Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP

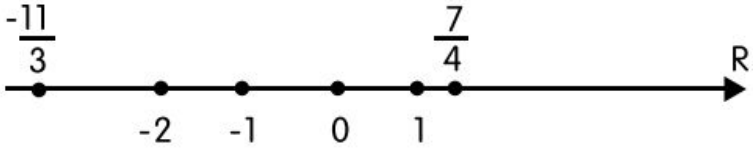
NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 5 - Relação de ordem, intervalos e módulos

Nesta aula vamos:

- compreender a estrutura de ordem dos números reais e suas principais propriedades;
- compreender o conceito de intervalo de números reais, realizar operações com intervalos e representá-los graficamente na reta; e
- compreender o conceito de módulo de um número real e alguns resultados importantes usando módulo.

RELAÇÃO DE ORDEM



Dados dois números reais a e b representados sobre a reta escrevemos que

$$a < b,$$

para significar que o sentido que vai de a para b coincide com a orientação da reta.

A expressão $a < b$ é uma desigualdade e lê-se: "a é menor do que b".

$$-\frac{11}{3} < -2, \quad 0 < \frac{7}{4}, \quad -2 < -1$$

Propriedades

1. Entre dois números reais a e b apenas uma das três possibilidades abaixo acontece:

$$a < b \quad \text{ou} \quad b < a \quad \text{ou} \quad a = b$$

2. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

3. Se $a < b$ então $a + c < b + c$. $\Rightarrow -3 < 25$

$$x - 12 < -9 \Rightarrow x - 12 + 12 < -9 + 12 \Leftrightarrow x < 3$$

Propriedades

4. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a.c < b.c.$

$$-250 < -32 \quad \Rightarrow \quad -500 < -64$$

mantém a desigualdade

5. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a.c > b.c.$

inverte a desigualdade

INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Dados os números reais a e b, com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos de números reais:

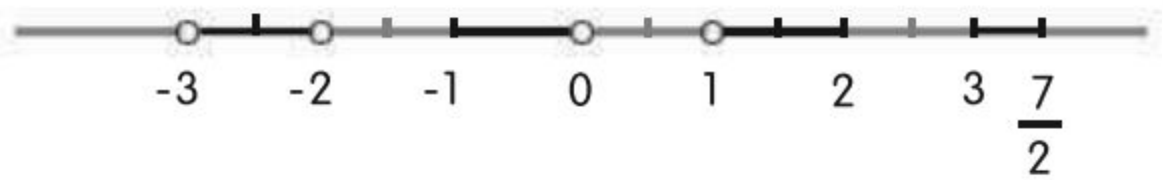
a) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

b) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

d) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

Representação gráfica dos intervalos $(-3,-2)$, $[-1,0)$, $(1,2]$ e $\left[3,\dfrac{7}{2}\right]$.



INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Se a é um número real podemos usar o símbolo $+\infty$ e $-\infty$ para expressar intervalos infinitos.

Os subconjuntos de números reais

a) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$,

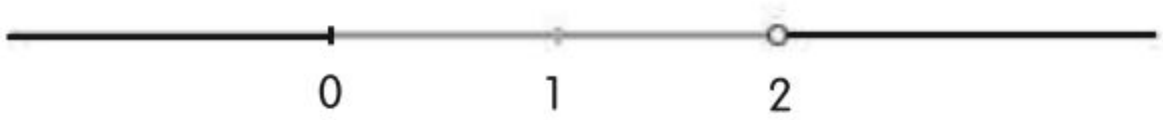
b) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$,

c) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$,

d) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$,

são os intervalos infinitos.

Representação gráfica dos intervalos $(2, \infty)$, $(-\infty, 0]$.



Notas

1) Na definição de um intervalo, o número que fica no extremo esquerdo é menor que o número que fica no extremo direito. Assim $(-1, \sqrt{2})$ é um intervalo, mas $(3, 0]$ não tem sentido.

2) Usando o recurso de representar subconjuntos da reta por intervalos, podemos escrever $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo. $(-1,2) \cap (0,5) =$

$$(-1,2) = \{x \in \mathbb{R};\ -1 < x < 2\}$$

$$(0,5) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 5\}$$

$$(-1,2) \cap (0,5) = (0,2)$$

MÓDULOS

Dado um número real x, o módulo de x, representado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |0| = 0$$

Propriedades

1. Para qualquer número real x, $|x| \geq 0$ e $|x| \geq x$.

2. Se x, y são números reais então $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

$$\left|-a-b\right| = \left|(-1)(a+b)\right| = \left|-1\right|\left|a+b\right| = 1 \cdot \left|a+b\right| = \left|a+b\right|$$

3. Se x, y são números reais e $y \neq 0$, então $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Desigualdade triangular

Sejam a e b números reais quaisquer. Então

$$|a+b| \leq |a| + |b| \,.$$

- $|a-b| \leq |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leq |a-b|$
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

Inequações com módulos

$$|x+1| < 5$$

$$\begin{cases} x+1 < 5 \\ -(x+1) < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4 \\ -6 < x \end{cases}$$

$$S = (-6, 4)$$

é o conjunto solução.

$$|x-1| > 6$$

$$\begin{cases} x-1 > 6 \\ -(x-1) > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 7 \\ -5 > x \end{cases}$$

$$S = (-\infty, -5) \cup (7, \infty)$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP