ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 12 de abril de 2005

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

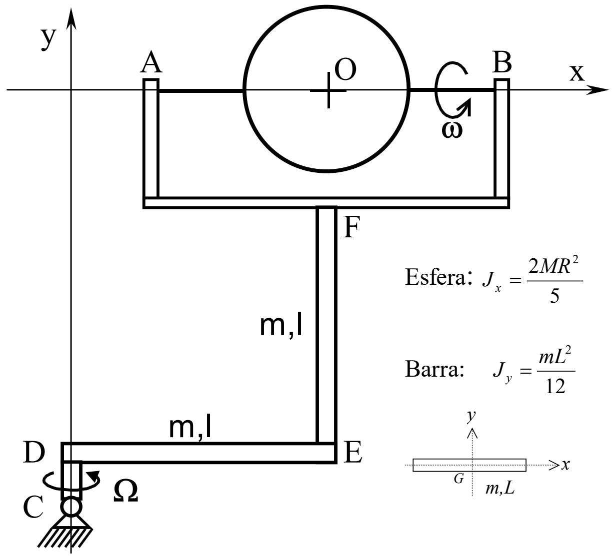
1ª Questão (4,0 pontos)

Uma esfera sólida e homogênea, de centro O, massa M e raio R, gira em tono do eixo AB, de massa desprezível, com $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$. O garfo AFB, também de massa desprezível, está preso ao suporte DEF, composto por duas barras homogêneas de massa *m* e comprimento *l*. O suporte DEF gira com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{j}$. Pede-se:

(a) O momento de inércia Jy_C do suporte DEF em relação ao eixo *Cy*

(b) A energia cinética do conjunto (suporte + esfera)

(c) O momento angular da esfera em relação ao pólo O

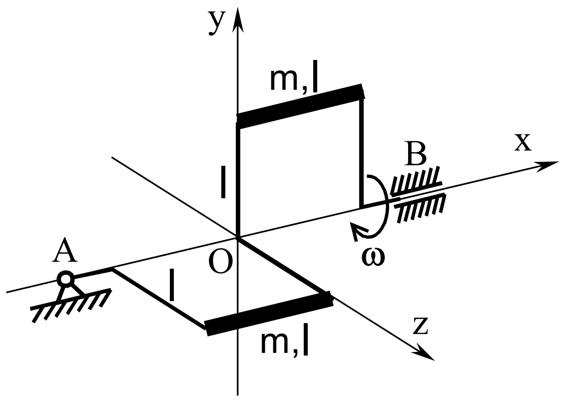


2ª Questão (4,0 pontos)

Duas barras de massa *m* e comprimento *l* estão ligadas a um eixo que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$, como indicado na figura. Pede-se:

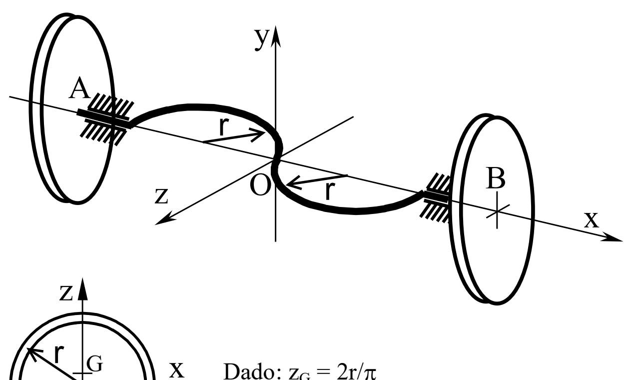
(a) O momento angular do sistema em relação ao pólo O

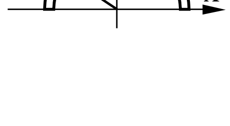
(b) As reações dinâmicas (desconsiderando o peso) nos mancais A e B.



3ª Questão (2,0 pontos)

Uma barra homogênea delgada, de massa *m* por unidade de comprimento, está contida no plano *xz* e tem a forma indicada na figura. Balanceie o sistema pela adição de duas massas nas periferias dos volantes A e B, de raio R e massa M.





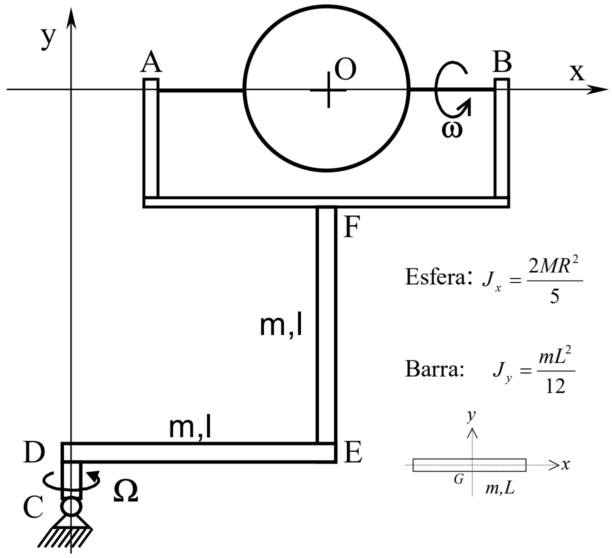
Dado: $z_G = 2r/\pi$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

GABARITO
PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 12 de abril de 2005



Esfera: $J_x = \frac{2MR^2}{5}$

Barra: $J_y = \frac{mL^2}{12}$

1ª Questão (4,0 pontos)

Uma esfera sólida e homogênea, de centro O, massa M e raio R, gira em tono do eixo AB, de massa desprezível, com $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$. O garfo AFB, também de massa desprezível, está preso ao suporte DEF, composto por duas barras homogêneas de massa *m* e comprimento *l*. O suporte DEF gira com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{j}$.
Pede-se:

(a) O momento de inércia Jy_C do suporte DEF em relação ao eixo *Cy*
(b) A energia cinética do conjunto (suporte + esfera)
(c) O momento angular da esfera em relação ao pólo O

Solução

a) $J_y = J_{y_{DE}} + J_{y_{EF}}; J_{y_{DE}} = \frac{ml^2}{3}; J_{y_{Ef}} = ml^2 \Rightarrow J_y = \frac{4ml^2}{3}$

---

b) $T = T_s + T_e$, onde T_s é a En. Cin. do suporte e T_e é a En. Cin. da esfera;

$$T_s = \frac{1}{2}\{0,\Omega,0\}\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow T_s = \frac{1}{2}J_y\Omega^2 \Rightarrow T_s = \frac{2}{3}ml^2\Omega^2;$$

$$T_e = \frac{1}{2}Mv_o^2 + \frac{1}{2}\{W_e\}^t[J]_o\{W_e\}; \vec{W}_e = \omega\vec{i} + \Omega\vec{j}; \vec{v}_o = -\Omega l\vec{k}; [J]_o = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T_e = \frac{1}{2}M\Omega^2 l^2 + \frac{1}{2}\left(\omega^2 J_x + \Omega^2 J_y\right); J_x = J_y = \frac{2MR^2}{5} \Rightarrow T_e = \frac{1}{2}M\Omega^2 l^2 + \frac{MR^2}{5}\left(\omega^2 + \Omega^2\right);$$

$$\therefore T = \frac{MR^2}{5}\omega^2 + \left(\frac{1}{2}Ml^2 + \frac{MR^2}{5} + \frac{2}{3}ml^2\right)\Omega^2$$

---

c) $\vec{K}_o = \underbrace{(G-O)}_{=\vec{0}} \wedge M\vec{v}_o + [J]_o\{W_e\} \Rightarrow \vec{K}_o = \frac{2MR^2}{5}\left(\omega\vec{i} + \Omega\vec{j}\right)$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

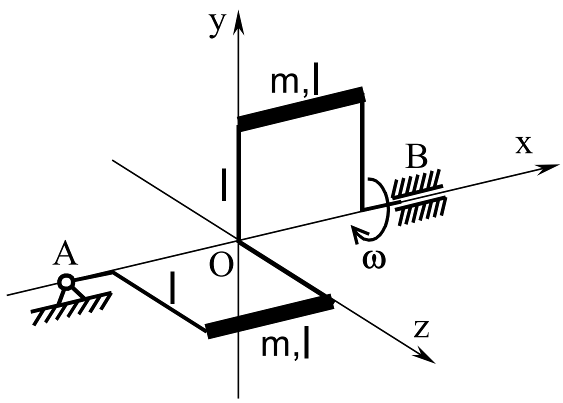
Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (4,0 pontos)

Duas barras de massa m e comprimento l estão ligadas a um eixo que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$, como indicado na figura. Pede-se:

(a) O momento angular do sistema em relação ao pólo O

(b) As reações dinâmicas (desconsiderando o peso) nos mancais A e B.



Solução

a)

$$\vec{K}_o = (G-O)\wedge M\vec{v}_o + [J]_o\{W\};$$

$$(G-O) = \frac{1}{2m}\left(0\vec{i} + ml\,\vec{j} + ml\,\vec{k}\right) \Rightarrow (G-O) = \frac{l}{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right); \vec{v}_o = \vec{0};$$ (0,5)

$$[J]_o = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}; \{W\} = \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \therefore \vec{K}_o = J_x\omega\vec{i} - J_{xy}\omega\vec{j} - J_{xz}\omega\vec{k}$$ (0,5)

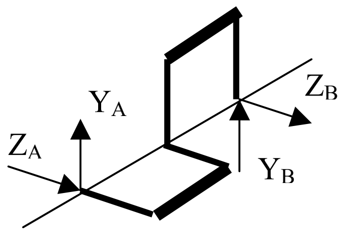
(0,5) $J_x = 2ml^2; J_{xy} = m\frac{l}{2}l;\ J_{xz} = m\left(-\frac{l}{2}\right)l; \Rightarrow \vec{K}_o = ml^2\,\omega\left(2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right)$ (0,5)

b)

Aplicando o TMB:

$$2m\vec{a}_G = \left(Y_A + Y_B\right)\vec{j} + \left(Z_A + Z_B\right)\vec{k};\ \vec{a}_G = -\frac{\omega^2 l}{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 l = Y_A + Y_B & (1) \\ -m\omega^2 l = Z_A + Z_B & (2) \end{cases}$$ (0,5)



Aplicando o TMA:

$$(G-O)\wedge 2m\vec{a}_o + \frac{d}{dt}\left([J]_o\{W\}\right) = \vec{M}_o;$$

(0,5) $\vec{M}_o = \left(Z_A - Z_B\right)l\vec{j} + \left(-Y_A + Y_B\right)l\vec{k} \Rightarrow$

$$\vec{a}_o = \vec{0};\ \dot{\vec{i}} = \vec{0};\ \dot{\vec{j}} = \omega\vec{k};\ \dot{\vec{k}} = -\omega\vec{j};$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 l^2/2 = \left(-Y_A + Y_B\right)l & (3) \\ -m\omega^2 l^2/2 = \left(Z_A - Z_B\right)l & (4) \end{cases}$$ (0,5)

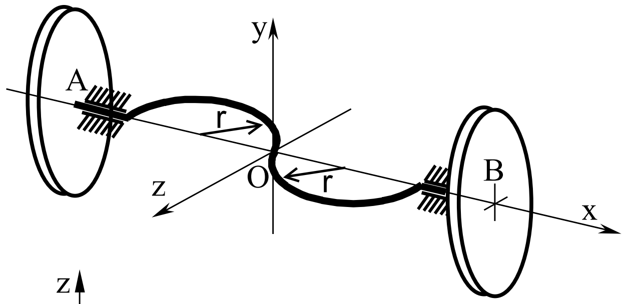
Resolvendo as equações (1) a (4) resulta: $Y_A = Z_B = -m\omega^2 l/4;\ Z_A = Y_B = -3m\omega^2 l/4;$ (0,5)

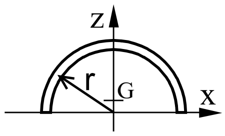
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (2,0 pontos)
Uma barra homogênea delgada, de massa *m* por unidade de comprimento, está contida no plano *xz* e tem a forma indicada na figura. Balanceie o sistema pela adição de duas massas nas periferias dos volantes A e B, de raio R e massa M.





Dado: $z_G = 2r/\pi$

Solução:
Como o sistema já está balanceado estaticamente, basta adicionar duas massas iguais de forma a não alterar o balanceamento estático (0,5) e resultar $J_{xz} = 0$; os demais produtos de inércia, J_{xy} *e* J_{zy} são nulos pois (x,z) é plano de simetria do sistema (0,5). Sejam m_b as massas adicionadas:

$$J_{xz} = m_{AO} x_{G_{AO}} z_{G_{AO}} + m_{BO} x_{G_{BO}} z_{G_{BO}} + m_b(-2r)R + m_b 2r(-R) = 0 \Rightarrow \quad (0,5)$$

$$m\pi r(-r)(-\frac{2r}{\pi}) + m\pi r(r)(\frac{2r}{\pi}) - 4m_b rR = 0 \Rightarrow m_b = \frac{mr^2}{R} \quad (0,5)$$