

# **Equações de Maxwell-London: Descrição Fenomenológica de Supercondutores**

Instituto de Física da USP

Curso de Eletrodinâmica Clássica I

Prof<sup>o</sup>: Luis Raul Weber Abramo

Aluno: Samuel Jorge

Bacharel e Mestre em Física Teórica -UFSC

# Sumário:

- 1. Equações de London
- 2. Condutividade Perfeita e Diamagnetismo Perfeito de Supercondutores
- 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito
- 4. Exemplo envolvendo as Equações de London
- 5. Conclusão
- 6. Bibliografia

# 1. Equações de London

- Podemos tratar um Supercondutor partindo do conceito de Condutividade Perfeita (Seção 2) e fazendo uma modificação adequada para incluir o efeito Meissner (Exclusão de Fluxo Magnético).
- Num Condutor Perfeito (não num Supercondutor) os portadores de carga não experimentam forças retardadoras; como consequência, em um Campo Elétrico  $\mathbf{E}$ , eles se movem de acordo com a 2ª Lei de Newton:

$$\bullet \quad m_p \dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \quad (1.1)$$

- Como a Densidade de Corrente  $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ , de (1.1) temos:

$$\bullet \quad \mathbf{j} = \frac{nq^2}{m_p} \mathbf{E} \quad (1.2)$$

- Tomando o Rotacional de (1.2) e usando a Lei de Faraday,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ :

$$\bullet \quad \nabla \times \mathbf{j} = -\frac{nq^2}{m_p} \dot{\mathbf{B}} \quad (1.3)$$

# 1. Equações de London

- Supondo que os Campos variem lentamente (podemos desprezar a Corrente de Deslocamento,  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ) e usando  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  para eliminar  $\dot{\mathbf{J}}$ , temos:

$$\bullet \nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -\frac{nq^2}{m_p} \dot{\mathbf{B}} \quad (1.4)$$

- Considerando que  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  com  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , obtemos:

$$\bullet \nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{nq^2}{m_p} \dot{\mathbf{B}} \quad (1.5)$$

# 1. Equações de London

- Na Equação anterior, obtemos que o Laplaciano da Derivada Temporal de  $\mathbf{B}$  é proporcional a própria Derivada Temporal de  $\mathbf{B}$ . Fazendo-se uma analogia entre uma Chapa Supercondutora e um Condutor Perfeito estendendo-se no plano  $z = 0$  e considerando somente a Componente  $x$ ,  $\dot{B}_x$  temos de (1.5):

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \dot{B}_x}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{nq^2}{m_p} \dot{B}_x \quad (1.6)$$

- Considerando a região  $z \geq 0$  para dentro do supercondutor, temos a seguinte Solução:

$$\bullet \quad \dot{B}_x = A \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu_0 nq^2}{m_p}} z\right) \quad (1.7)$$

- Vemos de (1.7) que o fator  $\sqrt{\frac{\mu_0 nq^2}{m_p}}$  tem dimensão do recíproco de comprimento. Para um elétron típico é da ordem de  $10^{-8}$  m. De (1.5) vemos que no interior de um Condutor Perfeito, a derivada Temporal de  $\mathbf{B}$  decai Exponencialmente com a Distância da Superfície. No entanto, vemos que a analogia entre um Condutor Perfeito e um Supercondutor não leva a exclusão do Fluxo (Efeito Meissner). Se a Equação (1.5) descrevesse o comportamento de  $\mathbf{B}$  ao invés de  $\dot{\mathbf{B}}$ , então o próprio  $\mathbf{B}$  decresceria Exponencialmente da Superfície até zero no interior de um Supercondutor. Esta foi a motivação teórica sobre o comportamento Eletromagnético dos Supercondutores desenvolvida por F. e H. London [1].

