Oswaldo Luiz do Valle Costa

PTC-EPUSP - 2021

*Aulas 7-9*

## Valor Esperado e Variância

O valor esperado $E(X)$ de uma variável aleatória $X$ é definido como sendo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ (caso contínuo)}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \text{ (caso discreto).}$$

## Valor Esperado e Variância

Para o caso discreto do exemplo anterior, o valor esperado de $R_1$ é:

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \underline{0,1} \times \underline{0,5} + \underline{0,15} \times \underline{0,3} + \underline{0,25} \times \underline{0,2} \\ &= 14,5\%. \end{aligned}$$

Para o caso contínuo do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \frac{1}{0,15} \int_{0,1}^{0,25} r dr \\ &= \frac{r^2}{0,3} \Big]_{0,1}^{0,25} = 17,5\%. \end{aligned}$$

### Exemplos

Uma seguradora paga $R\$$ 30.000,00 em caso de acidente e cobra taxa de $R\$$ 1.000,00. A probabilidade de um acidente é 3%. Qual é o lucro esperado da seguradora?

$$E(L) = 1000 \times 0,97 - 29000 \times 0,03 = 100,00$$

## Exemplos

Considere um jogo em que se paga $R\$$ 20,00 para entrar, e se joga 3 dados. Se apenas uma das faces der 1 ganha-se $R\$$ 20,00, se exatamente 2 faces derem 1 ganha-se $R\$$ 50,00, e se as 3 faces derem 1 ganha-se $R\$$ 80,00. Qualquer outro resultado não se ganha nada. Qual é o lucro esperado do jogador?

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{72} + 30 \times \frac{5}{72} + 60 \times \frac{1}{216} - 20 \times \frac{125}{216} = -9,21$$

## Exemplos

Para defender um cliente em um processo por danos resultante de um acidente de carro, um advogado deve decidir se cobra honorários fixos de R\$ $7.500,00$ ou de contingência que receberá somente se ganhar o caso. Como o advogado deve estimar as chances de seu cliente se:

a) ele prefere honorários fixos de R\$ $7.500,00$ a uma contingência de R\$ $25.000,00$?

b) ele prefere honorários de contingência de R\$ $60.000,00$ aos honorários fixos de R\$ $7.500,00$?

a) $E(X) = 25000 \times p + 0 \times (1-p) = 25000p < 7500 \Rightarrow p < 0,3$,

b) $E(X) = 60000p > 7500 \Rightarrow p > 75/600 = 0,125$.

## Valor Esperado e Variância

$X \to$ binomial com parâmetros $n$ e $p$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1} = np.$$

$X \to$ geométrica com parâmetro $p$

$$E(X) = p \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

## Valor Esperado e Variância

$X \to$ distribuição uniforme $(\alpha, \beta)$

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

uniforme padrão : $\alpha = 0$, $\beta = 1$ $\Rightarrow E(X) = \frac{1}{2}$

## Valor Esperado e Variância

$X \to$ distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$,

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\int_0^{\infty} \underbrace{x}_{g} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f} dx = \left. -\underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{-\lambda x}}_{g} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

## Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição normal com parâmetros $\mu$ e $\sigma$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\}dx = \mu.$$

$x - \mu + \mu$

## Valor Esperado de uma Função de uma Variável Aleatória

Seja $X$ uma variável aleatória. Desejamos calcular $E(g(X))$. Por exemplo, suponha que $X$ seja uma uniforme padrão e considere $Y = X^3$. Mostre que $f_Y(y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ para $0 < y < 1$, zero caso contrário. Com isso temos que

$g(x) = x^3$

$$E(Y) = E(X^3) = \frac{1}{4}.$$

Muito complicado. Felizmente temos a lei do estatístico inconsciente.

$E(g(X)) = ?$

$X \to$ uniforme padrão, $Y = X^3$, Qual é o valor esperado de $Y$?

$$E(Y) = \int_0^1 y\, f_Y(y)\, dy$$

$$F_Y(y) \underset{0 \le y \le 1}{=} P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3}) = y^{1/3}$$

$$f_Y(y) = \frac{d\, F_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{3} y^{-2/3}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$$E(Y) = \int_0^1 y\, \frac{1}{3} y^{-2/3}\, dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{1/3}\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{4}\right) y^{4/3} \Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

## Lei do Estatístico Inconsciente - Caso Contínuo

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

## Caso Discreto

$$E(g(X)) = \sum_i g(i) p_X(i)$$

Exemplo: $g(x) = x^3$, $E(X^3) = \int_0^1 x^3 \, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}$.

$g(x) = ax + b$, $Y = aX + b$

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{E(X)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx}_{1}$$

$$= a E(X) + b$$

## Lei do Estatístico Inconsciente - Caso Contínuo

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

.

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2X E(X) + E(X)^2\right) =$$

$$E(X^2) - \cancel{2} E(X)^2 + \cancel{E(X)^2} = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) \geq E(X)^2$$

$$g(x) = (x - E(X))^2 = x^2 - 2x E(X) + E(X)^2$$

## Valor Esperado e Variância

A variância de uma variável aleatória $X$, que representaremos por $Var(X)$ ou simplesmente $\sigma_X^2$, é definida como:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Pode-se mostrar que

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0.$$

| $R_1$ | prob |
|---|---|
| 0,1 | 0,5 |
| 0,15 | 0,3 |
| 0,25 | 0,2 |

$E(R_1) = 14,5\%$

$\sigma_1^2 = Var(R_1) = ?$

## Valor Esperado e Variância

Para o caso discreto do exemplo anterior, a variância de $R_1$ é:

$$
\begin{aligned}
E(R_1^2) &= 0,1^2 \times 0,5 + 0,15^2 \times 0,3 + 0,25^2 \times 0,2 \\
&= 0,01 \times 0,5 + 0,0225 \times 0,3 + 0,0625 \times 0,2 \\
&= 0,005 + 0,00675 + 0,0125 \\
&= 0,02425
\end{aligned}
$$

