Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 6 - Números Complexos

Ao tentarmos resolver a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

nos deparamos com o problema de encontrar algum número real que, elevado ao quadrado, resulta um número negativo.

Sabemos que isso é impossível, pois multiplicando dois números reais de mesmo sinal, o resultado é sempre positivo.

Precisamos, então, de um novo conjunto onde isso possa acontecer.

Vamos denotar por i um número imaginário com a propriedade que $i^2 = -1$.

Chamamos de conjunto dos números complexos ao conjunto

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Em $\mathbb{C}$ definimos as operações de soma e produto de complexos de maneira que as propriedades de soma e produto fiquem preservadas.

Dados $z_1 = a_1 + b_1 i,\ \ z_2 = a_2 + b_2 i$ temos:

a) $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

c) $k \cdot z_1 = k(a_1 + b_1 i) = ka_1 + kb_1 i\ ,\ onde\ k\ é\ real$

Propriedades:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
4) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
5) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Exemplo. Some e multiplique os números complexos

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{e} \quad z_2 = 4 + i$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 4 + i = 6 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(4 + i)$$

$$= 8 + 2i + 12i + 3i^2$$

$$= 8 - 3 + 14i = 5 + 14i$$

Dado um número complexo $z = a + bi$, o número real a é chamado **parte real** de z e o número real b é chamado **parte imaginária** de z.

Notação: $Re(z) = a$ $\qquad Im(z) = b$

Exemplo. $z = 2 - 3i \Rightarrow \begin{cases} Re(z) = 2 \\ Im(z) = -3 \end{cases}$

Dado um número complexo $z = a + bi$, chamamos de **conjugado de** z ao número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Note que: $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$ $\qquad$ $z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z)\, i$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o **módulo de** z como sendo o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pelo que vimos acima: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ *ou* $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Exemplo. Calcule $\bar{z}$ e $|z|$

a) $z = 2 + 3i$

$\bar{z} = 2 - 3i$

$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $z = 3 - 5i$

$\bar{z} = 3 + 5i$

$|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

Só para conferir, no item b):

$$z \cdot \bar{z} = (3 - 5i)(3 + 5i)$$

$$= 9 + 25 = 34 = |z|^2$$

Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ números complexos. Então:

a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

b) Se $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Exemplo. Calcule a divisão de $z_1 = 2 - 3i$ por $z_2 = 3 + 4i$.

$$\frac{2-3i}{3+4i} = \frac{(2-3i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} =$$

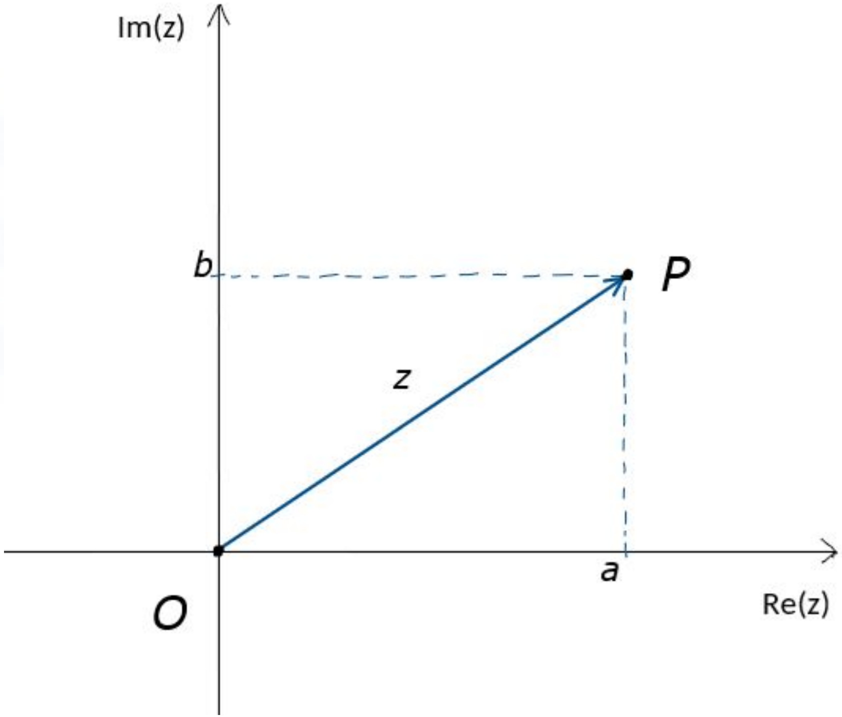
$$= \frac{6-8i-9i+12i^2}{|3+4i|^2} = \frac{-6-17i}{3^2+4^2} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$$

Representação geométrica dos números complexos

Podemos representar números complexos como vetores em um plano cartesiano (ou um par ordenado de números reais neste plano). Para tal, iremos utilizar um sistema de coordenadas com dois eixos, o primeiro será o eixo real e o segundo será o eixo imaginário.

Dado $z = a + bi$ marcamos a parte real de z no 1° eixo e a parte imaginária de z no 2° eixo.