# 1. Equações de London

- Na Teoria proposta por London, foi considerado que a Corrente Total poderia ser composta por uma Supercorrente  $\mathbf{J}_S$ , uma Corrente Dissipativa  $\mathbf{J}_{diss}$  e uma Corrente de Deslocamento  $\mathbf{J}_{desl}$ :

$$\bullet \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{diss} + \mathbf{J}_{desl} \quad (1.8)$$

- A Equação Constitutiva de London:

$$\bullet \quad \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.9)$$

- De (1.8), das Equações de Maxwell e de (1.9) pode-se mostrar [2] que para Frequências menores do que  $10^{11}$  Hz, ambas  $\mathbf{J}_{diss}$  e  $\mathbf{J}_{desl} \approx 0$ . Isto é válido no caso de Correntes Estacionárias. A Supercorrente  $\mathbf{J}_S$  inclui tanto a Corrente de Transporte como de Magnetização, conseqüentemente, da Equação de Maxwell, temos:

$$\bullet \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_S \quad (1.10)$$

- London *postulou* que:

$$\bullet \quad \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_S = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.11)$$

- Em analogia com a Equação (1.5) que relacionava as Derivadas Temporais de  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{B}$ . London introduziu na Equação (1.11) uma Profundidade de Atenuação Fenomenológica  $\lambda$ , como Parâmetro Específico, característico do Material Supercondutor. A Equação (1.11) leva ao Efeito Meissner, para incluir a Condutividade Infinita. London também *postulou* que:

$$\bullet \quad \mu_0 \dot{\mathbf{J}} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{E} \quad (1.12)$$

- As Equações (1.8), (1.11), (1.12) mais as Equações de Maxwell, são conhecidas como *Equações de Maxwell-London*.

# 1. Equações de London

- As Equações (1.10) e (1.11) podem ser combinadas dando:

$$\bullet \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.13)$$

- A Equação (1.13) pode ser escrita:

$$\bullet \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.14)$$

- Uma vez que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , temos:

$$\bullet \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.15)$$

- A Solução de (1.15) para uma Chapa Supercondutora Semi-Infinita é:

$$\bullet \quad B_x(z) = B_{x0} e^{-z/\lambda} \quad (1.16)$$

- A Equação (1.15) indica que  $\mathbf{B}$  ao invés de  $\dot{\mathbf{B}}$ , cai exponencialmente à medida que penetra na Chapa Supercondutora (Generalização de  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  no interior de um Supercondutor).
- A Profundidade de Atenuação  $\lambda$  foi introduzida por London como um *Parâmetro Fenomenológico*. Entretanto, existem várias Teorias que procuram determinar sua Magnitude. Em Laboratório, as primeiras experiências que tiveram êxito, feitas com um Coloide de Mercúrio, foram realizadas por D. Shoenberg, em 1939. Tais experiências demonstraram que o Campo Magnético penetrava nas Esferas Supercondutoras e que a Profundidade de Penetração depende da Temperatura. Não existe  $\mathbf{J}_M$  na Teoria de London, apenas uma Supercorrente total  $\mathbf{J}_S$ , o qual, se distribui sobre uma fina Camada Superficial e decresce Exponencialmente para o interior.

## 2. Condutividade Perfeita e Diamagnetismo Perfeito de Supercondutores

- Breve Histórico da Supercondutividade:
- 1.911: Experiência de H. Kammerlingh Onnes: Supercondutores possuem Condutividade Infinita.
- 22 anos depois em 1.933: Experiência de W. Meissner e R. Ochsenfeld: Exclusão de Fluxo para  $H \leq H_c$  – Efeito Meissner → Campo Magnético  $\mathbf{B}$  nulo: Supercondutores apresentam Permeabilidade nula ou Susceptibilidade Diamagnética Perfeita  $\chi_m = -1$ .
- 1.957: As duas Propriedades acima devem emergir de Teorias Microscópicas da Supercondutividade, Ex.: Teoria Quanto-Mecânica de BCS por J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer.
- Analogia entre um Supercondutor e um Condutor Perfeito em um Campo Magnético → Condutividade Perfeita não implica em exclusão do Fluxo Magnético:  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  deve ser *Postulado* separadamente.