Portanto, lembrando que $E(R_1) = 14,5\%$, temos que

$$\sigma^2_{R_1} = 0,02425 - 0,145^2 = 0,003225$$

e

$$\sigma_{R_1} = 5,67\%.$$

## Valor Esperado e Variância

Para o caso contínuo do exemplo anterior, a variância de $R_1$ é:

$$E(R_1^2) = \frac{1}{0,15}\int_{0,1}^{0,25} r^2 dr$$

$$= \frac{r^3}{0,45}\Big]_{0,1}^{0,25} = 0,0325.$$

Portanto, lembrando que $E(R_1) = 17,5\%$, temos que

$$\sigma_{R_1}^2 = \underline{0,0325} - \underline{0,175^2} = \underline{0,001875}$$

e

$$\sigma_{R_1} = 4,33\%.$$

## Exemplos

Uma loja de automóveis observou que nos últimos 300 dias de operação teve 54 dias sem vendas de automóveis, 117 dias com a venda de 1 automóvel, 72 dias com a venda de 2 automóveis, 42 dias com a venda de 3 automóveis, 12 dias com a venda de 4 automóveis, e 3 dias com a venda de 5 automóveis. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do número de automóveis vendidos em um dia.

$$p_0 = \frac{54}{300}, \; p_1 = \frac{117}{300}, \; p_2 = \frac{72}{300}, \; p_3 = \frac{42}{300}, \; p_4 = \frac{12}{300}, \; p_5 = \frac{3}{300}$$

Exercício!

A) $E(X) = 1,5,$

B) $E(X^2) = 3,5, \; \sigma^2 = Var(X) = 3,5 - (1,5)^2 = 1,25 \Rightarrow \sigma = 1,118.$

## EXEMPLOS

Um analista acredita que a tabela 1 é uma descrição satisfatória da distribuição de probabilidades da taxa de retorno de uma certa ação.

TABELA: Retornos e probabilidades

| cenário | probabilidade | retorno |
|---|---|---|
| 1 | $0,15$ | $-10\%$ |
| 2 | $0,25$ | $-2\%$ |
| 3 | $0,30$ | $5\%$ |
| 4 | $0,30$ | $15\%$ |

## Exemplos

De acordo com os dados contidos na tabela, o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno da ação são, respectivamente:

A) $5,5\%$ e $10,86\%$

B) $5,5\%$ e $8,66\%$

C) $4,0\%$ e $25\%$

D) $4,0\%$ e $10,86\%$

E) $4,0\%$ e $8,66\%$

1. $E(R) = -0,1 \times 0,15 - 0,02 \times 0,25 + 0,05 \times 0,3 + 0,15 \times 0,3 = 4\%$,
2. $$Var(R) = (-0,1 - 0,04)^2 \times 0,15 + (-0,02 - 0,04)^2 \times 0,25$$
$$+ (0,05 - 0,04)^2 \times 0,3 + (0,15 - 0,04)^2 \times 0,3 = 0,0075$$
$$\Rightarrow \sigma = 8,66\%.$$

## Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$,

$$Var(X) = \int_0^\infty (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f} dx = \cancel{-x^2 e^{-\lambda x} \Big]_0^\infty} + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx}_{1/\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= 1/\lambda^2$$

## Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição gaussiana com parâmetros $\mu$ e $\sigma$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\} dx = \sigma^2.$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\, dy = 1$$

$$= \sigma^2$$

## Curtose

A curtose é uma medida de dispersão que caracteriza o pico ou "achatamento" da curva da função de distribuição de probabilidade. O excesso de curtose é normalmente definido como:

$$\gamma_2 = \frac{E((X - E(X))^4)}{\sigma^4} - 3$$

## Curtose

A distribuição normal tem excesso de curtose igual a zero ($\gamma_2 = 0$). Distribuições com excesso de curtose zero são chamados mesocúrticas. Se $\gamma_2 > 0$ então a distribuição em questão é mais alta (afunilada) e concentrada que a distribuição normal. Nesse caso diz-se que esta distribuição de probabilidade é leptocúrtica, ou que a distribuição tem caudas pesadas (significa que é relativamente fácil obter valores que se afastam da média a vários múltiplos do desvio padrão). Se o valor é $\gamma_2 < 0$, então a função de distribuição é mais "achatada" que a distribuição normal, com caudas mais curtas e finas, e chama-se platicúrtica.

$$X : \underline{\Omega} \to \underline{\mathbb{R}^n}$$
$$\underline{\omega} \to \underline{X(\omega)} = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

## Vetores Aleatórios

Um vetor aleatório $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ é uma função do espaço amostral $\Omega$ para o $\mathbb{R}^n$. É caracterizado pela sua função densidade de probabilidade conjunta $f_X(x_1, \ldots, x_n)$ para o caso contínuo, ou pela sua função massa conjunta $p_X(x_1, \ldots, x_n)$ para o caso discreto.

$$f_X(\cdot) : \underline{\underline{\mathbb{R}^n}} \to \underline{\underline{\mathbb{R}^+}}$$

## Vetores Aleatórios

Temos para o caso contínuo que

$$
\begin{aligned}
F_X(x_1, \ldots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \underline{f_X(z_1, \ldots, z_n)} dz_1 \ldots dz_n
\end{aligned}
$$

onde $F_X(x_1, \ldots, x_n)$ é a função distribuição de probabilidade conjunta de $X$. Para o caso discreto

$$
P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p_X(x_1, \ldots, x_n).
$$

$$
\underline{\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\} \ldots \cap \{X_n = x_n\}}
$$

## Vetores Aleatórios

As funções densidade de probabilidade marginais $f_{X_i}(x_i)$ são obtidas da função densidade de probabilidade conjunta simplesmente integrando de $-\infty$ a $\infty$ os termos nas outras variáveis. Por exemplo, para obter a função densidade de probabilidade marginal $f_{X_1}(x_1)$, basta calcular

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, z_2, \ldots, z_n) dz_2 \ldots dz_n.$$

Resultado análogo vale para o caso discreto.

$$P_X(X_1 \leq x_1, \underline{X_2 < \infty}, \ldots, \underline{X_n < \infty}) = P_X(\underline{X_1 \leq x_1})$$

## Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Sejam $R_1$ e $R_2$ as rentabilidades de dois investimentos, com a distribuição conjunta dada a seguir:

Tabela: Retornos e probabilidades

| $R_1$ | $R_2$ | probabilidade |
|---|---|---|
| 10% | 5% | 0, 1 |
| 10% | 8% | 0, 1 |
| 10% | 12% | 0, 3 |
| 15% | 5% | 0, 1 |
| 15% | 8% | 0, 1 |
| 15% | 12% | 0, 1 |
| 25% | 5% | 0, 05 |
| 25% | 8% | 0, 05 |
| 25% | 12% | 0, 1 |

| $R_1 \mid R_2$ | 5% | 8% | 12 | $R_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 10% | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,5 |
| 15% | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,3 |
| 25% | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,2 |
| $R_2$ | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 1,0 |

$P(R_1 = 15\%, R_2 = 8\%)$
$= 0,1$

## Exemplo de 2 Variáveis Discretas

As probabilidades marginais para $R_1$ e $R_2$ são:

Tabela: Retornos $R_1$ e $R_2$ e probabilidades

| $R_1$ | probabilidade |
|---|---|
| 10% | $0,5$ |
| 15% | $0,3$ |
| 25% | $0,2$ |

| $R_2$ | probabilidade |
|---|---|
| 5% | $0,25$ |
| 8% | $0,25$ |
| 12% | $0,5$ |

## Vetor Valor Esperado

O vetor valor esperado $E(X)$ é o vetor formado pelos valores esperados $E(X_1), \ldots, E(X_n)$, isto é,

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}.$$

$$Var(X_1) = E\left(\left(X_1 - E(X_1)\right)^2\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$Var(X_n) = E\left(\left(X_n - E(X_n)\right)^2\right)$$

## Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Repetindo os cálculos anteriores, obtém-se que (verifique isto):

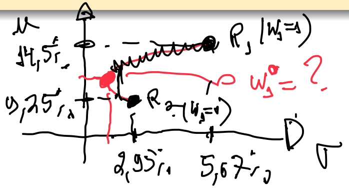
$$
\left.\begin{aligned}
E(R_2) &= \underline{9,25\%},\\
Var(R_2) &= 0,00087,
\end{aligned}\right\} \text{Exercício}
$$

$$\sigma_{R_2} = \underline{2,95\%}.$$

$\sigma_{R_1} = \underline{5,67\%}$

Logo, segue que

$$E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{14,5\%} \\ \underline{9,25\%} \end{pmatrix}.$$




$$\underline{P = w_1 R_1 + (1-w_1) R_2}, \quad 0 \le w_1 \le 1$$

## Lei do Estatístico Inconsciente - Caso Contínuo

$$E(g(X_1,\dots,X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\dots,x_n) f_X(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

## Caso Discreto

$$E(g(X_1,\dots,X_n)) = \sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n} g(i_1,\dots,i_n)p_X(i_1,\dots,i_n)$$

Exemplo: $P = w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_f r_f$ , $w_1 + w_2 + w_f = 1$

$$\mu = E(P) = w_1 \underbrace{E(R_1)}_{r_1} + w_2 \underbrace{E(R_2)}_{r_2} + w_f r_f$$

## Soma de Variáveis Aleatórias

Considere

$$X = X_1 + \ldots + X_n + b$$

Temos que

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) + b$$

$\rightarrow X = X_1 + X_2 + b$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2 + b) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 \right)}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 \right)}_{f_{X_2}(x_2)} dx_2 + b$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + b$$

## Aplicação: $X$ binomial com parâmetros $(n, p)$

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

onde $X_i = 1$ se o experimento $i$ for sucesso, $X_i = 0$ se for fracasso. Logo $X$ conta o número de sucessos em $n$ experimentos. Temos que

$$E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Logo, como visto antes,

$$E(X) = \underbrace{E(X_1)}_{p} + \ldots + \underbrace{E(X_n)}_{p} = p + \ldots p = np$$

## Aplicação: Retorno esperado de um portfólio

Considere os retornos aleatórios $R_1$ e $R_2$ vistos anteriormente. Considere um portfólio que aplica 30% da riqueza no ativo 1 e 70% no ativo 2. Ou seja, o retorno do portfólio é:

$$P = \underline{0,3} \times R_1 + \underline{0,7} \times R_2,$$

$$E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,5\% \\ 9,25\% \end{pmatrix}.$$

Qual e o retorno esperado desse portfólio?

$$E(P) = \underline{0,3 \times E(R_1) + 0,7 \times E(R_2)}.$$

$\sigma^2 = ?$

Portanto,

$$E(P) = 0,3 \times 14,5\% + 0,7 \times 9,25\% = 10,825\%.$$

$\sigma^2 = 0{,}3^2 \cdot \sigma_1^2 + 0{,}7^2 \sigma_2^2 + 2 \; 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \rho \sigma_1 \sigma_2$

$= 6{,}58 \times 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\sigma = 2{,}56\%}$

$\sigma_1 = 5{,}67\%$
$\sigma_2 = 2{,}95\%$
$\rho = -0{,}08215$

## Covariância

A covariância de 2 variáveis aleatórias $X_1, X_2$, denotada por $cov(X_1, X_2)$, ou simplesmente $\sigma_{X_1, X_2}$, é definida por

$$cov(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))),$$

e é claro que $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$.

$(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) = X_1 X_2 - X_1 E(X_2) - X_2 E(X_1) + E(X_1) E(X_2)$

$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) \cancel{- 2 E(X_1) E(X_2) + E(X_1) E(X_2)}$

$= E(X_1 X_2) - E(X_1) E(X_2)$

$P \geq 0$ (positivo semi-definido) se $x' P x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$
$P > 0$ (positivo definido) se $x' P x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$
Lema: $P \geq 0$ se e somente se $\lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ } $P > 0$ se e somente se $\lambda_i(P) > 0$, $i = 1, \dots, n$

## Covariância

Tem-se que

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

$$\begin{aligned}
cov(X_1, X_2) &= E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\
&= E(X_1 X_2 - X_1 E(X_2) - X_2 E(X_1) + E(X_1)E(X_2)) \\
&= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) - E(X_2)E(X_1) + E(X_1)E(X_2) \\
&= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).
\end{aligned}$$

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}, \quad -1 \le \rho \le 1$$

## Coeficiente de Correlação

Define-se o coeficiente de correlação $\rho_{X_1,X_2}$ da seguinte forma:

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{\sigma_{X_1,X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

e segue que $|\rho_{X_1,X_2}| \le 1$.

$$E(X_1) = 0 \qquad E\left[(X_1 + aX_2)^2\right] = E(X_1^2) + 2aE(X_1X_2) + a^2E(X_2^2)$$

$$f(a) = E[X_1^2] + 2aE(X_1X_2) + a^2E(X_2^2)$$

$$\frac{df(a)}{da} = 2E(X_1X_2) + 2aE(X_2^2) = 0 \Rightarrow a^* = \frac{-E(X_1X_2)}{E(X_2^2)}$$

$$\frac{d^2f(a)}{da^2} = 2E(X_2^2) > 0$$

$\Rightarrow$ ponto de mínimo global

$$0 \le E\left((X_1 + a^* X_2)^2\right) = E(X_1^2) - 2\frac{E(X_1X_2)^2}{E(X_2^2)} + \cancel{\frac{E(X_1X_2)^2}{E(X_2^2)}} = A$$

$$E(X_1X_2)^2 \le E(X_1^2)E(X_2^2)$$

$$\Rightarrow cov(X_1,X_2)^2 \le Var(X_1)\,Var(X_2)$$

## Coeficiente de Correlação

$\rho_{X_1,X_2} = 1$: variáveis são perfeitamente positivamente correlacionadas,
$\rho_{X_1,X_2} = -1$ variáveis são perfeitamente negativamente correlacionadas.