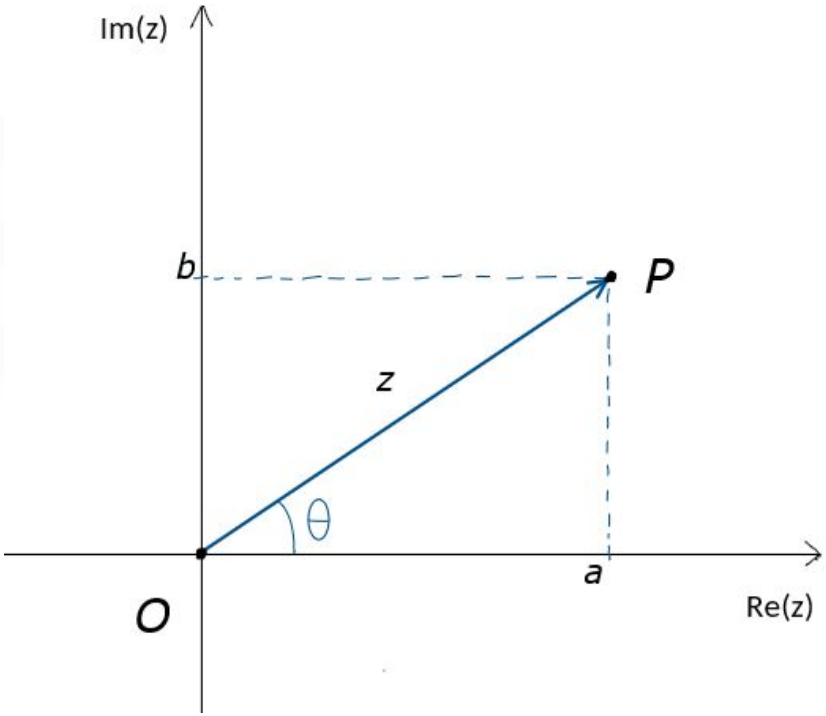
O número complexo z fica então representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$.



Dessa forma, $|z|$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$.

O ângulo θ será chamado **argumento de** z e será denotado por $\theta = \arg(z)$.

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi$$



Note que:

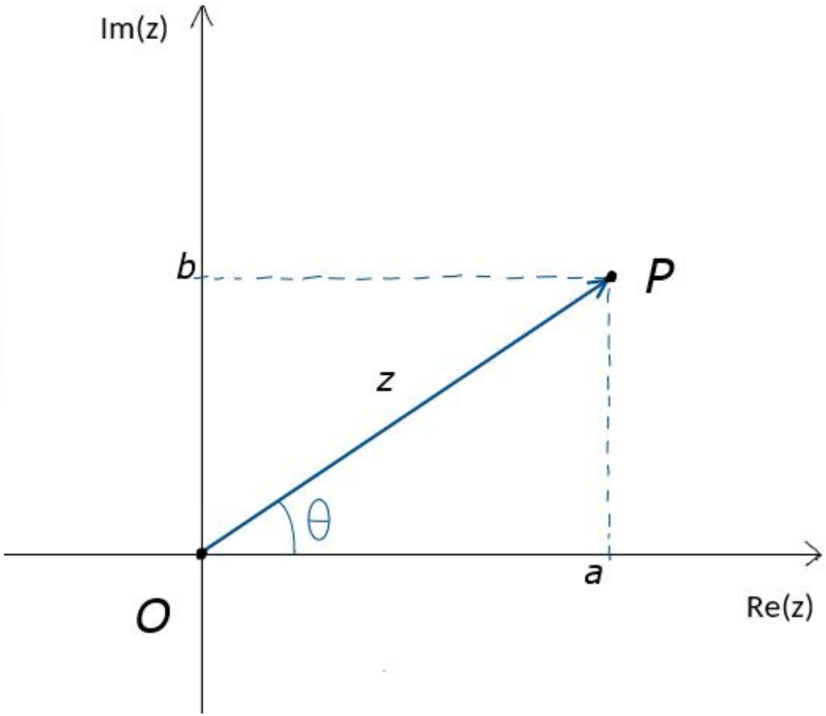
$$Re(z) = a = |z| \cdot \cos\theta$$

$$Im(z) = b = |z| \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$z = a + bi$$

$$z = |z|\cos\theta + |z|\text{sen}\,\theta \cdot i$$

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$



Forma polar do número complexo z

Exemplo. Obtenha a forma polar do complexo $z = \sqrt{3} + i$.

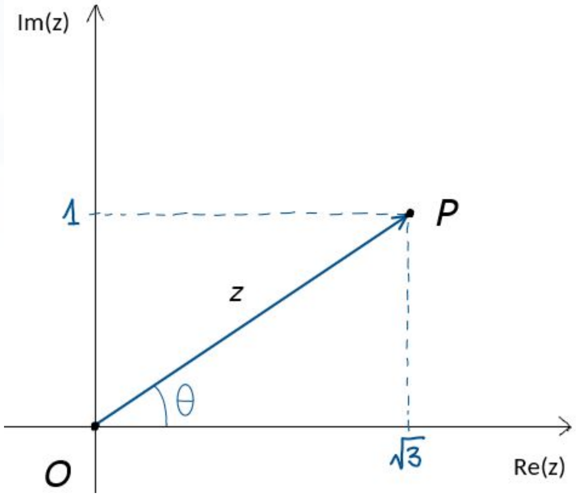
$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta \in 1^{\circ}\ \textit{quadrante}$$

$$\theta = \pi/6$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$



Se $z_1 = |z_1|\left(\cos\theta_1 + i\cdot \operatorname{sen}\theta_1\right)$, $z_2 = |z_2|\left(\cos\theta_2 + i\cdot \operatorname{sen}\theta_2\right)$

como fica a expressão para o produto $z_1 \cdot z_2$?

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cdot \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

Dessa forma, dado $n \in \mathbb{N}$, temos a **fórmula de Moivre**:

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\cdot \operatorname{sen}(n\theta)\right), \quad onde\ \theta = \arg(z).$$

Exemplo. Dado $z = \sqrt{3} + i$, calcule z^8.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^8 = 2^8\left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(8 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z^8 = 256 \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^8 = 256 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -128 - 128\sqrt{3}\,i.$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP