

## 4. ROBUSTEZA DA ESTABILIDADE

• Quão distante da perda de estabilidade?

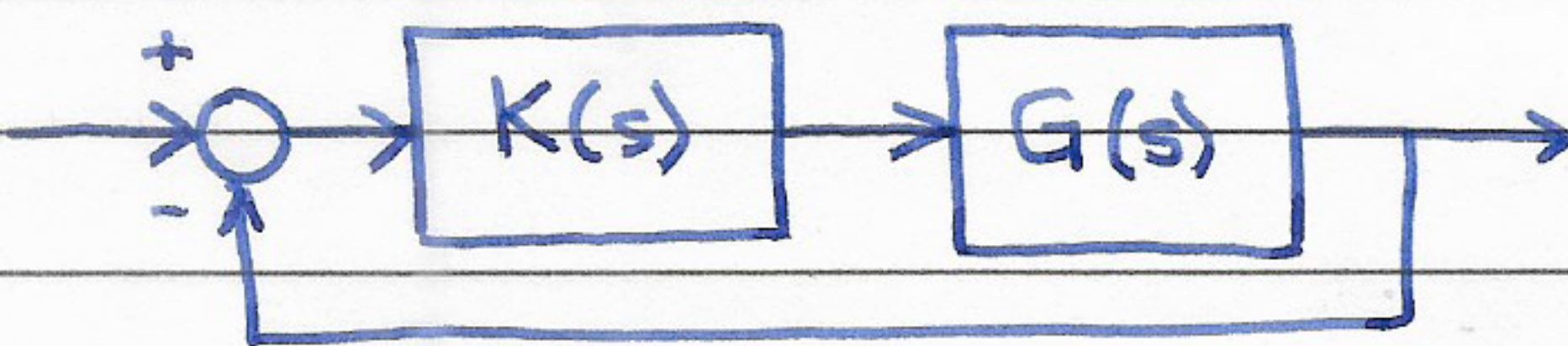
- Margens de ganho e fase  $\rightarrow$  rudimentar

-  $l_m$  / templates  $\rightarrow$  mais elaboradas

### 4.1 - O RESULTADO FUNDAMENTAL

• HIPÓTESE

Malha nominal é estável :



• HIPÓTESE

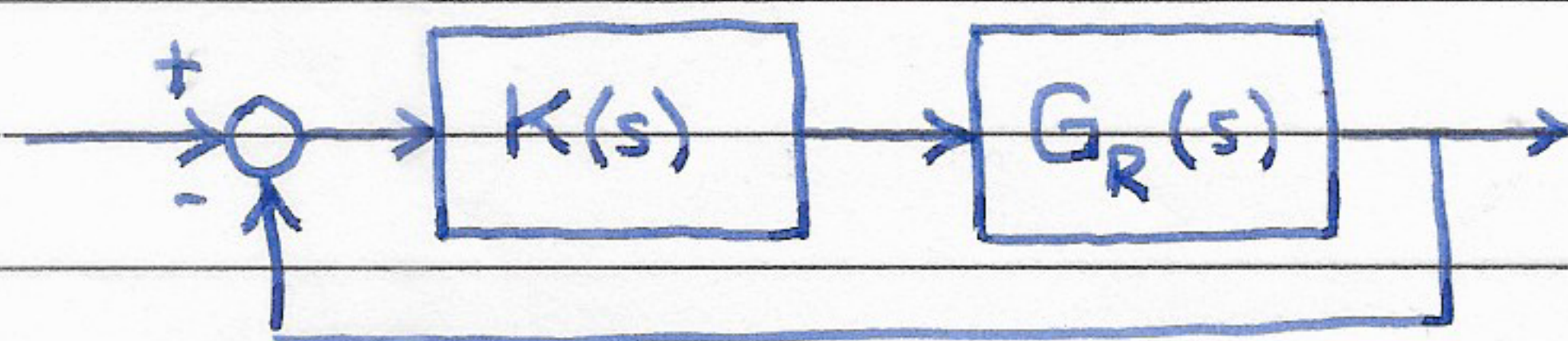
$G(s)$  e todos os  $G_R(s)$  têm o mesmo número

de polos instáveis

• QUESTÃO

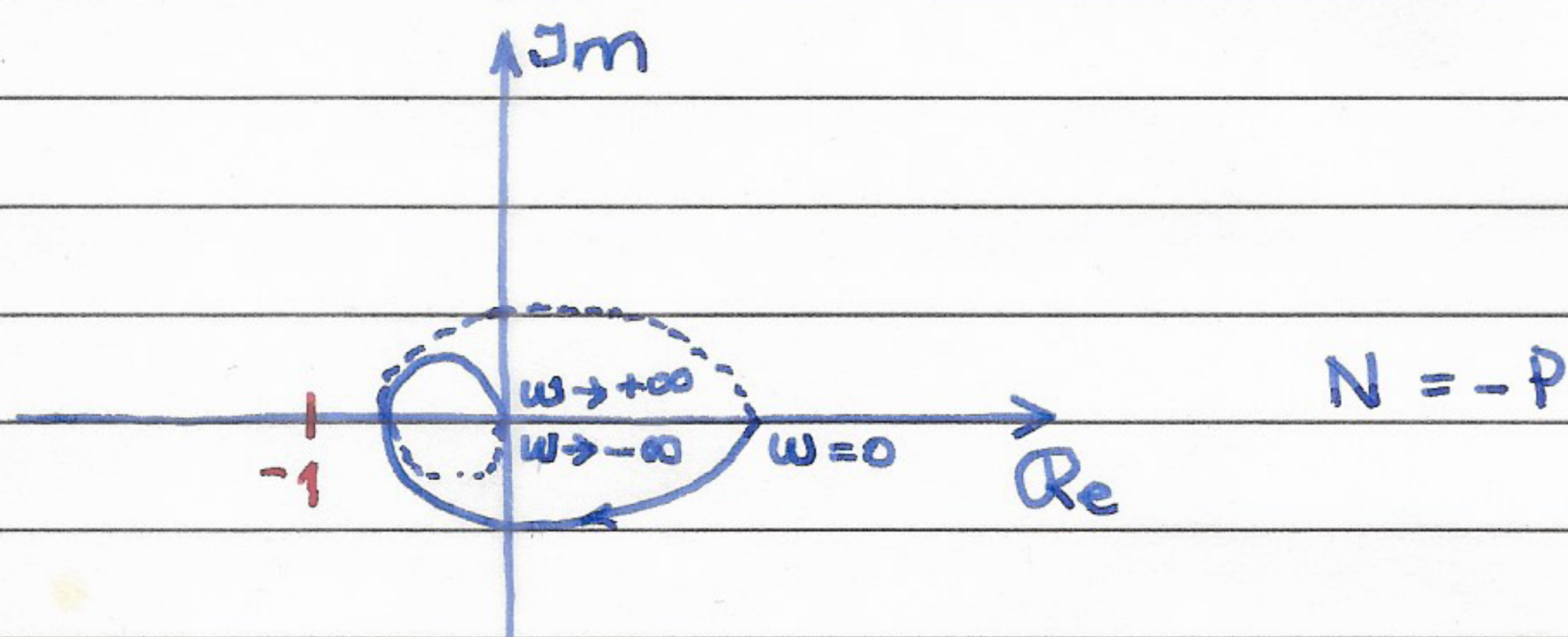
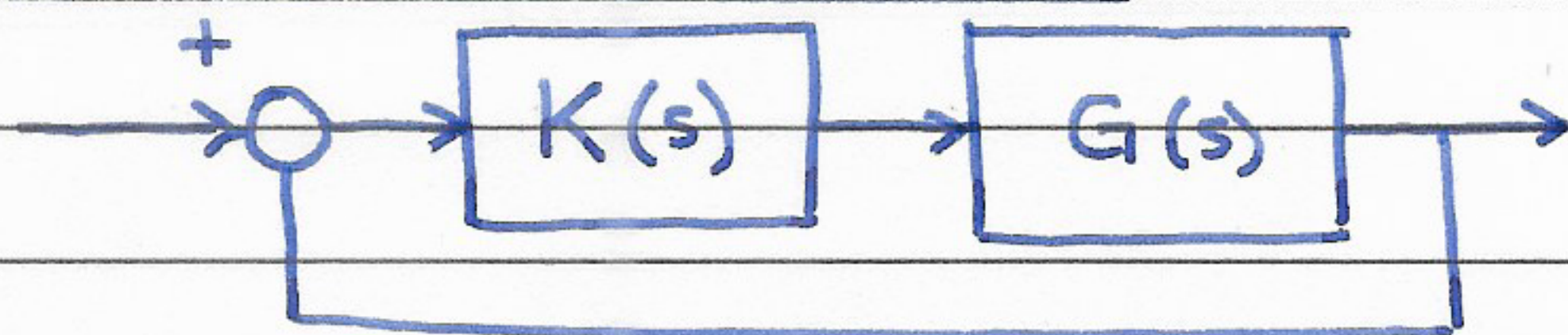
Em que condições são estáveis todas as malhas

- "reais" ?

