

Efeito Aharonov-Bohm

Aluno: **Yuri Asnis**

Seminário Eletrodinâmica Clássica I



11 de maio de 2021

Visão geral

- 1 **Eletrodinâmica**
 - Transformações de calibre
- 2 **Hamiltoniano**
 - Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética
- 3 **Mecânica quântica**
 - Transformações de calibre
- 4 **Juntando tudo**
 - O efeito Aharonov-Bohm

Transformações de calibre - eletrodinâmica

- Pela equação: $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$, podemos escrever \mathcal{B} como:

$$\boxed{\mathcal{B}(r;t) = \nabla \mathcal{A}(r;t)} \quad (1)$$

- E pela Lei de Faraday: $\nabla \times \mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{B}$, temos que:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\partial_t (\nabla \times \mathcal{A}) \quad \nabla \cdot (\mathcal{E} + \partial_t \mathcal{A}) = 0$$

tal que, podemos escrever \mathcal{E} como:

$$\boxed{\mathcal{E}(r;t) = -\nabla \Phi(r;t) - \partial_t \mathcal{A}(r;t)} \quad (2)$$

- Os campos \mathcal{B} e \mathcal{E} são invariantes sobre tais transformações:

$$\mathcal{B}(r;t) = \mathcal{B}^0(r;t) \quad \mathcal{E}(r;t) = \mathcal{E}^0(r;t) \quad (3)$$

$$\mathcal{A}(r;t) = \mathcal{A}^0(r;t) + \nabla \chi(r;t) \quad (4)$$

- Onde $\chi(r;t)$ é uma função qualquer do espaço e do tempo, chamada de *campo de calibre*

Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética

- Vamos demonstrar rapidamente o Hamiltoniano de uma partícula de massa m e carga q sob ação de campos \mathcal{E} e \mathcal{B} .
- Começamos pela equação de movimento não-relativística

$$\mathcal{F} = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}) \quad (5)$$

- Utilizando os potenciais dados por 1 e 3, ficamos com:

$$\mathcal{F} = q[\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \partial_t \mathcal{A} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathcal{A})] \quad (6)$$

- Usando as seguintes propriedades:

- Derivada convectiva: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$
- Propriedade vetorial: $\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathcal{A}) = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathcal{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathcal{A}$

- Então, ficamos com:

$$\mathcal{F} = \nabla \cdot q(\Phi - \mathbf{v} \times \mathcal{A}) - q \frac{d\mathcal{A}}{dt} \quad (7)$$

Formalismo Hamiltoniano da Interação Eletromagnética

- Definindo a energia potencial como sendo $U = q(\Phi - v \cdot \mathcal{A})$, a força de Lorentz fica:

$$\mathcal{F} = -\nabla U - q \frac{d\mathcal{A}}{dt} \quad (8)$$

- A Lagrangiana que descreve o movimento da partícula sob a ação da força \mathcal{F} é dada por:

$$L = T - q\Phi + qv \cdot \mathcal{A} \quad (9)$$

- Tal qual, o momento conjugado é definido como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Após uma transformação de Legendre, conseguimos expressar o Hamiltoniano desse sistema:

$$H = \frac{1}{2m} (p - q\mathcal{A})^2 + q\Phi \quad (10)$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Sabemos que os observáveis não se alteram quando fazemos uma mudança de **fase global** em nossa função de onda,

$$\psi(r;t) = e^{i\theta} \psi^0(r;t) \quad (11)$$

- Quais são as consequências de uma mudança de **fase local** em nossa função de onda?

$$\psi(r;t) = e^{i\theta(r;t)} \psi^0(r;t) \quad (12)$$

- Claro que $\nabla_j \psi^2 = \nabla_j \psi^2$, mas e a equação de Schrodinger? Utilizando a hamiltoniana obtida em 10,

$$\frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - q\mathcal{A})^2 \psi + q\Phi \psi = i\hbar \partial_t \psi \quad (13)$$

$$\frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - q\mathcal{A}^0)^2 \psi^0 = (i\hbar \partial_t - q\Phi^0) \psi^0 \quad (14)$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Queremos encontrar quais as transformações \mathcal{A}^θ e Φ^θ da equação 14 que deixem a equação de Schrodinger invariante.
 - Sejam: $\mathcal{A}^\theta = \mathcal{A} + \Delta \mathcal{A}$ e $\Phi^\theta = \Phi + \Delta \Phi$ tais que, para os campos \mathcal{E} e \mathcal{B} sejam invariantes, devemos ter

$$\nabla \times \mathcal{A} = 0 \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{16}$$

- Substituindo \mathcal{A}^θ , Φ^θ e θ na equação 14, ficamos com:

$$\frac{1}{2m} \left(i \nabla - q \mathcal{A} - q \Delta \mathcal{A} \right)^2 e^{i\theta} = \left(i \frac{\partial}{\partial t} - q \Phi - q \Delta \Phi \right) e^{i\theta} \tag{17}$$

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Manipulando um pouco a equação 17, obtemos

$$\frac{1}{2m} (i\hbar\nabla - q\mathcal{A} - q\mathcal{A} - \hbar\nabla)^2 = (i\hbar\partial_t - q\Phi - q\Phi + \hbar\partial_t) \quad (18)$$

- Logo, comparando as equações 18 e 13, para a equação de Schrodinger ser invariante devemos ter que:

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar}{q}\nabla \quad (19)$$

$$\Phi = \frac{\hbar}{q}\frac{\partial}{\partial t} \quad (20)$$

- Onde \mathcal{A} e Φ satisfazem as condições 15 e 16.

Transformações de calibre - mecânica quântica

- Obtidas as transformações que deixam a equação de Schrodinger invariantes, \mathcal{A} e $(r; t)$, para encontrar a relação deles com o campo de calibre $(r; t)$, basta comparar as transformações \mathcal{A}^θ e Φ^θ com as equações 4 e 3.
- Assim, obtemos que:

$$\boxed{\mathcal{A}^\theta = \mathcal{A} + \nabla} ; \quad \boxed{\Phi^\theta = \Phi - \partial_t} ; \quad \boxed{(r; t) = \frac{q}{\hbar} (r; t)} \quad (21)$$

- Portanto, a transformação de calibre é uma simetria da equação de Schrodinger - todos os observáveis permanecem os mesmos, independentemente da escolha dos potenciais EM e função de onda. Ou seja, as equações 13 e 14 são equivalentes.

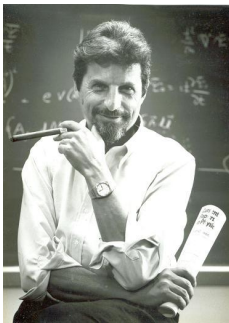
Observáveis

- O único observável na teoria clássica do Eletromagnetismo é a força de Lorentz, que é descrita pelos campos elétricos e magnéticos.
- Podemos introduzir potenciais eletromagnéticos para simplificar os cálculos, porém eles não são observáveis com realidade física.
- Em contraste, na Mecânica Quântica, tais potenciais eletromagnéticos aparentam ser mais fundamentais que os campos. Mostraremos isso através do efeito Aharonov-Bohm.



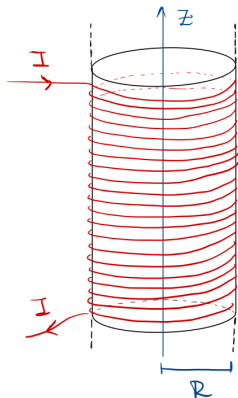
Aharonov e Bohm

- O efeito dos potenciais EM em fenômenos quânticos foi proposto em 1959 por Yakir Aharonov e David Bohm.
- Entender o que acontece com a função de onda quando imersa em uma região livre de campos eletromagnéticos, porém com a presença dos potenciais.



Potencial \mathcal{A} de um solenóide

- Vamos calcular o potencial vetor de um solenóide infinito, com n voltas por unidade de comprimento, raio R e que transporta uma corrente I .



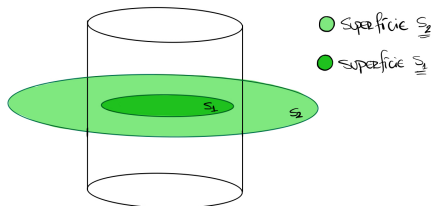
- Se tentarmos calcular \mathcal{A} por:

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J(\mathbf{r}')}{r - r'} d\mathbf{r}' \quad (22)$$

chegaremos em uma divergência, pois o solenóide é infinito.

- Vamos usar o teorema de Stokes, dado que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathcal{A}$

Potencial \mathcal{A} de um solenóide



- Integrando em uma superfície S , temos que:

$$\iint_S \mathcal{B} \, ds = \Phi_B = \iint_S (\nabla \cdot \mathcal{A}) \, ds$$

- Usando o teorema de Stokes,

$$\int_{\Gamma(S)} \mathcal{A} \cdot d\vec{r} = \Phi_B^S \quad (23)$$

Potencial \mathcal{A} de um solenóide

- Superfície interna S_1 ($r < R$)
 - $\Phi_B = \mu_0 n I \pi r^2$
 - $\mathcal{A} = A \hat{e}_z$ e $d\mathcal{A} = d\mathcal{A} \hat{e}_z$
 - Então a equação 23 fica:

$$2\pi r A = \mu_0 n I \pi r^2$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{in}(r) = \frac{\mu_0 n I}{2} r \hat{e}_z} \quad (24)$$

- Superfície externa S_2 ($r > R$)
 - $\Phi_B = \mu_0 n I \pi R^2$
 - $\mathcal{A} = A \hat{e}_z$ e $d\mathcal{A} = d\mathcal{A} \hat{e}_z$
 - Então a equação 23 fica:

$$2\pi r A = \mu_0 n I \pi R^2$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{out}(r) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \hat{e}_z} \quad (25)$$

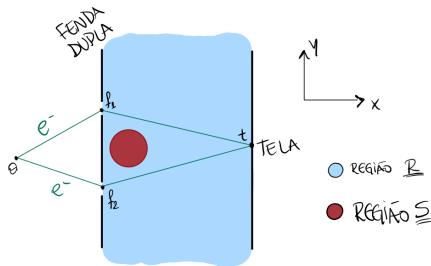
Vemos que, mesmo não havendo campo magnético fora do solenóide, há potencial vetor!

O efeito Aharonov-Bohm

- Vamos considerar a dinâmica de uma partícula não-relativística que tem carga q na presença apenas de um campo magnético estático $\mathcal{B}(r)$
- Como $\mathcal{E} = 0$ e $\partial_t \mathcal{A} = 0$ então $\Phi = cte = 0$. Logo, a equação 13 fica somente

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{iq}{\hbar} \mathcal{A} \psi = i\hbar \partial_t \psi \quad (26)$$

Aparato experimental - dupla fenda



- Região S e R são desconexas
- Região S: solenóide infinito ($\mathcal{B} \neq 0$)
- Região R: livre de campos ($\mathcal{B} = 0$)

O efeito Aharonov-Bohm

- Vamos supor que sabemos a solução $\psi_0(r; t)$ da equação de Schrodinger para uma partícula livre ($\mathcal{A} = 0$)
- O que podemos falar sobre a solução $\psi(r; t)$ da equação 26?
 - Se a partícula estiver com nada na região R, então a solução será dada por

$$\psi(r; t) = \exp\left[i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^r \mathcal{A}(r^0) dr^0\right] \psi_0(r; t) \quad (27)$$

- Como $\mathcal{B} = 0$ em R ! $\nabla \times \mathcal{A} = 0$! $\mathcal{A} = \nabla \phi$
- Integrando de uma origem \mathcal{O} até uma posição r , e definindo $\phi(\mathcal{O}) = 0$

$$\phi(r) = \int_{\mathcal{O}; \mathcal{C}}^r \mathcal{A}(r^0) dr^0 \quad (28)$$

- Onde dr^0 é elemento de linha infinitesimal tangente à curva \mathcal{C} que está na região R.