Pode-se mostrar que quando $|\rho_{X_1,X_2}| = 1$ tem-se que

$$X_1 = \pm\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}}(X_2 - E(X_2)) + E(X_1). \tag{1}$$

| $R_1 \backslash R_2$ | 5% | 8% | 12% |
|---|---|---|---|
| 10% | 0,1 | 0,1 | 0,3 |
| 15% | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 25% | 0,05 | 0,05 | 0,1 |

Calcule $\rho$.

$$\rho = \frac{Cov(R_1,R_2)}{\sigma_{R_1}\sigma_{R_2}}$$

# Exemplo de 2 Variáveis Discretas

Voltando ao nosso exemplo com 2 variáveis discretas ($\sigma_1 = 5,68\%$, $\sigma_2 = 2,95\%$) , temos que

$$\begin{aligned} E(R_1R_2) &= 0,1 \times 0,05 \times 0,1 + 0,1 \times 0,08 \times 0,1 + 0,1 \times 0,12 \times 0,3 \\ &+ 0,15 \times 0,05 \times 0,1 + 0,15 \times 0,08 \times 0,1 + 0,15 \times 0,12 \times 0,1 \\ &+ 0,25 \times 0,05 \times 0,05 \\ &+ 0,25 \times 0,08 \times 0,05 + 0,25 \times 0,12 \times 0,1 \\ &= 0,013275. \end{aligned}$$

Logo,

$$cov(R_1, R_2) = 0,013275 - 0,145 \times 0,0925 = -0,00013750.$$

Segue também que o fato de correlação é:

$$\rho = \frac{cov(R_1, R_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-0,00013750}{0,0568 \times 0,0295} = -0,08215.$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = Var(R) \Rightarrow tr(\Sigma) = \lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$$

$$det(\Sigma) = \lambda_1\lambda_2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2) \geq 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ se $|\rho| < 1$ então $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

## Variância de Combinação Linear

Considere o vetor aleatório $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ e o vetor $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in R^2$. Defina a variável aleatória

$$P = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 = \omega' X + \underline{b},$$

$Cov(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$

em que $\omega'$ representa o transposto de $\omega$.

$\Sigma \geq 0$ e $\Sigma > 0$ se $|\rho| < 1$

$\sigma^2 = Var(P) = E((P-\mu)^2)$

$P = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cancel{b}$

$\mu = E(P) = w_1 E(X_1) + w_2 E(X) + \cancel{b}$

$P - \mu = w_1(X_1 - E(X_1)) + w_2(X_2 - E(X_2))$

$$E\left((P-\mu)^2\right) = E\left(w_1^2 (X_1 - E(X_1))^2 + w_2^2 (X_2 - E(X_2))^2 + 2 w_1 w_2 (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\right)$$
$$= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$$

## Variância de Combinação Linear

Tem-se que $P = w_1 X_1 + w_2 X_2 + b$ $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$E(P) = \omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2) + b = \underline{\omega' E(X) + b} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$= (w_1 \ \ w_2) \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{pmatrix} + b$$

e

$$\sigma^2 = Var(P) = \omega_1^2 Var X_1 + 2\omega_1\omega_2 Cov(X_1, X_2) + \omega_2^2 Var(X_2) = \underline{\omega' \Sigma \omega}$$

onde a matrix de covariância $\Sigma$ é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

## Variância de Combinação Linear

Tem-se que

$$P = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + b$$
$$E(P) = \omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2) + b$$

e subtraindo a 1a da 2a equação e elevando ao quadrado temos que

$$\begin{aligned}(P - E(P))^2 = {} & \omega_1^2 (X_1 - E(X_1))^2 + \omega_2^2 (X_2 - E(X_2))^2 \\ & + 2\omega_1\omega_2 (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\end{aligned}$$

## Variância de Combinação Linear

Logo, tomando o valor esperado,

$$
\begin{aligned}
Var(P) = E((P - E(P))^2) &= \omega_1^2 E((X_1 - E(X_1))^2) + \omega_2^2 E((X_2 - E(X_2))^2) \\
&+ 2\omega_1\omega_2 E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\
&= \omega_1^2 Var(X_1) + 2\omega_1\omega_2 Cov(X_1, X_2) + \omega_2^2 Var(X_2) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}
$$

## Independência

As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são ditas independentes se para todo $x_1, \ldots, x_n$,

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

(o caso discreto é análogo) e nesse caso é fácil verificar que

$$\longrightarrow \quad E(g_1(X_1) \ldots g_n(X_n)) = E(g_1(X_1)) \ldots E(g_n(X_n)).$$

$$E\left(g_1(X_1) \ldots g_n(X_n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) \ldots g_n(x_n) \underbrace{f_X(x_1, \ldots, x_n)}_{f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x_n) f_{X_n}(x_n)\, dx_n$$

$$= E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$$

## Variáveis Descorrelacionadas

As variáveis aleatórias $X_1$ e $X_2$ ditas são descorrelacionadas se

$$cov(X_1, X_2) = 0.$$

$\Leftrightarrow \rho = 0$

Note que, se $X_1$ e $X_2$ são independentes, então $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$, portanto segue que $cov(X_1, X_2) = 0$. Logo, independência implica variáveis descorrelacionadas, mas o reverso em geral não é válido.

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

Se $X_1, X_2$ são independentes, $E(X_1X_2) = E(X_1)\,E(X_2)$ e portanto $Cov(X_1, X_2) = 0$

$X_1, X_2$ independentes $\Rightarrow$ $X_1, X_2$ descorrelacionadas

$\not\Leftarrow$ em geral

## Soma de Variáveis Aleatórias Descorrelacionadas

Suponha que $X_1$ e $X_2$ sejam variáveis aleatórias descorrelacionadas. Tem-se que para

$$\rightarrow \quad X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b, \qquad \Rightarrow \rho = 0$$

$$\rightarrow \quad E(X) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + b,$$

$$\sigma^2 = Var(X) = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2).$$

$$Var(X) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$$

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b \quad \text{e} \quad \{X_1, \dots, X_n\} \text{ descorrelacionadas}$$

$$\Rightarrow \text{Va}(X) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + a_n^2 \text{Var}(X_n)$$

## Exercício

Suponha que $X_1$ e $X_2$ sejam independentes com funções densidade de probabilidade $f_{X_1}(x_1)$ e $f_{X_2}(x_2)$ respectivamente.

A) Determine a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ com $X = X_1 + X_2$.

B) Supondo que $X_1$ e $X_2$ sejam independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $(0, 1)$, determine $f_X(x)$.

$$X = X_1 + X_2$$

$$f_X(x) = ?$$

A) $F_X(x) = P(X_1 + X_2 \leq x) = E\left(P(X_1 + X_2 \leq x \mid X_1)\right)$

$P(X_1 + X_2 \leq x \mid X_1 = x_1) = P(x_1 + X_2 \leq x \mid X_1 = x_1) =$

$P(X_2 \leq x - x_1 \mid \cancel{X_1 = x_1}) \overset{X_1, X_2 \text{ independents}}{=} \underbrace{P(X_2 \leq x - x_1)}_{F_{X_2}(x - x_1)} =$

$\int_{-\infty}^{x - x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2$

$E\left(P(X_1 + X_2 \leq x \mid X_1)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x - x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \, f_{X_1}(x_1)\, dx_1$

$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x - x_1)\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x - x_2)\, f_{X_2}(x_2)\, dx_2$

## A)

$$F_X(v) = P(X_1 + X_2 \le v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{v-x_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{v-x_2} f_{X_1}(x_1)\, dx_1\right) f_{X_2}(x_2)\, dx_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2.$$

Logo,

$$f_X(v) = \frac{dF_X(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2.$$

B) $f_X(x) = \int_0^1 1_{[0,1]}(x-x_2)\,dx_2$ $\quad 0\le x\le 2$

$$1_{[0,1]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

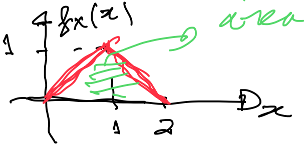
i) $0\le x\le 1$, $\quad 0\le x-x_2\le 1 \Leftrightarrow 0\le x_2\le x$

$$f_X(x)=\int_0^x dx_2 = x$$

ii) $1\le x\le 2$, $\quad 0\le x-x_2\le 1 \Leftrightarrow x-1\le x_2\le 1$

$$f_X(x)=\int_{x-1}^1 dx_2 = 1-(x-1) = 2-x$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$




área = 1

B)

$$f_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(v - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_0^1 1_{[0,1]}(v - x_2) dx_2$$

onde $1_{[0,1]}(u) = 1$ se $0 \leq u \leq 1$, 0 caso contrário. Logo obtém-se que (exercício)

$$f_X(v) = \begin{cases} v & 0 \leq v \leq 1 \\ 2 - v & 1 \leq v \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Trace a função distribuição de probabilidade de $X$.

Calcule $E(X)$ usando o $f_X(x)$.

$$E(X) = \int_0^2 x\, f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big]_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + 3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{1}}$$

Calcule $Var(X)$ usando $f_X(x)$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}(8-1) - \frac{1}{4}(16-1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 4 + \frac{1}{4} = \frac{16}{3} + \frac{1}{2} - \frac{14}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

## Exercício

Suponha que $X_1$ e $X_2$ sejam independentes uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Determine o valor esperado e a variância de $X = X_1 + X_2$. Compare usando $f_x(x)$ do exercício anterior.

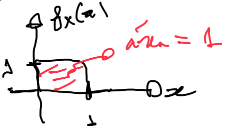
$$E(X_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$E(X_i^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}, \Rightarrow Var(X_i) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

$$\rightarrow E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\rightarrow E(X_1) = \int_0^1 1\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$




$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{6}$$

---

$$P(X_i = k) = e^{-\lambda_i}\,\frac{\lambda_i^{k}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

## Exercício

Suponha que $X_1$ e $X_2$ sejam independentes com distribuição de Poisson parâmetros $\lambda_1$ e $\lambda_2$ respectivamente, Mostre que $X = X_1 + X_2$ é Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{(n-k)} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n
\end{aligned}
$$

$X_1, X_2$ independentes

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$

$(a+b)^n$

$\to$ Poisson com parâmetro $\lambda_1+\lambda_2$

## Exercício

Seja $X$ o resultado da soma de 2 dados justos, ou seja

$$X = X_1 + X_2,$$

onde $X_i$ é o resultado do dado $i$. Determine $E(X)$ e $Var(X)$.

$$E(X_1^2) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$E(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

$$E(X_i) = \frac{7}{2},$$

$$Var(X_i) = \frac{35}{12},$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 7.$$

$$E(X) = 7, \ Var(X) = \frac{35}{6}.$$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{35}{6}$$

**Exemplo**

O verão na cidade de São Sebastião é classificado como sendo um verão chuvoso ou um verão ensolarado. Os lucros das 2 principais empresas de São Sebastião, o hotel São Sebastião e a indústria de guarda-chuvas São Sebastião dependem da classificação do verão, conforme a tabela 4.

## Exemplo

Tabela: Lucros das empresas

| Prob | Tipo de Verão | Lucro do Hotel ($X_1$) | Lucro da Indústria de Guarda-Chuvas ($X_2$) |
| --- | --- | --- | --- |
| 20% | verão chuvoso | - R$ 1.000 | R$ 4.500 |
| 80% | verão ensolarado | R$ 2.000 | - R$ 500 |

a) $E(X_i) = \,?\,, \; i = 1, 2.$

$\mu_1 = E(X_1) = -1000 \times 0{,}2 + 2000 \times 0{,}8 = 1400 \quad , \; \sigma_1 = 1200$

$\mu_2 = E(X_2) = 4500 \times 0{,}2 - 500 \times 0{,}8 = 500 \quad , \; \sigma_2 = 2000$

$E(X_1^2) = 1000^2 \times 0{,}2 + 2000^2 \times 0{,}8 = 3400000$

$E(X_2^2) = 4500^2 \times 0{,}2 + 500^2 \times 0{,}8 = 4.250.000$

$$\sigma_1^2 = E(X_1^2) - \mu_1^2 = 3.400.000 - 1400^2 = 1.440.000$$

$$\sigma_2^2 = E(X_2^2) - \mu_2^2 = 4.250.000 - 500^2 = 4.000.000$$

$$E(X_1 X_2) = (-3000 \times 4500) \times 0,2 + (2000 \times (-500)) \times 0,8 = -1.700.000$$

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = -1.700.000 - 1400 \times 500$$
$$= -2.400.000$$

## Exemplo

Sabe-se que 20% dos verões são chuvosos e 80% são ensolarados. Sejam as variáveis $X_1$ e $X_2$ o lucro do hotel São Sebastião e da indústria de guarda-chuvas São Sebastião respectivamente. Determine $cov(X_1, X_2)$. Qual é o fator de correlação entre $X_1$ e $X_2$?

$$\rho = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{-2.400.000}{1200 \times 2000} = -1$$

## Exemplo

Resposta: Temos que $E(X_1) = R\$\,1.400$, $E(X_2) = R\$\,500$, $\sigma_1 = 1200$, $\sigma_2 = 2000$, $cov(X_1, X_2) = -2.400.000,00$, e portanto $\rho = -1$. O sinal negativo indica que quando uma empresa vai bem a outra vai mal e vice versa. Mais ainda elas são perfeitamente negativamente correlacionadas.

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2, \quad \rho = -1$$

$$\mu = E(X) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2)$$

$$\sigma^2 = (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 + 2 a_1 a_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 = (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 - 2 a_1 a_2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$= (a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2)^2 = 0 \iff a_1\sigma_1 = a_2\sigma_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

## Exemplo

Voltando ao exemplo do hotel, suponha que voce seja proprietário do hotel e da empresa de guarda-chuvas. Qual é o lucro esperado e risco do empreendimento?

Resposta: O lucro esperado é $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = R\$\,1.900$.
A variância é $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$, ou seja,
$\sigma^2 = 1.400.000 + 4.000.000 - 2 \times 1.400.000 \times 4.000.000 = 640.000$. Logo
$\sigma = 800 < \sigma_1 = 1.200 < \sigma_2 = 2.000$.

P/ $\sigma = 0$ devemos ter

$$X = \underbrace{a}_{a_1} X_1 + \underbrace{(1-a)}_{a_2} X_2$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1-a}{a} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + 1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2} \Rightarrow a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

## Exemplo

Suponha que você seja proprietário de $a\%$ do hotel e $(1-a)\%$ da fábrica de guarda chuvas. Qual deve ser o valor de $a$ para você ter risco zero? Qual é o lucro esperado nesse caso ?

Resposta: Nesse caso o seu lucro é dado por:

$$X = aX_1 + (1-a)X_2$$

Como $\rho = -1$ e queremos risco zero, temos que

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var(X) &= a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2 - 2a(1-a)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (a\sigma_1 - (1-a)\sigma_2)^2 = 0\end{aligned}$$

$\sigma_2 = 2000$

$\sigma_1 = 1200$

$$a = \frac{2000}{2000+1200} = \frac{20\cancel{0}\cancel{0}}{32\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{5}{8}$$

## Exemplo

Ou seja:

$$a\sigma_1 - (1-a)\sigma_2 = a(\sigma_1+\sigma_2) - \sigma_2 = 0 \longrightarrow a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

No nosso exemplo:

$$a = \frac{2000}{1200+2000} = \frac{5}{8}.$$

$\sigma = 0$

e o lucro garantido é

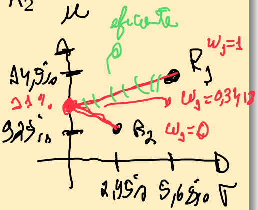
$$X = aE(X_1) + (1-a)E(X_2) = \frac{5}{8}1400 + \frac{3}{8}500 = \frac{8500}{8} = 1062,50.$$

# Exercício

$\rho = -0{,}08215$

**Tabela:** Média e Desvio Padrão de $R_1$ e $R_2$

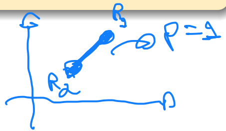
| | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| média | $14,5\%$ | $9,25\%$ |
| desvio padrão | $5,68\%$ | $2,95\%$ |




Considere o retorno de um portfolio dado por:

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2$$

Supondo $\rho = -1$ qual é o valor de $\omega_1$ que levará a um portfólio de risco zero? Qual será o retorno garantido nesse caso?




$$\omega_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{2,95}{2,95 + 5,68} = 0,3418,$$

$$P = 0,3418 \times 14,5\% + 0,6582 \times 9,25\% = 11,044\%$$

## Exemplo de 2 Ativos - Caso Geral

Tabela: Média e Desvio Padrão de $R_1$ e $R_2$

| | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| média | $\mu_1$ | $\mu_2$ |
| desvio padrão | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |

correlação entre $R_1$ e $R_2$ é $\rho$.

$$cov(R_1, R_2) = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

$$\sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - 2w_1 + w_1^2)\sigma_2^2 + 2w_1(1-w_1)\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)w_1^2 + 2\sigma_2(\rho\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\sigma^2 = (w_1\sigma_1)^2 + ((1-w_1)\sigma_2)^2 + 2w_1(1-w_1)\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$= w_1^2\sigma_1^2 + (1-2w_1+w_1^2)\sigma_2^2 + 2(w_1-w_1^2)\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$= (\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)w_1^2 + 2\sigma_2(\rho\sigma_1-\sigma_2)w_1 + \sigma_2^2$$

## Exemplo de 2 Ativos

$$P = \omega_1 R_1 + (1-\omega_1)R_2,$$
$$\mu = \omega_1\mu_1 + (1-\omega_1)\mu_2$$
$$= (\mu_1-\mu_2)\omega_1 + \mu_2$$

$$\sigma^2 = a\,w_1^2 + b\,w_1 + c$$

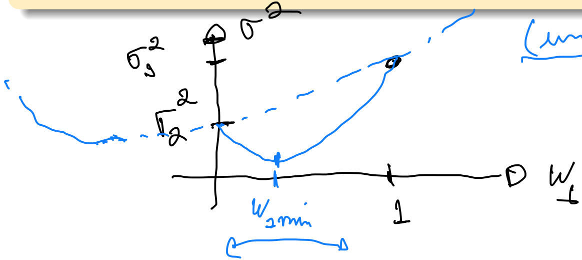
$$a = \sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$b = -2\sigma_2(\sigma_2-\rho\sigma_1)$$
$$c = \sigma_2^2$$