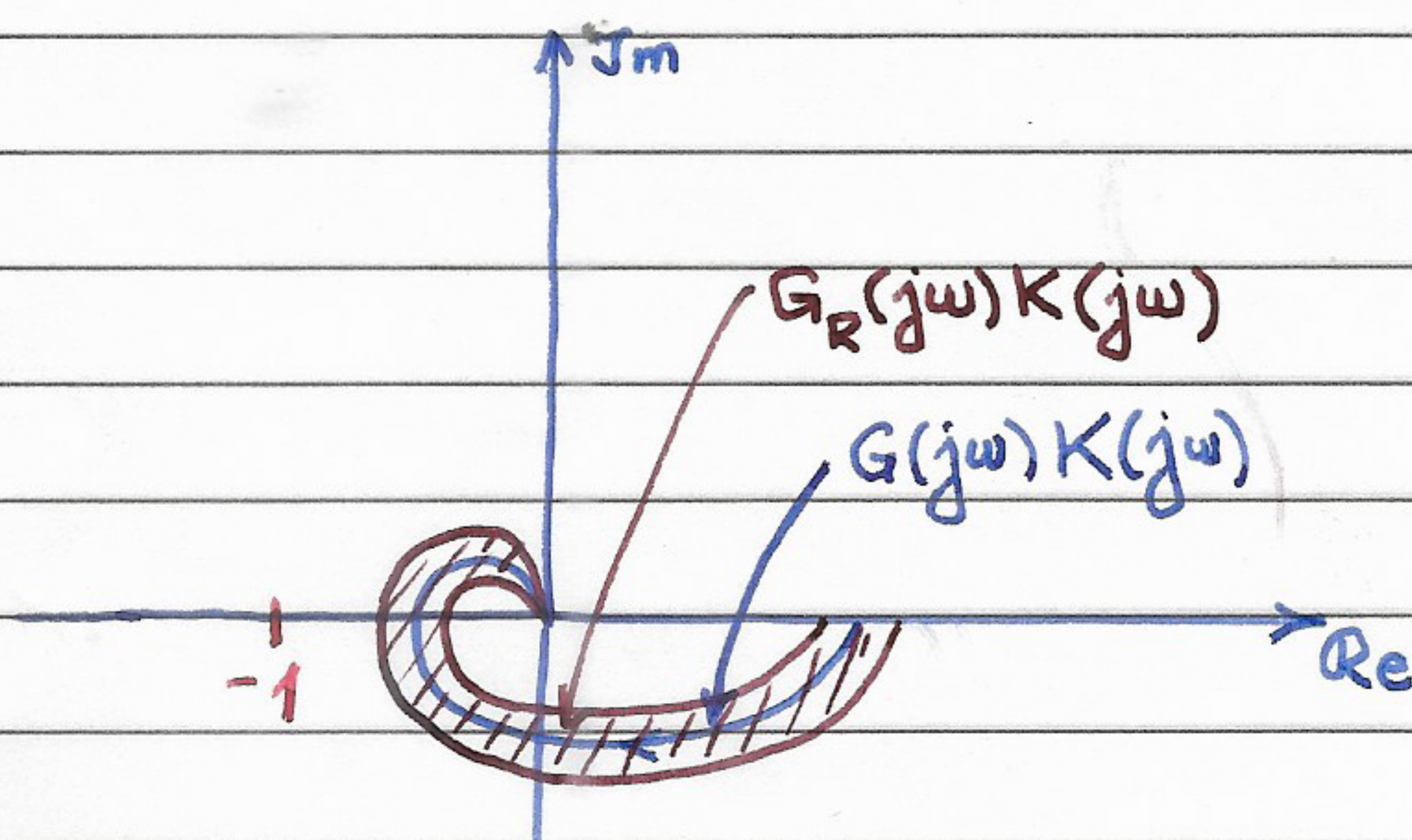
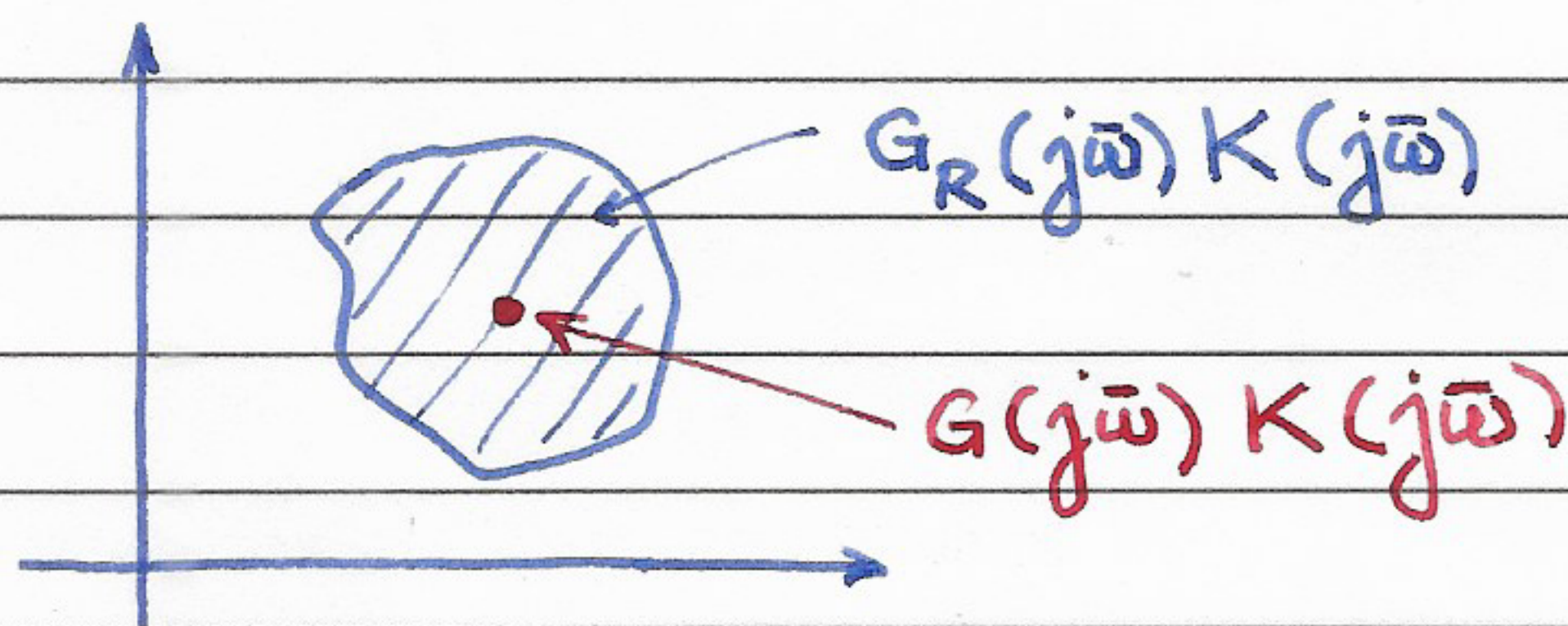


## ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE NO PLANO DE NYQUIST

- Malha nominal estável



- Malha real



Todas as malhas reais são estáveis se  $N = -P$ .  
(CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE)

### TEOREMA FUNDAMENTAL DA ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE

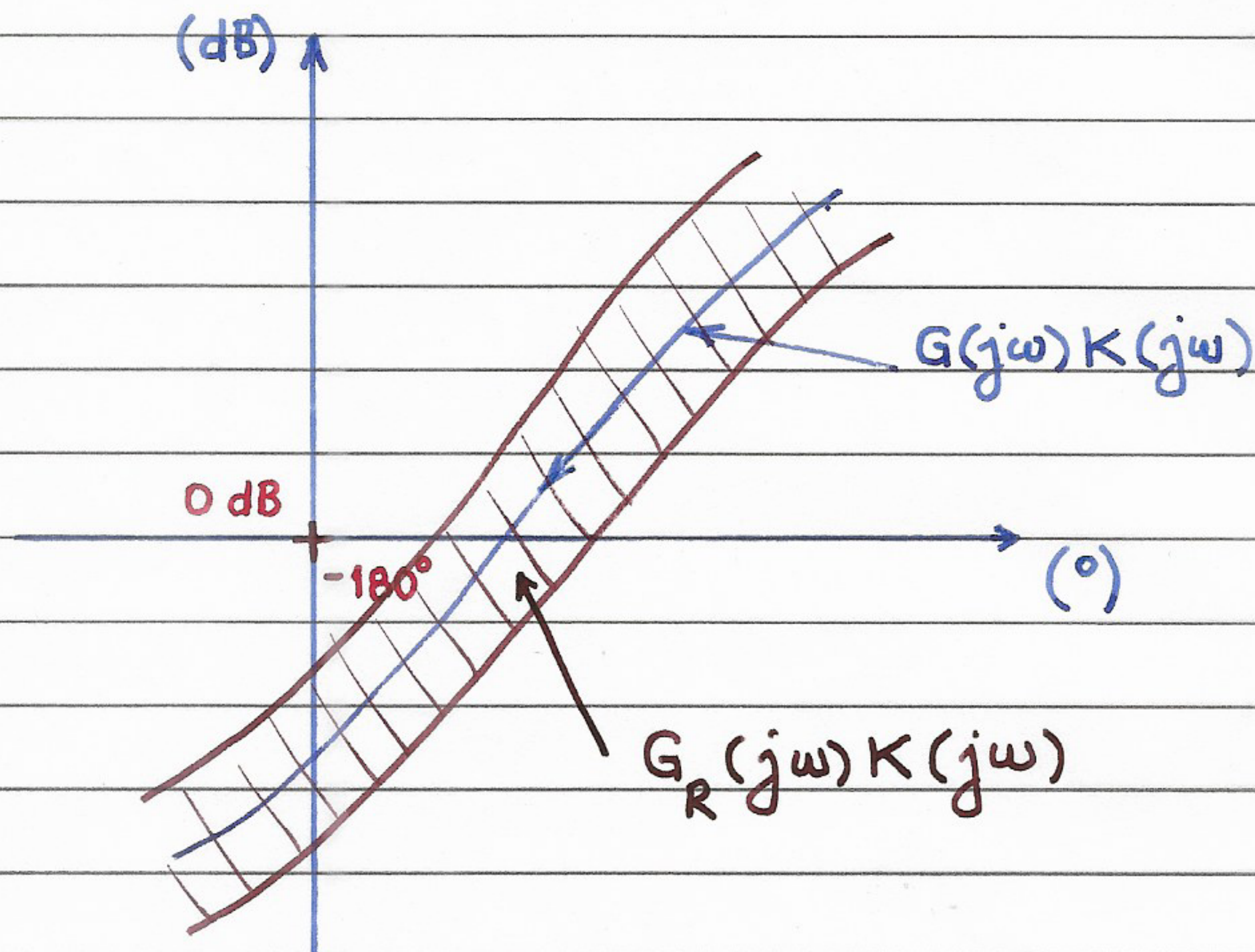
Condição suficiente : ponto -1 fora da área hachurada

## ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE NO PLANO DE NICHOLS

Plano de Nyquist

Plano de Nichols

$$-1+j0 \longleftrightarrow (-180^\circ, 0 \text{ dB})$$



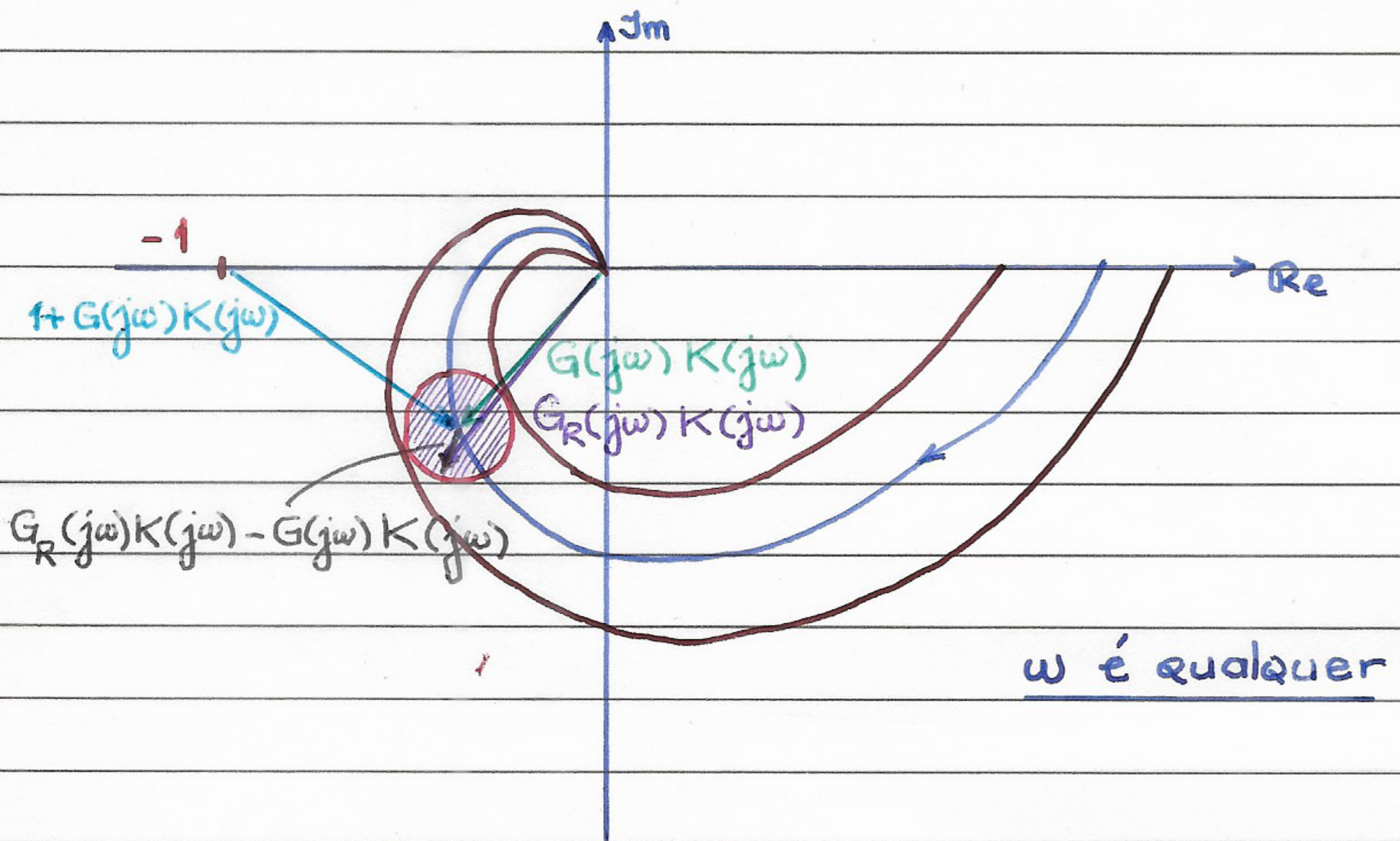
Condição suficiente: ponto  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  fora da área hachurada

### NOTA

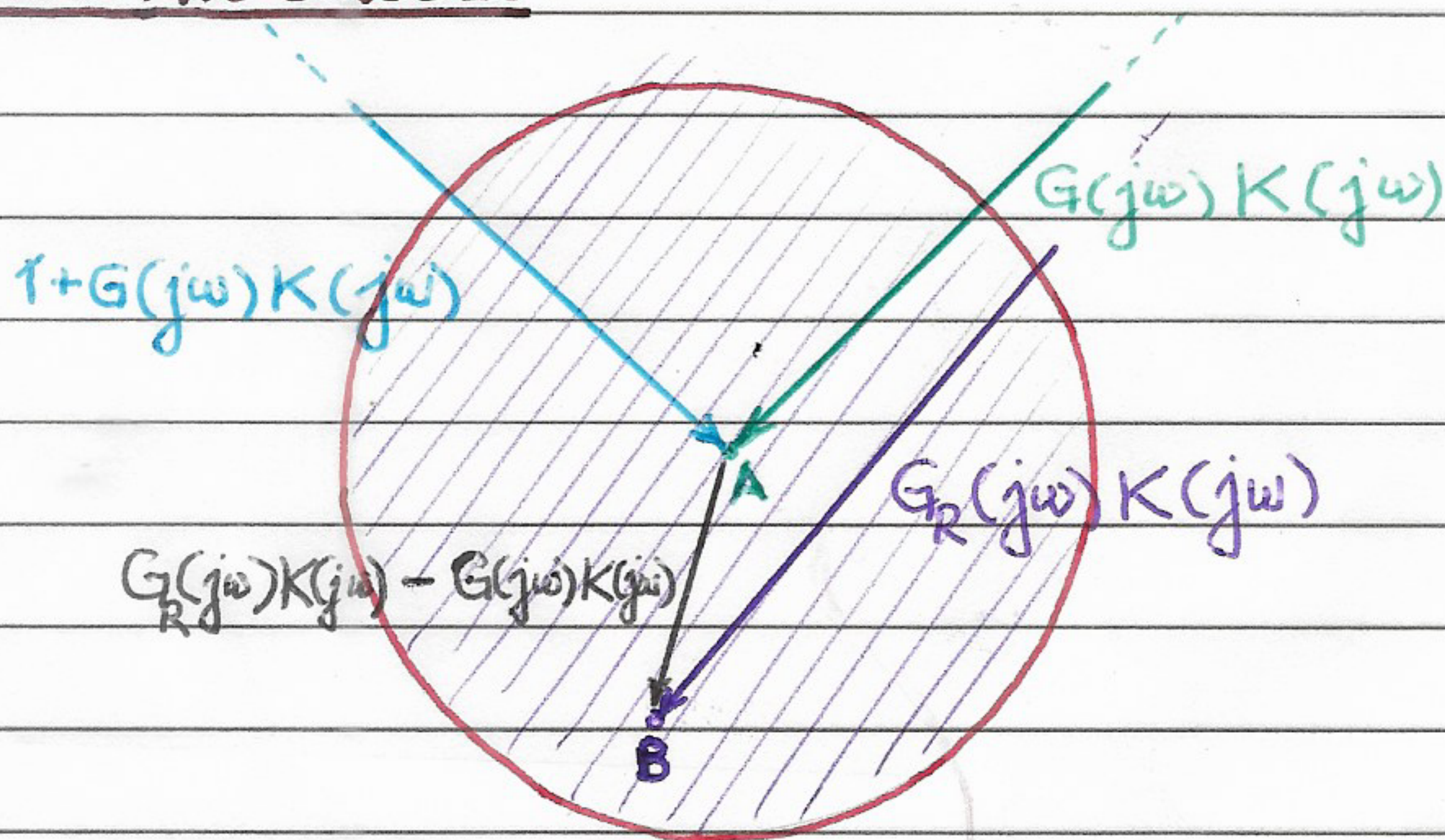
Para sistemas de fase mínima:

$$\left. \begin{array}{l} MG > 0 \\ MF > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Estabilidade em malha fechada}$$

## 4.2. CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE PARA INCERTEZA MULTIPLICATIVA



ZOOM NO CÍRCULO:



Condição para o ponto  $-1$  estar fora da área hachurada:

$$\underbrace{|G_R(j\omega)K(j\omega) - G(j\omega)K(j\omega)|}_{\text{DISTÂNCIA ENTRE "B" E "A"}} < \underbrace{|G(j\omega)K(j\omega) - (-1)|}_{\text{DISTÂNCIA ENTRE "A" E "(-1)"}} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

$$\therefore |G_R(j\omega)K(j\omega) - G(j\omega)K(j\omega)| < |1 + G(j\omega)K(j\omega)| \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Dividindo por  $|G(j\omega)K(j\omega)|$ :

$$\left| \frac{G_R(j\omega)K(j\omega) - G(j\omega)K(j\omega)}{G(j\omega)K(j\omega)} \right| < \left| \frac{1 + G(j\omega)K(j\omega)}{G(j\omega)K(j\omega)} \right| \quad (\forall \omega)$$

$\Delta_m(j\omega)$ 
 $\frac{1}{T(j\omega)}$

$$\therefore |\Delta_m(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

Mas  $\ell_m(\omega)$  é tal que:

$$|\Delta_m(j\omega)| \leq \ell_m(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

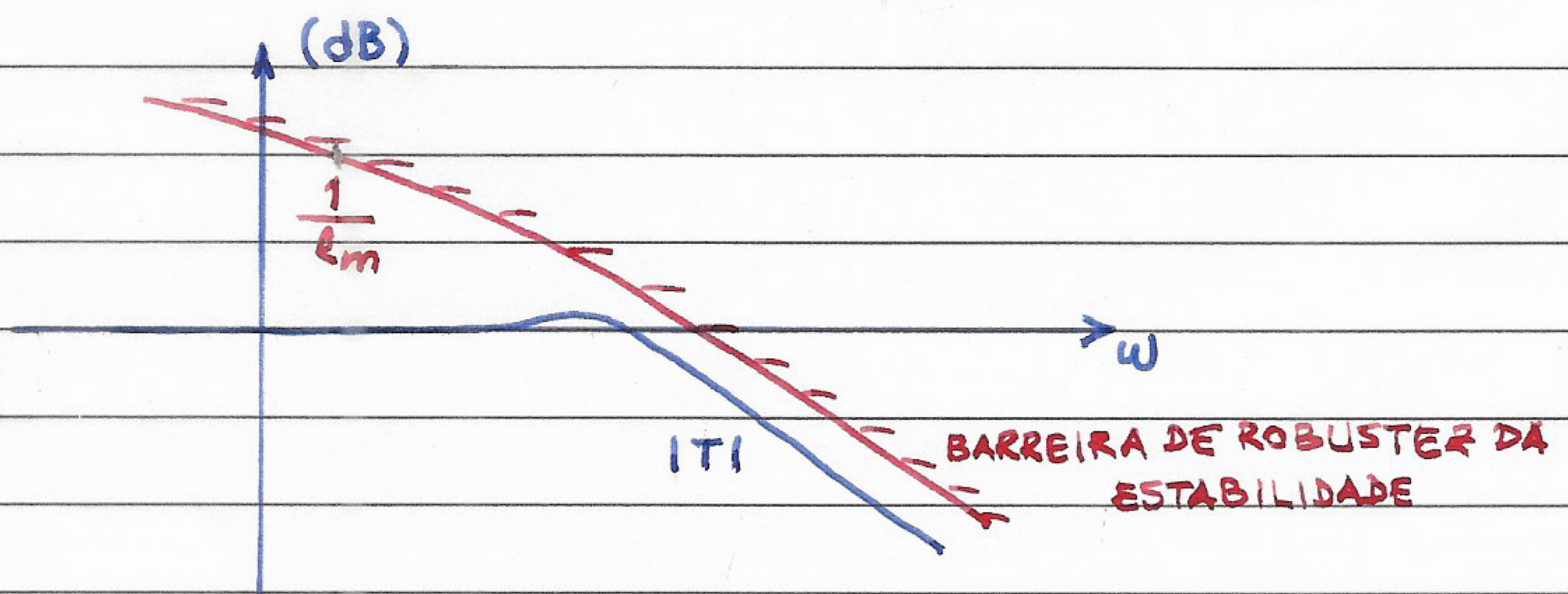
Portanto, para valer (\*), é suficiente que

$$\ell_m(\omega) < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

Ou seja:

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

CONDIÇÃO DE ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE ( $\ell_m$ )



## ATENÇÃO!

Para a robustez da estabilidade:

1) Estabilidade nominal

$$2) |T(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R})$$

## ANÁLISE EM ALTAS FREQUÊNCIAS

• Altas frequências:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow$$

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \approx G(j\omega)K(j\omega)$$

• Forma aproximada da Condição de Robustez

da estabilidade:

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)} \rightarrow |G(j\omega)K(j\omega)| < \frac{1}{\ell_m(\omega)}$$

( $\omega$  de alta frequência)

i.e.  $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$

• Útil para projeto porque escrita em termos de  $|GK|$

e porque, em geral,  $\ell_m$  é grande em altas frequências

## ANÁLISE EM BAIXAS FREQUÊNCIAS

- Baixas frequências:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow$$

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \approx 1$$

$$\therefore |T(j\omega)| \approx 1$$

- Condição de Robustez da Estabilidade :

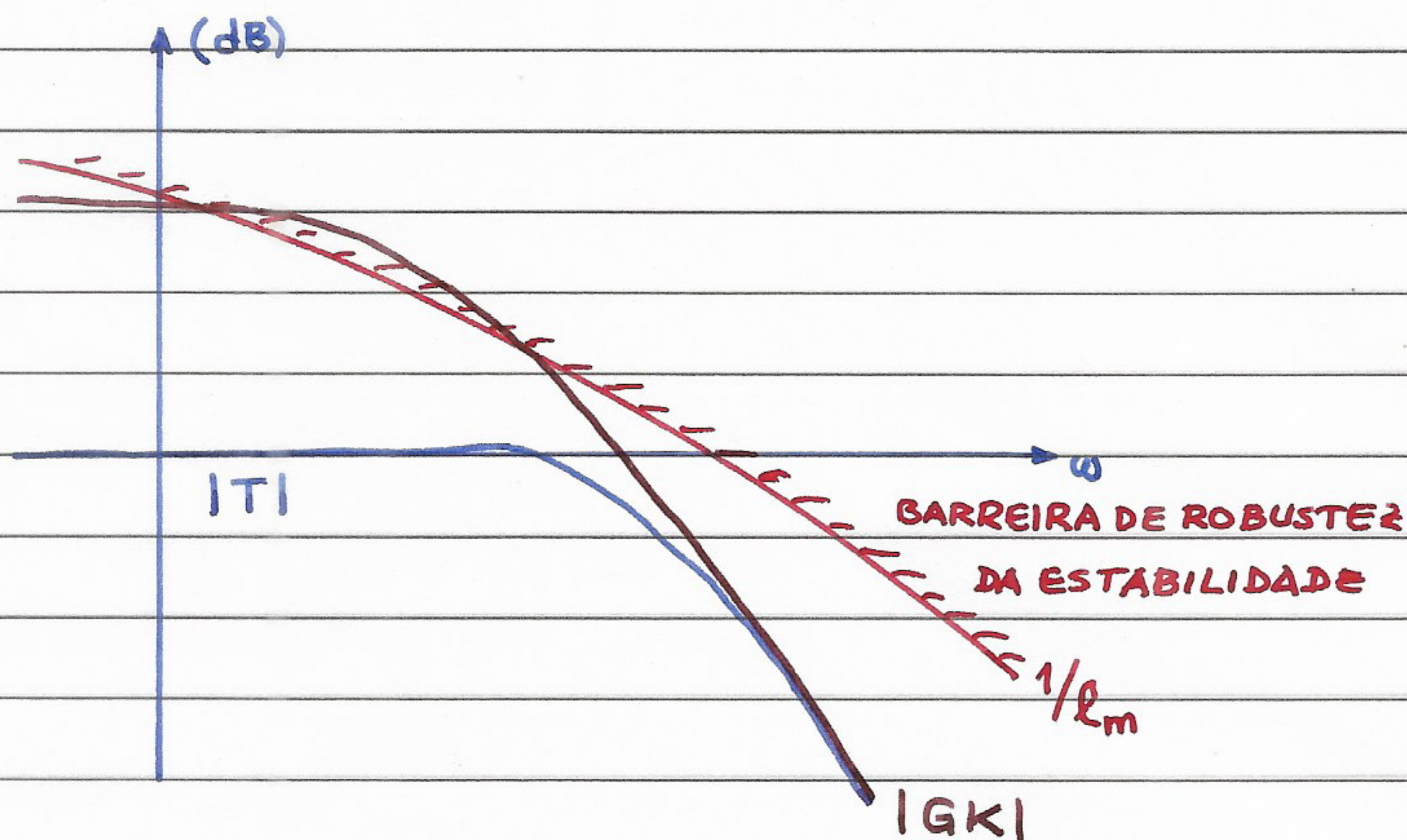
$$\underbrace{|T(j\omega)|}_{\approx 1} < \frac{1}{\ell_m(\omega)}$$

$$\therefore \ell_m(\omega) < 1 \quad (\omega \text{ em baixas frequências})$$

$$\therefore \left| \frac{G_R(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| < 1$$

Ou seja, erro relativo  $< 100\%$

## RESUMO



## BANDA PASSANTE E QUALIDADE DO MODELO NOMINAL

- Banda passante  $\leftrightarrow$  velocidade de resposta

- Melhorando o modelo  $\Rightarrow$

Barreira de robustez da estabilidade sobe  $\Rightarrow$

Maior banda passante ("bandwidth")  $\Rightarrow$

Maior velocidade de resposta

- Compromisso:

Qualidade do modelo x Largura de banda



## EFEITO DESESTABILIZANTE DE DINÂMICAS DE ALTAS FREQUÊNCIAS

- É um fato bastante citado em controle clássico

### EXEMPLO 4.1

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Polos: 0 e -1

$$G_R(s) = \frac{1}{s(0,001s^2 + s + 1)}$$

Polos: 0,  $\approx -1$ ,  $\approx -1000$

$$G_R(j\omega) = \frac{1}{j\omega [0,001(j\omega)^2 + (j\omega + 1)]}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)}$$

$\therefore$  para  $\omega$  suficientemente pequeno:

$$G_R(j\omega) \approx G(j\omega)$$

Para  $\omega$  suficientemente grande, o efeito da indutância não é desprezível  $\Rightarrow$  dinâmica de alta frequência não modelada