combinações $(\theta_0;\Omega_0)$ possíveis de serem formadas a partir dos dados abaixo, o par $(\theta_0;\Omega_0)$ que corresponde a cada simulação, justificando plenamente sua resposta.

C.I.:
$$\theta_0 = \pi - \varepsilon; \pi + \varepsilon$$
$$\Omega_0 = 0; \frac{\pi}{24} \text{ rad/s}$$

Simulação (1) :

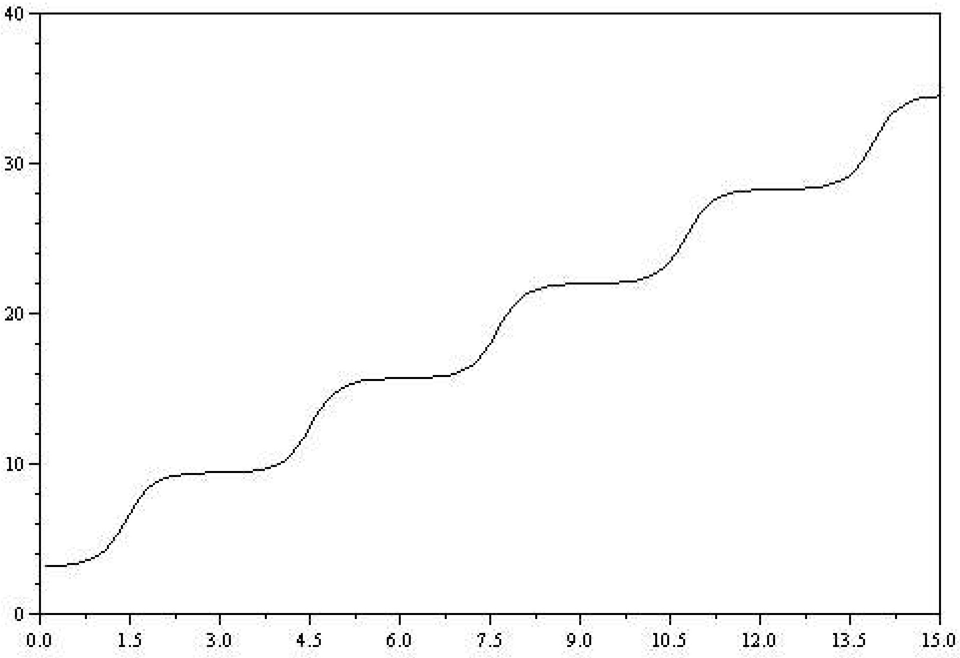


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Simulação (2) :



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

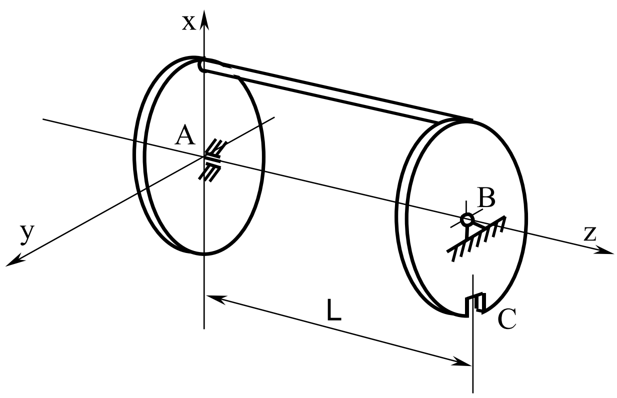
Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA B - Primeira Prova – 04 de abril de 2006 - Resolução

Resolução da 1ª Questão (4,0 pontos)

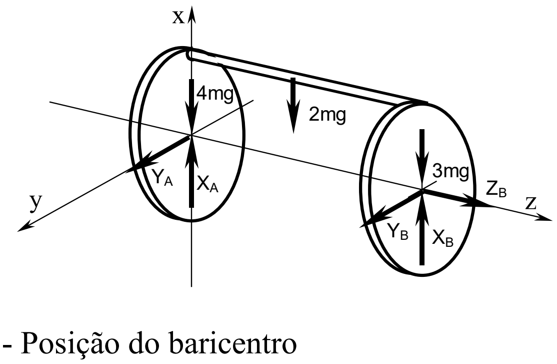
A barra delgada de massa *2m* e comprimento *L* está ligada aos volantes A e B, de raio *R*, como indicado na figura. Os volantes giram em torno do eixo *Az* com a mesma velocidade angular, constante. O volante A tem massa *4m* e o volante B tem massa *3m*, devido a um defeito de dimensões desprezíveis no ponto C. Portanto, o defeito é responsável pela subtração de uma massa *m* desse volante. No instante considerado, tanto a barra como o defeito encontram-se no plano *xz*. Considerando o sistema Axyz, solidário ao volante A, pede-se:



(a) Determinar as reações (considerando o peso) no anel em A e na articulação em B.
(b) Determinar a localização e os valores de duas massas m_1 e m_2, fixadas na parte externa do volantes A e B, suficientes para balancear o sistema

Resolução considerando um voltante com massa 4m e um volante com massa 3m

(a) Diagrama de corpo livre



- Posição do baricentro

$$x_G = \frac{2R}{9} \quad \text{e} \quad z_G = \frac{4L}{9}$$

- Aceleração do baricentro

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)] \Rightarrow \vec{a}_G = -\frac{2\omega^2 R}{9}\vec{i}$$

- TMB

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{cases} X_A + X_B - 9mg = -2mR\omega^2 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_B = 0 \end{cases}$$

- TMA, pólo em A

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\vec{H}_A = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_A = -J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i}$$

Produtos de inércia: $J_{xz} = 2m(R)\left(\dfrac{L}{2}\right) = mRL$, $J_{yz} = 0$

$$\vec{M}_A = -Y_B L\vec{i} + (X_B - 3mg)L\vec{j} - 2mg\frac{L}{2}\vec{j}$$

$$\begin{cases} Y_B L = 0 \\ X_B L - 4mgL = -mRL\omega^2 \Rightarrow \boxed{Y_B = 0} \text{ e } \boxed{X_B = 4mg - mR\omega^2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Substituindo no TMB: $\boxed{Y_A = 0}$ e $\boxed{X_A = 5mg - mR\omega^2}$

(b) Balanceamento

Colocando uma massa m_1 no volante A em (-R,0,0) e uma massa m_2 no volante B em (-R,0,L)

$$J'_{xz} = mRL + m_1(-R)(0) + m_2(-R)(L) = 0 \Rightarrow \boxed{m_2 = m}$$

$$x'_G = \frac{\frac{2R}{9}(9m) + m_1(-R) + m_2(-R)}{9m + m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = m}$$

Resolução considerando que o disco B tem massa 4m e um furo de massa (-m):

a) Cálculo das reações vinculares

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

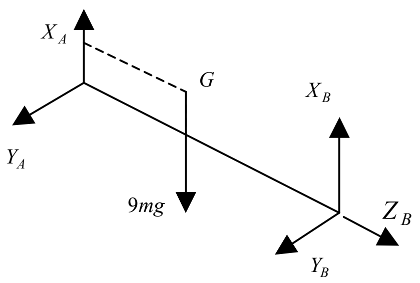
Departamento de Engenharia Mecânica

$$x_G = \frac{2mR + (-m)(-R)}{9m} \Rightarrow x_G = \frac{R}{3}$$

$$z_G = \frac{2m\frac{L}{2} + 4mL + (-m)L}{9m} \Rightarrow z_G = \frac{4L}{9}$$

(0,5)

DCL sistema (0,5)



$$\vec{a}_G = -\omega^2 \frac{R}{3}\vec{i}; TMB: \ 9m\vec{a}_G = \vec{R} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9m\omega^2 \frac{R}{3} = X_A + X_B - 9mg \\ 0 = Y_A + Y_B; Z_B = 0; \end{cases}$$

(0,5)

TMA, pólo em A:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \vec{M}_A \Rightarrow -J_{xz}\omega^2\vec{j} = \left(X_B L - 9mg\frac{4L}{9}\right)\vec{j} - Y_B L\vec{i} \ ; \ (0{,}5)$$

$$J_{xz} = \underbrace{2mR\frac{L}{2}}_{barra} + \underbrace{(-m)(-R)L}_{furo} \Rightarrow J_{xz} = 2mRL \qquad (0{,}5)$$

Portanto,

$$X_B = 4mg - 2m\omega^2 R$$

$$X_A = 5mg - m\omega^2 R \qquad (0{,}5)$$

$$Y_A = Y_B = Z_B = 0$$

b)Balanceamento

Para balancear estática ($x_G = y_G = 0$) e dinamicamente ($J_{xz} = 0$), deve-se acrescentar as massas $m_1 = m$ na posição $(-R,0,0)$ e $m_2 = 2m$ na posição $(-R,0,L)$. (1,0)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

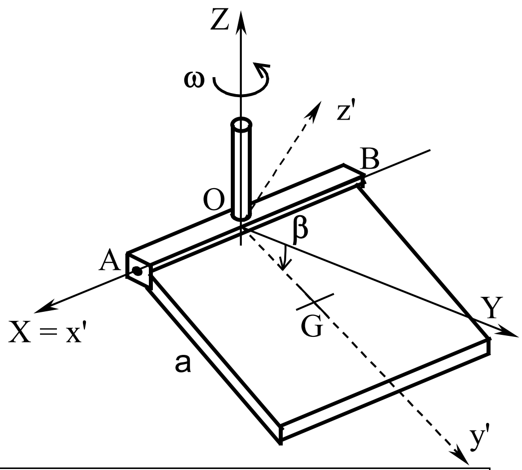
Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos)

Uma placa homogênea quadrada de lado *a* e massa *m* está articulada em um garfo *AB*, como indicado na figura. O garfo *AB* gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{K}$. O sistema de eixos *Ox'y'z'* é solidário à placa. Determinar o valor de ω para que a placa se mantenha em equilíbrio em ângulo β constante igual a 30º.

Dado: $J_{x_G} = J_{y_G} = \dfrac{1}{12}ma^2$



$\vec{\omega} = \omega\cos\beta\vec{k} - \omega\mathrm{sen}\beta\vec{j}$ (0,5)

$\dot{\vec{j}} = -\omega\cos\beta\vec{i}$

$\dot{\vec{k}} = -\omega\mathrm{sen}\beta\vec{i}$

TMA polo em O: $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$

$\vec{H}_O = -J_y\omega\mathrm{sen}\beta\vec{j} + J_z\omega\cos\beta\vec{k}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{H}}_O = J_y\omega^2\mathrm{sen}\beta\cos\beta\vec{i} - J_z\omega^2\mathrm{sen}\beta\cos\beta\vec{i}$

$\Rightarrow$ $\dot{\vec{H}}_O = (J_y - J_z)\omega^2\mathrm{sen}\beta\cos\beta\vec{i}$ (1,0)

$\vec{M}_O = -mg\dfrac{a}{2}\cos\beta\vec{i}$ (0,5)

$\Rightarrow$ $-mg\dfrac{a}{2}\cos\beta\vec{i} = (J_y - J_z)\omega^2\mathrm{sen}\beta\cos\beta\vec{i}$ $\Rightarrow$ $\omega^2 = \dfrac{mga}{2(J_y - J_z)\mathrm{sen}\beta}$ (0,5)

sendo: $\beta = 30^0 \Rightarrow \mathrm{sen}\beta = 1/2$ e $J_y = \dfrac{ma^2}{12}$; $J_z = \dfrac{ma^2}{6} + m\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5ma^2}{12}$ (0,5)

Assim: $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{a}}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos).

De fato, considerando que as massas das barras e do pêndulo são dadas por:

$$\begin{aligned} m_a &= \rho\pi R^2 a \\ m_b &= \rho\pi R^2 b \\ m_c &= \rho\pi R^2 c \\ m = m_a + m_b + m_c &= \rho\pi R^2 (a+b+c) \end{aligned} \quad , \tag{1}$$

e considerando as coordenadas dos centros de massa das barras:

$$\begin{aligned} G_a &= (x_a; y_a; z_a) = (b;0;a/2) \\ G_b &= (x_b; y_b; z_b) = (R+b/2;0;-R) \\ G_c &= (x_c; y_c; z_c) = (0;0;-c/2) \end{aligned} \quad , \tag{2}$$

as coordenadas do centro de massa do pêndulo ficam dadas por:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m} \cong \frac{1}{2}\frac{2ab + b^2 + 2bR}{(a+b+c)} \\ y_G &= 0 \\ z_G &= \frac{1}{2}\frac{a^2 - 2bR - c^2}{(a+b+c)} \end{aligned} \quad . \tag{3}$$

Momento de inércia em torno do eixo *Oz*:

$$J_{Ozz} = J_{Ozz}^a + J_{Ozz}^b + J_{Ozz}^c \quad , \tag{4}$$

com,

$$\begin{aligned} J_{Ozz}^a &= \frac{1}{2} m_a R^2 + m_a b^2 = \rho\pi R^2 a \left(\frac{R^2}{2} + b^2 \right) \\ J_{Ozz}^b &\cong m_b \left(\frac{R^2}{4} + \frac{b^2}{12} + (R + \frac{b}{2})^2 \right) = \rho\pi R^2 b \left(\frac{5}{4}R^2 + \frac{b^2}{3} + Rb \right) \\ J_{Ozz}^b &= \frac{1}{2} m_c R^2 = \rho\pi R^2 c R^2 \end{aligned} \quad , \tag{5}$$

de tal forma que,

$$J_{Ozz} \cong mR^2 \frac{\left[a\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{b}{R}\right)^2\right) + b\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2 + \frac{b}{R}\right) + c \right]}{(a+b+c)} \quad . \tag{6}$$

Produto de inércia J_{Oxz}:

$$J_{Oxz} = J^a_{Oxz} + J^b_{Oxz} = -m_a x_a z_a - m_b x_b z_b \tag{7}$$

e portanto,

$$J_{Oxz} = -\frac{1}{2} mR^2 \frac{b}{(a+b+c)} \left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 2 - \frac{b}{R} \right] \quad . \tag{8}$$

(a)

O vetor de rotação do pêndulo é:

$$\vec{\omega} = \omega(t)\vec{k} \; . \tag{9}$$

O Momento angular do pêndulo, em relação ao pólo O, fixo, é dado por:

$$\vec{K}_O = J_{Oxz}\omega\vec{i} + J_{Ozz}\omega\vec{k} \tag{10}$$

e, portanto, sua derivada em relação ao tempo é:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = J_{Oxz}\dot{\omega}\,\vec{i} + J_{Oxz}\omega^2\vec{j} + J_{Ozz}\dot{\omega}\vec{k} \quad . \tag{11}$$

A aplicação do TMA será feita na forma, $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$, com $\vec{M}_O^{ext}$ a resultante dos momentos das forças externas em relação ao pólo O, ou seja a soma do binário reativo $\vec{B}^{reat}$ aplicado pelo mancal com o momento da força peso. A reação vincular $\vec{F}^{reat} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ é suposta, por conveniência, aplicada em O. Tem-se:

$$\vec{M}_O^{reat} = M_{Ox}^{reat}\vec{i} + M_{Oy}^{reat}\vec{j} + M_{Oz}^{reat}\vec{k} = \vec{B}^{reat}. \tag{12}$$

O TMA leva então a:

$$\begin{aligned} &J_{Oxz}\dot{\omega} - mgz_G \sin\theta = M_{Ox}^{reat} \\ &J_{Oxz}\omega^2 - mgz_G \cos\theta = M_{Oy}^{reat} \\ &J_{Ozz}\dot{\omega} + mgx_G \sin\theta = 0 \end{aligned} \quad . \tag{13}$$

A equação (13c) é a equação do movimento. As equações (13a) e (13b) fornecem as componentes do binário reativo. Por outro lado, a aplicação do TMB, com $\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}^{reat} = m\vec{g} + X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, leva a

$$\begin{aligned} &X = -mg\cos\theta - m\omega^2 x_G \\ &Y = m\dot{\omega}x_G + mg\sin\theta \\ &Z = 0 \end{aligned} \quad , \tag{14}$$

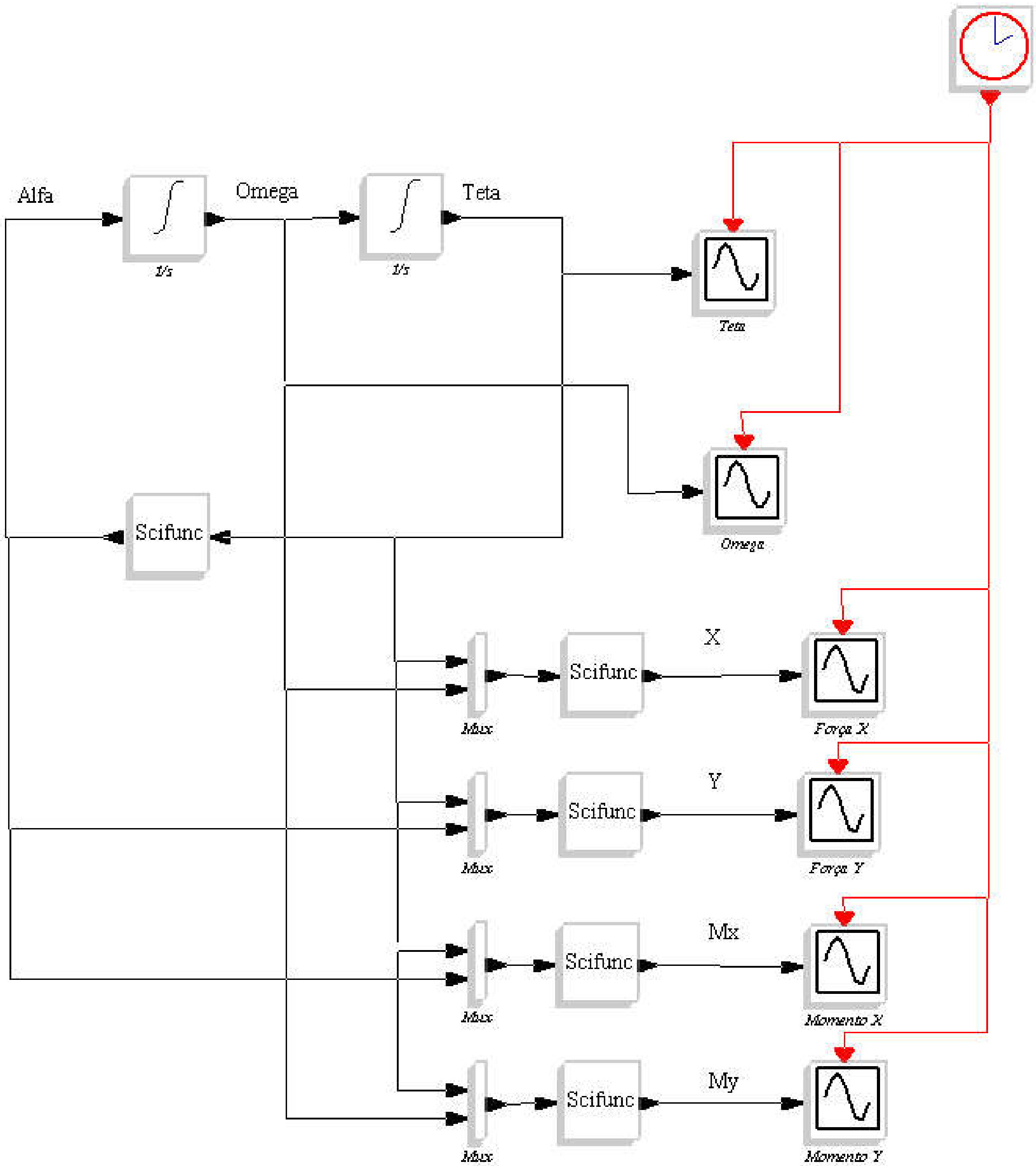
que fornecem as componentes da força reativa vincular.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

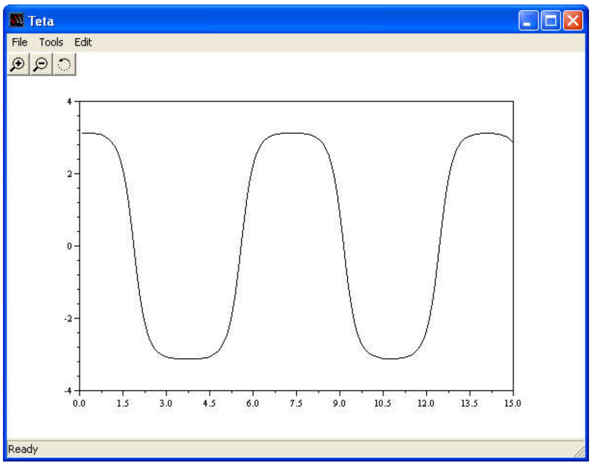
Departamento de Engenharia Mecânica

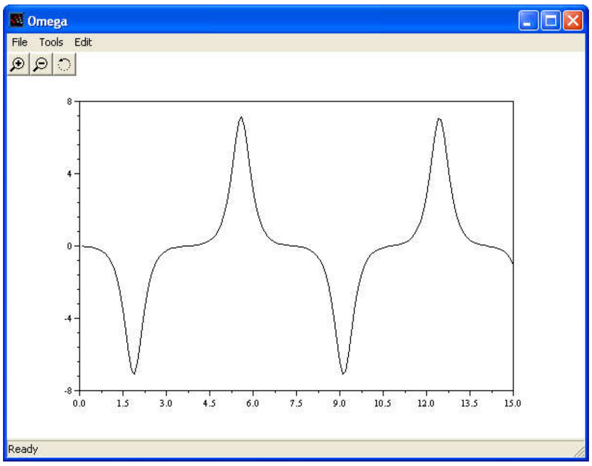
(b) Incluindo, também, além do que foi pedido, as saídas para as forças e para o momento M_{Ox}^{reat}, teremos o seguinte diagrama do Scicos:

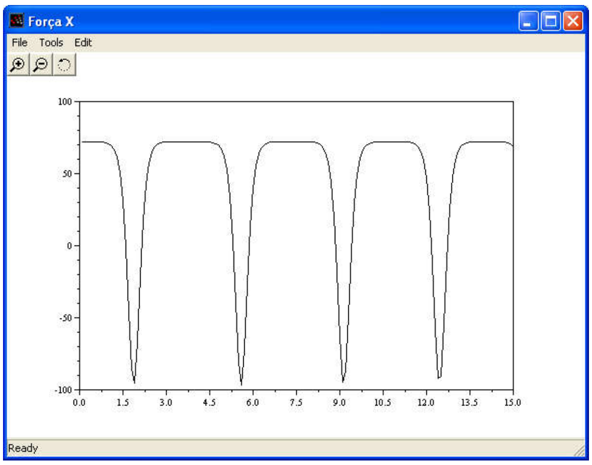


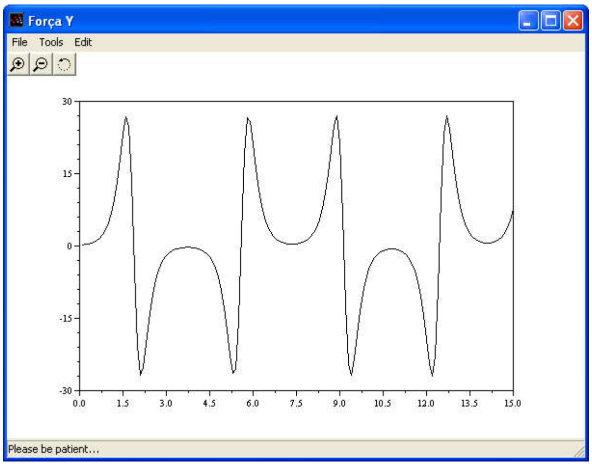
onde *Teta* é o ângulo do pêndulo com a vertical, *Omega* é a sua velocidade angular e *Alfa* é a sua aceleração angular.

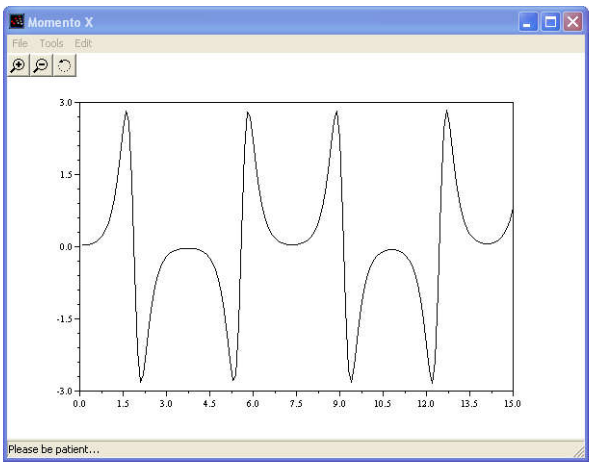
(c) A Simulação 1 corresponde às condições iniciais $\theta_0 = \pi - \varepsilon$ e $\Omega_0 = 0$. O pêndulo não consegue ultrapassar a posição $\theta = \pi$ porque chega nas vizinhanças dessa posição com velocidade angular nula, resultando um movimento oscilatório. Abaixo segue o conjunto completo de gráficos para este caso:

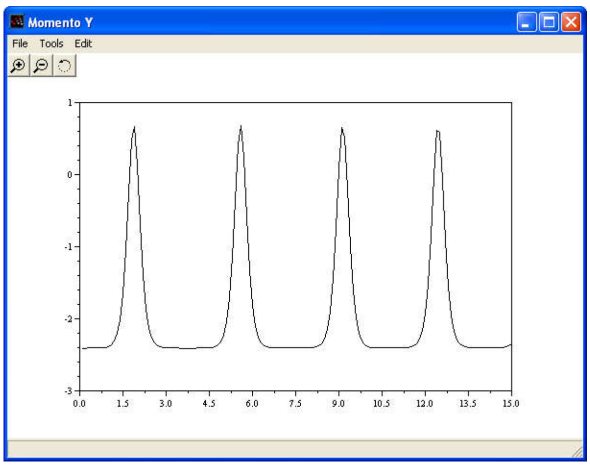












A Simulação 2 corresponde às condições iniciais $\theta_0 = \pi + \varepsilon$ e $\Omega_0 = \pi / 24$. O pêndulo ultrapassa a posição $\theta = \pi$ porque chega nas suas vizinhanças com velocidade angular não nula, embora pequena. Nesse caso, executa um movimento circular de velocidade angular variável em torno de O. Abaixo segue o conjunto completo de gráficos para este caso: