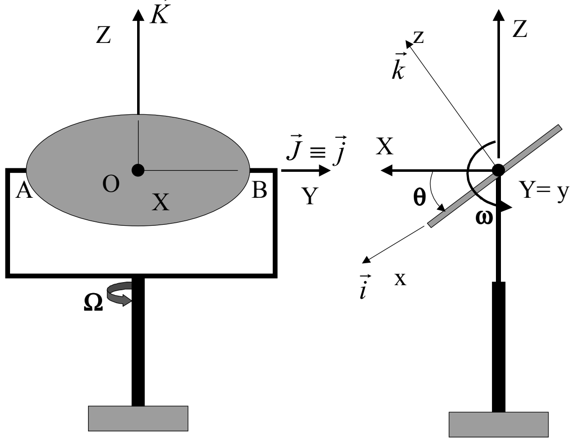
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – 1ª Prova – 4/4/2002 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).

1ª Questão (3,0 pontos)

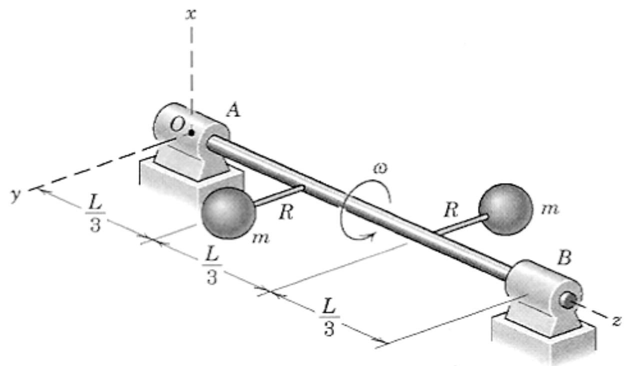


Dado: $J_z = \frac{1}{2}MR^2$

A figura mostra um disco homogêneo, de massa M e raio R, que pode girar em torno do eixo AB, com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{j}$. O garfo está preso a um eixo vertical que gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega \vec{K}$. O sistema de eixos $OXYZ$ é solidário ao garfo girante. O sistema de eixos $Oxyz$ é solidário ao disco. O eixo OY coincide com o eixo Oy. Pede-se:

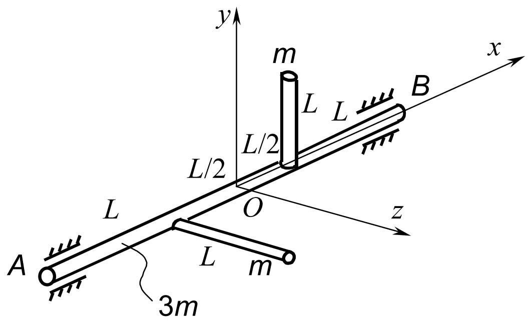
a) Monte a matriz de inércia do disco, em relação ao sistema de eixos $Oxyz$.
b) Determine o vetor de rotação do disco $\vec{\omega}_D$, expressando-o na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ solidária a $Oxyz$, em uma posição genérica, definida pelo ângulo θ.
c) Calcule a energia cinética T do disco em relação à base fixa ao chão, em uma posição genérica, definida pelo ângulo θ.

2ª Questão (4,0 pontos)



Duas partículas de massa m estão fixas por meio de hastes a um eixo esbelto, conforme a figura. As massas das hastes e do eixo podem ser desprezadas. O sistema $Oxyz$ é solidário ao eixo. Determine as componentes nas direções x e y das reações dinâmicas nos mancais A e B.

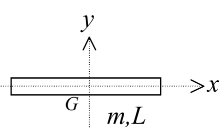
3ª Questão (3,0 pontos) (baseada no EP)



A figura ao lado mostra um eixo de massa $3m$ e comprimento $3L$ ao qual estão presas duas barras longitudinais idênticas, de comprimento L e massa m. Pedem-se:

a) as coordenadas do centro de massa do sistema e
b) a matriz de inércia do conjunto em relação ao sistema de eixos $Oxyz$.

Dado:



$J_y = \frac{mL^2}{12}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 211.2998 818.5221/5223 Fax (011) 211.4308 818.5714

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão Resolução:

a) Sejam I os momentos de inércia diametrais e J o momento de inércia polar em relação aos eixos (Ox, y, z). Então $I = \frac{1}{4}MR^2$ e $J = \frac{1}{2}MR^2$. Assim a matriz de inércia fica dada por:

$$[J]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

b) O vetor de rotação absoluto do disco é dado por:

$$\vec{\omega}_D = -\Omega \sin\theta \vec{i} + \omega \vec{j} + \Omega \cos\theta \vec{k}$$

c) Como o centro de massa é um ponto fixo a energia cinética do disco fica reduzida à parcela associada à rotação. Assim:

$$T = \frac{1}{2}\{\omega\}^T [J]\{\omega\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\Omega\, sin\,\theta & \omega & \Omega\, cos\,\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\Omega\, sin\,\theta \\ \omega \\ \Omega\, cos\,\theta \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left\{I\Omega^2 \sin^2\theta + I\omega^2 + J\Omega^2 \cos^2\theta\right\}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 211.2998 818.5221/5223 Fax (011) 211.4308 818.5714

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão Resolução:

Aplicando o TMA com pólo em G: $\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$

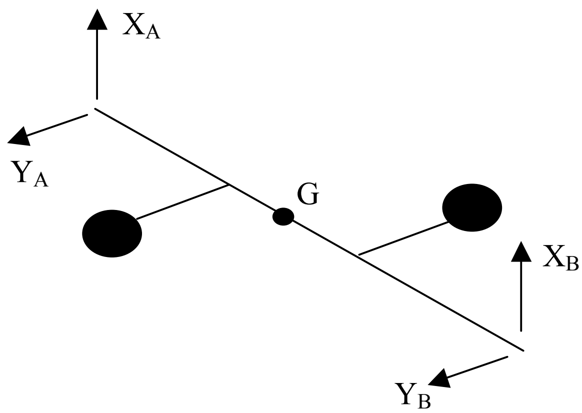
$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}_{Gxyz} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \omega\left(-J_{xz}\vec{i} - J_{yz}\vec{j} + J_z\vec{k}\right)$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \omega\left(-J_{xz}\dot{\vec{i}} - J_{yz}\dot{\vec{j}}\right) = -\omega J_{yz}\dot{\vec{j}} \qquad (pois\ \ J_{xz} = 0)$$

$$\dot{\vec{j}} = \omega\vec{k} \wedge \vec{j} = -\omega\vec{i} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \omega^2 J_{yz}\vec{i} \qquad \left(J_{yz} = mR\left(-\frac{L}{6}\right) + m(-R)\frac{L}{6} = -mR\frac{L}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -mR\frac{L}{3}\omega^2\vec{i}$$

$$\vec{M}_G = -(X_A - X_B)\frac{L}{2}\vec{j} + (Y_A - Y_B)\frac{L}{2}\vec{i}$$



substituindo no TMA:

$$\begin{cases} Y_A - Y_B = -\dfrac{2}{3}mR\omega^2 & (1) \\ X_A = X_B & (2) \end{cases}$$

Aplicando o TMB: $\vec{R}_{ext} = m\vec{a}_G = \vec{0}$

$$(X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \begin{cases} X_A = -X_B & (3) \\ Y_A + Y_B = 0 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo (1), (2), (3) e (4):

$$\boxed{X_A = X_B = 0} \qquad \boxed{Y_A = -\frac{1}{3}mR\omega^2} \quad e \quad \boxed{Y_B = \frac{1}{3}mR\omega^2}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 211.2998 818.5221/5223 Fax (011) 211.4308 818.5714

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão Resolução: sempre [trecho AB] + [trecho paralelo ao eixo z] + [trecho paralelo ao eixo y].

$$x_G = \frac{3m\cdot 0 + m\cdot\left(-L/2\right) + m\cdot L/2}{5m} \Rightarrow \boxed{x_G = 0}$$

$$y_G = \frac{3m\cdot 0 + m\cdot 0 + m\cdot L/2}{5m} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{L}{10}}$$

$$z_G = \frac{3m\cdot 0 + m\cdot L/2 + m\cdot 0}{5m} \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{L}{10}}$$

$$J_x = [0] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] \Rightarrow \boxed{J_x = \frac{2mL^2}{3}}$$

$$J_y = \left[\frac{3m(3L)^2}{12}\right] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\right] + \left[0 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] \Rightarrow \boxed{J_y = \frac{37mL^2}{12}}$$

$$J_z = \left[\frac{3m(3L)^2}{12}\right] + \left[0 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\right] \Rightarrow \boxed{J_z = \frac{37mL^2}{12}}$$

$$J_{xy} = [0] + \left[0 + m\left(-\frac{L}{2}\right)(0)\right] + \left[0 + m\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{J_{xy} = \frac{mL^2}{4}}$$

$$J_{xz} = [0] + \left[0 + m\left(-\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] + \left[0 + m\left(\frac{L}{2}\right)(0)\right] \Rightarrow \boxed{J_{xz} = -\frac{mL^2}{4}}$$

$$J_{yz} = [0] + \left[0 + m(0)\left(\frac{L}{2}\right)\right] + \left[0 + m\left(\frac{L}{2}\right)(0)\right] \Rightarrow \boxed{J_{yz} = 0}$$

$$\boxed{[J]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} \frac{2mL^2}{3} & -\frac{mL^2}{4} & \frac{mL^2}{4} \\ -\frac{mL^2}{4} & \frac{37mL^2}{12} & 0 \\ \frac{mL^2}{4} & 0 & \frac{37mL^2}{12} \end{bmatrix}}$$