

SLC609 / SME 341
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-6 – Dependência Linear

Prof. Miguel Frasson

Maio de 2021

Subespaço gerado

Teorema

Seja V espaço vetorial e $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$.

O conjunto U das combinações lineares de u_1, u_2, \dots, u_n é um subespaço vetorial, chamado **subespaço gerado de u_1, u_2, \dots, u_n** .

Notação: $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$

Demonstração.

- ▶ $0 = 0u_1 + \dots + 0u_n \in U$.
- ▶ Se $x, y \in U$: $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $y = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$.

$$\therefore x + y = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)u_n \in U$$

$$\therefore \gamma x = (\gamma\alpha_1)u_1 + \dots + (\gamma\alpha_n)u_n \in U$$

Logo U é subespaço vetorial de V .



Espaços finitamente gerados

- ▶ $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ → os u_i são **geradores** de U .
- ▶ Se um espaço vetorial possui um número finito de geradores, é chamado de **finitamente gerado**

Exemplos

- ▶ $\mathbb{R}^3 = [e_1, e_2, e_3]$ é finitamente gerado.
- ▶ $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado (por mn matrizes).
- ▶ $P_n(\mathbb{R})$ os polinômios de grau **até n** são gerados pelos polinômios $1, x, x^2, \dots, x^n$.
- ▶ O conjunto $P(\mathbb{R})$ dos polinômios (de grau qualquer) não é finitamente gerado
- ▶ O conjunto das funções contínuas $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contém $P(\mathbb{R})$ e portanto não pode ser finitamente gerado.

Exemplo: $(2, 0, -1) \in [(1, 1, 2), (4, 2, 3)]$?

- ▶ $(2, 0, -1) \in [(1, 1, 2), (4, 2, 3)]$ se existem x, y :

$$(2, 0, -1) = x(1, 1, 2) + y(4, 2, 3) = (x + 4y, x + 2y, 2x + 3y)$$

- ▶ Montamos o sistema

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

- ▶ Com matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- ▶ Portanto $x = -2$, $y = 1$, e a resposta é **sim**.

Exemplo: encontrar conjunto de geradores

- ▶ Encontrar um conjunto de geradores para

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0, y - z + w = 0\}.$$

- ▶ $(x, y, z, w) \in U \iff x + y - z = 0, y - z + w = 0$
- ▶ Vamos tentar isolar variáveis: z, w

$$z = x + y$$

$$w = z - y = x$$

$$\therefore (x, y, z, w) \in U \iff z = x + y, w = x$$

- ▶ $(x, y, z, w) = (x, y, x + y, x) = x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, 1, 0)$
- ▶ $\therefore U = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)]$

Exemplo2: encontrar conjunto de geradores

$$U = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0, y + z - t = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z, t) : y - t = 0\}$$

Encontrar geradores para U e $U \cap W$

► Seja $(x, y, z, t) \in U$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Portanto } x + 2z - t = 0 \implies x = -2z + t,$$
$$y + z - t = 0 \implies y = -z + t.$$

$$(x, y, z, t) = (-2z + t, -z + t, z, t) = z(-2, -1, 1, 0) + t(1, 1, 0, 1)$$

$$\therefore U = [(-2, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)]$$

Exemplo2: encontrar conjunto de geradores

$$U = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0, y + z - t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) : y - t = 0\}$$

Encontrar geradores para U e $U \cap W$

► Seja $(x, y, z, t) \in U \cap W$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto $z = 0, y - t = 0 \implies y = t, x - t = 0 \implies x = t.$

$$(x, y, z, t) = (t, t, 0, t) = t(1, 1, 0, 1)$$

$$\therefore U \cap W = [(1, 1, 0, 1)]$$

Vetor redundante pode ser removido dos geradores

Teorema

Suponha $V = [v_1, \dots, v_n]$.

Se um destes geradores, digamos v_p , é combinação linear dos demais, então v_p pode ser removido do conjunto de geradores:

$$V = [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n].$$

Demonstração.

- ▶ (1ª inclusão) $[v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n] \subset [v_1, \dots, v_n] = V$.
- ▶ (2ª inclusão) $V \subset [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$ (próx. slide)
- ▶ $\therefore V = [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$.



(2ª inclusão na prova anterior)

- ▶ $v_p = a_1 v_1 + \cdots + a_{p-1} v_{p-1} + a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n$
- ▶ Tome $u \in V \implies u = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$
- ▶ Então

$$\begin{aligned}u &= b_1 v_1 + \cdots + b_{p-1} v_{p-1} + b_p v_p + b_{p+1} v_{p+1} + \cdots + b_n v_n \\&= b_1 v_1 + \cdots + b_{p-1} v_{p-1} \\&\quad + b_p (a_1 v_1 + \cdots + a_{p-1} v_{p-1} + a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n) \\&\quad + b_{p+1} v_{p+1} + \cdots + b_n v_n \\&= (b_1 + b_p a_1) v_1 + \cdots + (b_{p-1} + b_p a_{p-1}) v_{p-1} \\&\quad + (b_{p+1} + b_p a_{p+1}) v_{p+1} + \cdots + (b_n + b_p a_n) v_n\end{aligned}$$

- ▶ Portanto $u \in [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$
- ▶ Portanto $V \subset [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$

Dependência linear

- ▶ Sejam V um espaço vetorial e $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.
- ▶ Dizemos que os vetores v_1, \dots, v_n são **linearmente dependentes**, ou que S é um conjunto linearmente dependente (abrev: **LD**) quando existem escalares **não todos nulos** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

- ▶ Caso contrário, isto é, se uma igualdade do tipo $\sum \alpha_i v_i = 0$ só for possível quando $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, dizemos que S é **linearmente independente** (abrev: **LI**).

Exemplos

$(3, 1, 1, 4), (1, 1, 0, 3), (2, 0, 1, 1)$ são LD

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(sistema possível **indeterminado**)

$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ são LI.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

é sistema possível **determinado**

Exemplos

Os monômios $1, t, \dots, t^n$ são LI em $P(\mathbb{R})$.

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0 = 0 + 0t + \dots + 0t^n \implies \alpha_i = 0, \forall i.$$

Exemplos

LD se um dos vetores é combinação linear dos outros

Se um dos vetores v_1, \dots, v_n for combinação linear dos outros, então v_1, \dots, v_n são LD.

$$\blacktriangleright v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_n v_n$$

$$\blacktriangleright \therefore 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_n v_n$$

Num conj. LD, ao menos um é comb. linear dos anteriores

Teorema

Se $v_1, \dots, v_n \in V$, $n \geq 2$, são vetores LD e se $v_1 \neq 0$, então existe $k \geq 2$ tal que v_k é combinação linear de v_1, \dots, v_{k-1} .

Demonstração.

- ▶ Como $v_1, \dots, v_n \in V$ são LD, existem α_i não todos nulos

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

- ▶ Seja k o maior índice tal que $\alpha_k \neq 0$.
- ▶ $k \geq 2$ (senão $0 = \alpha_1 v_1 \implies v_1 = 0$).
- ▶ $\therefore v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right) v_i$.



Exemplo para ilustrar o teorema

Verificar a dependência linear do conjunto B , e caso seja LD, encontre algum que seja combinação linear dos anteriores

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, -1, -1, -1)\}$$

Montando o sistema da combinação linear igual ao vetor nulo, como matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema é **indeterminado** (z é var. livre), portanto B é **LD**.

Do sistema, $x = -2z$, $y = z$, $w = 0$. Tomemos uma solução não nula (ex.: $z = 1$): $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 0$.

Chamando os vetores de v_1, v_2, v_3, v_4 :

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \implies v_3 = 2v_1 - v_2.$$

Num conj. LD, ao menos um é comb. linear dos anteriores

- ▶ **Corolário:** Se v_1, \dots, v_n são LI e v_1, \dots, v_n, x são LD, então x é combinação linear de v_1, \dots, v_n .