O efeito Aharonov-Bohm

- Sendo a partícula em questão o elétron ($q = -e$) e substituindo o resultado 28 em 27, ficamos com

$$\psi(r; t) = \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{O;C}^Z \mathcal{A}(r^\theta) dr^\theta \right] \psi_0(r; t) \quad (29)$$

- A função de onda 29 satisfaz a equação 26

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- Suporemos no nosso aparato experimental que um feixe coerente de elétrons com um comprimento de onda de De Broglie λ_e definido chegue à fenda dupla.
- Suporemos também que λ_e é muito maior que o diâmetro do solenóide, assim, os elétrons não o "enxergarão" e poderemos utilizar 27.
- Após passarem pelas fendas f_1 e f_2 (localizadas em r_1 e r_2 , respectivamente), os elétrons atingirão a tela fotográfica em r_t .
- A função de onda $\psi(r_t; t)$ é dada pela superposição das ambas funções de ondas correspondentes a propagação pelas duas fendas.

$$\psi(r_t; t) = e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{O;C_1}^{r_t} \mathcal{A}(r^0) dr^0} \psi_1(r_t; t) + e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{O;C_2}^{r_t} \mathcal{A}(r^0) dr^0} \psi_2(r_t; t) \quad (30)$$

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- Podemos colocar um dos fatores de fase em evidência:

$$= e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{O;C_2}^{r_t} \mathcal{A}(r^0) dr^0} \int_{r_1}^{r_t} \mathcal{A} dr^0 + e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{O;C_1}^{r_t} \mathcal{A} dr^0} \int_{O;C_2}^{r_t} \mathcal{A} dr^0 \quad (31)$$

$$= e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{O;C_2}^{r_t} \mathcal{A}(r^0) dr^0} \int_{r_1}^{r_t} \mathcal{A} dr^0 + e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{O;C_1}^{r_t} \mathcal{A} dr^0} \int_{r_t;C_2}^{O} \mathcal{A} dr^0 \quad (32)$$

$$= e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{O;C_2}^{r_t} \mathcal{A}(r^0) dr^0} \int_{r_1}^{r_t} \mathcal{A} dr^0 + e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_C^H \mathcal{A} dr^0} \int_{r_t}^{O} \mathcal{A} dr^0 \quad (33)$$

- Onde, C é um contorno fechado que liga O r_1 r_t r_2 O e se encontra puramente na região R .
- Aqui se encontra a surpresa, utilizando o teorema de Stokes,

$$\int_C \mathcal{A} dr^0 = \iint_{S(C)} \mathcal{B} \cdot ds = \Phi_B^S - \Phi \quad (34)$$

O efeito Aharonov-Bohm: finalmente

- S é a superfície cujo contorno é dado por \mathcal{C} e ds é um elemento infinitesimal de área de S .
- Por mais que \mathcal{C} se encontra na região livre de campos (região R), a superfície S é "perfurada" pelo campo magnético do solenóide.
- Portanto, a função de onda na tela é dado por

$$\psi(r_t; t) = e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{\mathcal{O}; C_2}^R \mathcal{A} dr^0} \left[\psi_2(r_t; t) + e^{-\frac{ie}{\hbar} \Phi} \psi_1(r_t; t) \right] \quad (35)$$

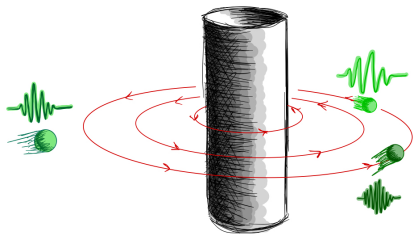
- A probabilidade de achar um elétron em um volume infinitesimal na posição da tela é dada por:

$$P(r_t; t) = \int |\psi(r_t; t)|^2 dV = \int |\psi_2(r_t; t) + e^{-\frac{ie}{\hbar} \Phi} \psi_1(r_t; t)|^2 dV \quad (36)$$

- Observa-se da equação 36 que, caso não haja corrente no solenóide, então o padrão de interferência será dado por $|\psi_1 + \psi_2|^2$. Quando liga-se uma corrente, haverá um deslocamento das franjas de interferência.

Conclusão

- Vimos que existem propriedades interessantes para o potencial vetor magnético no regime quântico .
- Ao contrário da mecânica clássica, existem efeitos dos potenciais em partículas carregadas, mesmo em regiões onde os campos (e portanto as forças na partícula) são nulos .
- A simetria de calibre articula como os potenciais EM devem se acoplar com as funções de ondas que descrevem partículas.



Referências

- <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.115.485>
- <https://arxiv.org/pdf/2010.12010.pdf>
- *Quantum Mechanics applied to Atoms and Light*, Ph. W. Courteille, IFSC/USP