$a = 0{,}0568^2 + 0{,}0295^2 + 2 \times 0{,}08215 \times 0{,}0568 \times 0{,}0295$
$= 0{,}00323 + 0{,}00087 + 0{,}000275 = 0{,}00437$

## Exemplo de 2 Ativos

$b = -2 \cdot 0{,}0295(0{,}0295 + 0{,}08215 \cdot 0{,}0568) = 0{,}00201$

$$\sigma^2 = a\omega_1^2 + b\omega_1 + c,$$
$$a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2,$$
$$b = -2\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1),$$
$$c = \sigma_2^2$$




(uma possibilidade)

$$\boxed{W_{1min} = -\frac{b}{2a}}$$

$$\boxed{\sigma^2_{min} = \sigma_2^2 - \frac{b^2}{4a}}$$

$f(x_{min}) = \cancel{a}\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + \sigma_2^2 = \sigma_2^2 - \frac{b^2}{4a}$

## Exemplo de 2 Ativos

Pode-se obter também a composição do portfolio que fornece a variância (risco) mínimo. Para isto deve-se notar que para uma função $a > 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$\frac{df(x)}{dx} = 2ax + b = 0$

$\Rightarrow x_{min} = -\frac{b}{2a}$

onde $a > 0$, o mínimo da função é em:

$$x_{min} = \frac{-b}{2a},$$

e o valor da função nesse ponto é:

$$f(x_{min}) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

## Exemplo de 2 Ativos

Voltando ao exemplo com dois ativos, considere uma carteira com rentabilidade $P$ tal que

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2.$$

Temos que

$$Var(P) = 0,00437\omega_1^2 - 0,00201\omega_1 + 0,00087$$

A equação para o retorno é:

$$\begin{aligned} E(P) &= \omega_1 14,5\% + (1 - \omega_1) 9,25\% \\ &= 0,0525\omega_1 + 0,0925. \end{aligned}$$

# Exemplo de 2 Ativos

Podemos obter a relação risco X retorno para vários valores de $\omega_1$. Obtemos a tabela abaixo:

Tabela: Relação risco X retorno para vários valores de $\omega_1$

| $\omega_1$ | risco | retorno |
|---|---|---|
| $0,0$ | $2,95\%$ | $9,25\%$ |
| $0,1$ | $2,67\%$ | $9,78\%$ |
| $0,2$ | $2,53\%$ | $10,30\%$ |
| $0,3$ | $2,57\%$ | $10,83\%$ |
| $0,4$ | $2,76\%$ | $11,35\%$ |
| $0,5$ | $3,09\%$ | $11,88\%$ |
| $0,6$ | $3,51\%$ | $12,40\%$ |
| $0,7$ | $4,00\%$ | $12,93\%$ |
| $0,8$ | $4,53\%$ | $13,45\%$ |
| $0,9$ | $5,10\%$ | $13,98\%$ |
| $1,0$ | $5,68\%$ | $14,5\%$ |

# Exemplo de 2 Ativos

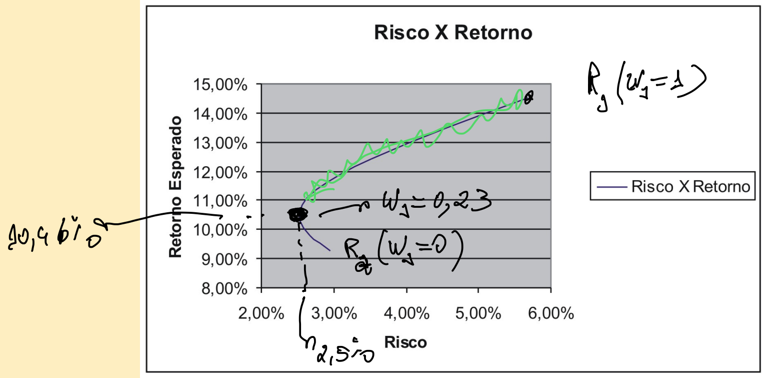



Figura: Gráfico Risco X Retorno

## Exemplo de 2 Ativos

No nosso caso obtemos:

$$
\begin{aligned}
Var(P) &= 0,00437\omega_1^2 - 0,00201\omega_1 + 0,00087 \\
a &= 0,00437 \\
b &= -0,00201, \\
\omega_1^{*} &= \frac{0,00201}{0,00874} = 0,23
\end{aligned}
$$

## Exemplo de 2 Ativos

Para esta composição de portfolio (23% no ativo 1, e 77% no ativo 2) obtemos o portfolio de risco mínimo, com

$$\sigma_{min} = 2,52\%,$$
$$\mu_{min} = 10,46\%$$

Percebe-se que $\sigma_{min} < \sigma_i,\ i = 1,2$ com $r_1 < \mu_{min} < r_2$, exemplificando o efeito da diversificação para redução dos riscos.

# Exemplo de 2 Fundos

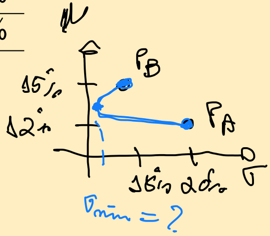
Considere dois fundos com as características abaixo:

Tabela: Média e Desvio Padrão do Fundo A e Fundo B

| | A | B |
|---|---|---|
| média | 12% | 15% |
| desvio padrão | 20% | 18% |

Suponha que o fator de correlação seja:

$$\rho = 0,277.$$




Vale a pena investir no Fundo A?

Tem-se que

$$\begin{aligned}
\mu &= 12\omega + 15(1-\omega) \\
\sigma^2 &= 0,2^2\omega^2 + 0,18^2(1-\omega)^2 + 2 \times 0,2 \times 0,18 \times 0,277 \times \omega(1-\omega) \\
&= 0,04\omega^2 + 0,0324(1-\omega)^2 + 0,02\omega(1-\omega) \\
&= 0,0524\omega^2 - 0,0448\omega + 0,0324
\end{aligned}$$

Considere a seguinte composição: 25% no Fundo A, 75% no Fundo B. Tem-se que $\omega = 0,25$ e

$$\mu = 12 \times 0,25 + 15 \times 0,75 = 14,25\%$$

$$\sigma^2 = 0,2^2 \times 0,25^2 + 0,18^2 \times 0,75^2 +$$

$$2 \times 0,2 \times 0,18 \times 0,277 \times 0,27 \times 0,75 = 0,0245$$

$$\sigma = 15,64\%.$$

Ou seja, através da diversificação conseguimos uma carteira com risco menor que os riscos dos Fundos A e B, e rentabilidade próxima à maior das rentabilidades.

$$\mu_A = 12\% < \mu = 14,25\% < \mu_B = 15\%$$

$$\sigma = 15,64 < \sigma_B = 18\% < \sigma_A = 20\%$$

A carteira de mínima variância é obtida fazendo

$$\omega = \frac{0,0448}{0,1048} = 42,75\%$$

Ou seja deve-se aplicar 42,75% no Fundo A e 57,25% no Fundo B. Tem-se nesse caso que:

$$\mu = 13,72\%,$$

$$\sigma = 15,10\%.$$

## Exercício

Considere 2 ativos com retornos $R_1$ e $R_2$ e fator de correlação, médias, e desvios padrão dados por

$$\rho = -0,5, r_1 = 15\%, \ r_2 = 20\%, \ \sigma_1 = 20\%, \ \sigma_2 = 40\%.$$

Considere um portfolio com retorno

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2.$$

## Item a)

Suponha que voce seja um investidor cauteloso, e que deseje um investimento de modo a minimizar o seu risco. Quanto voce deve alocar no ativo 1 e no ativo 2 nesse caso? Qual é o valor do retorno esperado e desvio padrão de seu portfolio nesse caso?

## Item b)

Suponha agora que voce seja um investidor mais arrojado, e deseje um portfolio com desvio padrão $\sigma = 20\%$ e maior retorno esperado $\mu$ possível (isto é, maior que 15%). Isto é possível? Caso seja, determine a composição de seu portfolio e o valor esperado de seu retorno.

## Vetor Gaussiano

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $\to$vetor gaussiano com parâmetros $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ e matriz $n$ por $n$ $\Sigma$. Neste caso a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ é dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & - & \mathrm{cov}(x_1, x_n) \\ | & \sim & | \\ \mathrm{cov}(x_1, x_n) & \sim & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

## Vetor Gaussiano

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det(\Sigma))^{1/2}} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\}.$$

Verifica-se que $E(X) = \mu$ e $Cov(X) = \Sigma$. No caso em que as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são descorrelacionadas, tem-se que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

## Vetor Gaussiano

e segue que

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_i} exp\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - \mu_i)^2\} = f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_n}(x_n),$$

ou seja, $X_1, \ldots, X_n$ são independentes. Portanto para variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, descorrelacionadas é equivalente a independentes.

## Vetor Gaussiano

Outra propriedade importante é que se $X$ é um vetor gaussiano com parâmetros $\mu$ e $\Sigma$, e

$$Y = AX + b,$$

então $Y$ também é um vetor gaussiano com vetor de média $\mu_Y$ e matriz de covariância $\Sigma_Y$ dados por

$$\mu_Y = A\mu + b,$$
$$\Sigma_Y = A\Sigma A'.$$

## Value at Risk

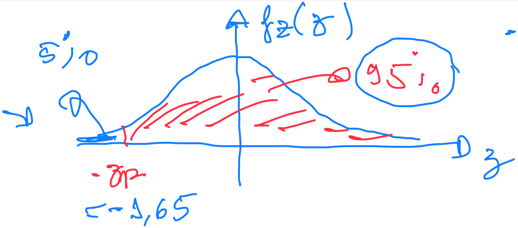
O retorno $P$ de um portfolio é dado por

$$P = \omega' R = \omega_1 R_1 + \ldots + \omega_n R_n$$

onde $R$ representa o vetor com os retornos dos ativos e $\omega$ o vetor com as proporções investidas em cada ativo. Suponha que $R$ seja um vetor gaussiano, com média $\mu$ e matriz de covariancia $\Sigma$. Considere também o valor inicial da carteira como sendo $V_0$. Qual é a perda máxima da carteira com 95% de chances?

## Value at Risk

Pelo exemplo anterior temos que $P$ também é gaussiano com média $\mu_P = \omega'\mu$ e variância $\sigma_P^2 = \omega'\Sigma\omega$. Temos também que o valor final da carteira é dado por: $V_f = (1+P)V_0 = V_0 + V_0 P$ e portanto $V_f$ também é uma variável gaussiana com média $\mu_{V_f} = (1+\mu_P)V_0$ e variância $\sigma_{V_f}^2 = V_0^2\sigma_P^2$. Temos dessa forma que




$-z_p = -1{,}65$

$$Z = \frac{V_f - V_0(1+\mu_P)}{V_0\sigma_P}$$

$$P = \frac{V_f - V_0}{V_0} \Rightarrow V_f = V_0(1+P) \qquad \mu_P = E(P)$$

$$E(V_f) = V_0(1+\mu_P) \qquad \sigma_P^2 = V_0^2 \sigma_P^2$$

## Value at Risk

$$\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0 \sigma_P}$$

é uma variável aleatória gaussiana padrão, e portanto pela tabela segue que

$$P\Big(\underbrace{\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0\sigma_P}}_{Z} \leq -1,65\Big) = 0,05.$$

Ou seja, com 95% de chances,

$$V_f \geq V_0\Big[(1+\mu_P) - 1,65\sigma_P\Big].$$

$$\frac{V_f}{V_0} \geq 0,88805$$ com 95% de chances.

$$1+\mu_P - 1,65\sigma_P = 1,1372 - 1,65 \cdot 0,1510$$
$$= 0,88805$$

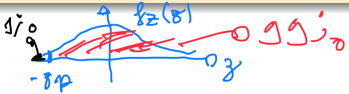
## Value at Risk

Considerando o exemplo anterior, temos que $\mu_P = 13,72\%$ e $\sigma_P = 15,10\%$. Segue que

$$(1+\mu_P) - 1,65\sigma_P = 1,1372 - 0,24915 = 0,88805.$$

Ou seja, com 95% de chances, a perda máxima da carteira (Var) será de 11,195%.

E com 99% de chances?




$-z_P \approx 2,32$

$1,1372 - 2,32 \times 0,1510 \approx 0,787$

pior perda 21,3% com 99% de chances.