### 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito

- Esfera Supercondutora de Raio  $a$  num Campo Assintoticamente Uniforme  $B_0 \hat{\mathbf{z}}$ .
- Primeira Formulação: O Supercondutor é tratado como um *Material Magnético*.
- Condições de Contorno na Esfera:

- **No Exterior:** 
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} \rightarrow B_0 \hat{\mathbf{z}}, r \rightarrow \infty \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array} \right.$$

# 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito

- **No Interior:** 
$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \mathbf{H} = -\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \text{ (não há pólos)} \end{cases}$$
- Em  $r = a$ : 
$$\begin{cases} B_r \text{ é Contínuo} \\ H_\theta \text{ é Contínuo} \end{cases}$$
- Equação de Laplace  $\rightarrow$  Potenciais Escalares Magnéticos dentro e fora do Supercondutor:
- $$\varphi_{ext}^* = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$
- $$B_r = B_0 \cos \theta + \mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) c_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta), \text{ (no Exterior)}$$
- $$\varphi_{int}^* = -\frac{3 B_0}{2 \mu_0} r \cos \theta$$
- $B = 0, \text{ (no Interior)}$

### 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito

- Como  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  no Interior e  $B_r$  é Contínuo em  $r = a$ , todos os  $c_l$  devem ser nulos exceto  $c_1 = -B_0 a^3 / 2\mu_0$ . Para  $r > a$ :
- **No Exterior:**  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = B_0 \hat{\mathbf{z}} - B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- **No Interior:**
- $\mathbf{B} = \mathbf{0}, \mathbf{H} = \frac{3 B_0}{2 \mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{M} = -\frac{3 B_0}{2 \mu_0} \hat{\mathbf{z}}$
- Em  $r = a$ :
- $\mathbf{J}_M = -\frac{3 B_0}{2 \mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$

### 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito

- Segunda Formulação: Idêntico a Primeira Formulação na Região Externa mas toma a forma  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$  na Região Interna:
- **No Exterior:**  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = B_0 \hat{\mathbf{z}} - B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- **No Interior:**  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$
- Em  $r = a$ :  $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{ext} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \hat{\mathbf{r}}$

### 3. Exemplo envolvendo Exclusão de Fluxo Perfeito

- Comparação entre as duas Formulações:
- Na Região Externa, ambas as Formulações são idênticas.
- Na Região Interna, ambas as descrições dão  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , mas  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  são Finitos na Primeira Formulação e iguais a zero na Segunda Formulação. Obs.: Nem  $\mathbf{H}$ , nem  $\mathbf{M}$ , são experimentalmente observáveis.
- Nas duas Formulações existem Correntes de Superfície idênticas; na Primeira Formulação ela é considerada uma Corrente de Magnetização, enquanto que na Segunda Formulação ela é considerada uma Corrente de Transporte.

# 4. Exemplo envolvendo as Equações de London

- O primeiro problema é o da Esfera Supercondutora de raio  $a$  imersa num Campo Magnético Externo e que a grandes Distâncias, é Uniforme e igual a  $B_0\hat{z}$ . As Equações de Maxwell-London são:
  - No Exterior:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$
  - No Interior:  $\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
  - Condições de Contorno:
- $$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = B_0\hat{z}, \text{ em } r = \infty \\ B_r \text{ e } B_\theta \text{ são contínuos em } r = a \text{ (não há densidades} \\ \text{de Corrente de Magnetização e de Transporte)} \end{array} \right.$$
- *Ansatz* sobre a forma da Solução: Fora da Esfera suporemos válido na Teoria de London, apenas que o termo  $P_1(\cos \theta)$  do Potencial Escalar Magnético contribui [2].

# 4. Exemplo envolvendo as Equações de London

- Portanto, no Exterior da Esfera:
- $\mathbf{B}(r, \theta) = B_0 \hat{\mathbf{z}} - b \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left( \hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \right)$
- Suposição sobre as Componentes de  $\mathbf{B}$ :
  - $\begin{cases} B_r = u(r) \cos \theta, & \text{na Região Interna} \\ B_\theta = v(r) \sin \theta, & \text{na Região Interna} \end{cases}$
- As Funções  $u(r)$  e  $v(r)$  devem satisfazer o Postulado de London :  $\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B}$  e as C.C. em  $r = a$ :
- $u(a) = B_0 - b, \quad v(a) = -B_0 - \frac{b}{2} \quad (4.1)$
- Expandindo  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$  e usando as Eqs.(4.1):
- $r \frac{dv}{dr} + v + u = -\frac{r^2}{2\lambda} u,$
- $r^2 \frac{d^2 v}{dr^2} + 2r \frac{dv}{dr} + r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} v$
- Das duas Equações acima chega-se as Soluções para  $u(r)$  e  $v(r)$ :

## 4. Exemplo envolvendo as Equações de London

- $u(r) = c(\lambda/r)^3 [\sinh(r/\lambda) - (r/\lambda) \cosh(r/\lambda)]$
- $v(r) = \frac{c}{2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^3 \left[ \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r}{\lambda}\right) \cosh\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right]$
- Os Coeficientes destas Equações são:
- $c = -3B_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right) \sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right),$
- $b = B_0 \left[ 1 + 3 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 - 3 \left(\frac{\lambda}{a}\right) \coth\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right]$
- Para  $\lambda/a \ll 1$ :
- $b \cong B_0 \left( 1 - 3 \frac{\lambda}{a} + 3 \frac{\lambda^2}{a^2} + \dots \right)$



# 5. Conclusão

- Os Supercondutores constituem uma Classe razoavelmente grande de materiais que possuem Transição de Fase para o estado Supercondutor usualmente abaixo de 20K. A Transição depende do Campo Magnético, bem como da Temperatura, com o material retornando ao estado Supercondutor em Campos maiores que  $H_c$ :
- $H_c = H_0[1 - (T/T_c)^2]$
- O comportamento Macroscópico Elétrico e Magnético no estado Supercondutor é descrito pelas Equações Constitutivas  $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$  e  $\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$  para:
- $g = 0, \chi_m = -1, \mu = 0$  (Condutividade Perfeita e Diamagnetismo Perfeito.)
- No caso de Diamagnetismo Perfeito a Densidade de Fluxo  $B$  e a Densidade de Corrente  $J$  sejam nulos dentro do Supercondutor e que só existam Correntes Superficiais.

# 5. Conclusão

- Uma descrição mais apurada é expressa pelas Equações Constitutivas Lineares de London:

$$\bullet \quad \mu_0 \mathbf{J} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{E},$$

$$\bullet \quad \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{B}.$$

- Estas Equações junto com as equações de Maxwell no vácuo, prevêem que a Densidade de Fluxo e a Densidade de Corrente decaem Exponencialmente a partir da Superfície, com Profundidade de Penetração  $\lambda$ .
- **1.** A Formulação com  $\chi_m = -1, \mu = 0$ , é mais conveniente no caso de um Supercondutor imerso num Campo Magnético.
- **2.** Uma Formulação alternativa, conveniente para o caso em que um Supercondutor conduz uma Corrente Externa, supõe-se  $\chi_m = 0, \mu = \mu_0$  dentro do Supercondutor. A condição  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  é encontrada com  $\mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$  no Interior do Supercondutor e C.C. satisfeitas, supondo Correntes de Transporte Superficiais convenientes. As duas Formulações são equivalentes.

# 6. Bibliografia

- [1] F. London e H. London, *Proc. Roy. Soc.*, vol. A149, p. 71 (1935).
- [2] Morse e FeshBach, *Methods of Theoretical Physics* (New York: McGraw-Hill, 1953), Chapter 13.
- [3] A. C. Rose-Innes e H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity*, Second Edition (New York: Pergamon, 1977).
- [4] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (New-York: McGraw-Hill, 1975).
- [5] *Superconductivity in Science and Technology*, M. H. Cohen editor (Chigago: University of Chigago Press, 1968).
- [6] F. London, *Superfluids, The Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. I (New-York: Wiley, 1950; New-York: Dover Publications, 1961).
- [7] D. Shoenberg, *Superconductivity*, Second Edition (London: Cambridge University Press, 1965).
- [8] *Foundation of eletromagnetic theory*, John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, Third Edition.