Fundo Patrimonial FEAUSP

NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA

Aula 3 - Potenciação, Radiciação e Expressões

Nesta aula vamos rever a operação básica da potenciação, estudar o cálculo de raízes no conjunto dos números reais e analisar a conexão entre raízes e potências.

Além disso, valor calcular expressões numéricas envolvendo essas operações elementares.

POTENCIAÇÃO

Seja a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$.
A potência de expoente n de a, denotada por a^n, é o número

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exemplos

a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

b) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

c) $(0,2)^3 = (0,2) \times (0,2) \times (0,2) = 0,008$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

e) $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$

Propriedades

Sejam a e b números reais e m, n números inteiros. Supondo que as potências expressas estão bem definidas então valem as seguintes propriedades:

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$

P3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

P4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$

P5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos

a) $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b) $\dfrac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 = 64$

c) $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$

d) $\dfrac{6^4}{3^4} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$

e) $\left(3^3\right)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6 = 729$

Aplicação

Todo número real positivo b pode ser expresso na forma $b = a \times 10^p$, onde p é um número inteiro e a um número real, com $1 < a < 10$. Esta maneira especial de escrever o número b é denominado *notação científica*.

A notação científica de 450 é $4,5 \times 10^2$ e, a notação científica de $0,042$ é $4,2 \times 10^{-2}$.

Aplicação

Qual é a notação científica do número $4^{14} \times 5^{21}$?

$$4^{14} \times 5^{21} = \left(2^2\right)^{14} \times 5^{21} = 2^{28} \times 5^{21} = 2^7 \times 2^{21} \times 5^{21} =$$

$$= 128 \times 10^{21} = 1,28 \times 10^{23}$$

RADICIAÇÃO

Notação:

$\sqrt[n]{a}$

Seja a um número real e n um número natural. O número x é chamado *raiz enésima de a* se, e somente se, $x^n = a$. Ou seja, temos a seguinte equivalência:

$$x \text{ é raiz enésima de } a \iff x^n = a.$$

1) No símbolo $\sqrt[n]{a}$ dizemos que:

$\sqrt{\ }$ é o radical
a é o radicando
n é o índice da raiz.

2) Conforme já observado, por convenção, na raiz quadrada, omite-se o índice. Escreve-se, por exemplo, $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$ para representar $\sqrt[2]{6}$.

Exemplos

a) O número 8 é uma raiz quadrada de 64, pois $8^2 = 64$.

b) O número -8 é uma raiz quadrada de 64, pois $(-8)^2 = 64$.

c) $\sqrt[3]{0} = 0$.

d) $\sqrt{16} = 4$.

e) $-\sqrt{16} = -4$.

f) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

g) $\sqrt{-4}$ não tem sentido em $\mathbb{R}$.

h) $\sqrt[3]{27} = 3$.

i) $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Propriedades

Sejam a e b números reais e m, n números inteiros.
Então valem as seguintes propriedades:

P1. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

P2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \; b \neq 0$

P3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

P4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \; m \in \mathbb{Z}$

P5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

Potência de expoente racional

Uma relação entre potenciação e radiciação

Seja a un número real positivo, n um número natural não-nulo e $\frac{m}{n}$ um número racional na forma irredutível. A potência de base a e expoente racional $\frac{m}{n}$ é definido por

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

Valem para as potências de expoente racional, as mesmas propriedades válidas para as potências de expoente inteiro.

Exemplos

a) $3^{3/5} = \sqrt[5]{3^3}$

b) $2^{1/7} = \sqrt[7]{2^1} = \sqrt[7]{2}$

c) $2^{-2/5} = \sqrt[5]{2^{-2}}$

d) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

Racionalização

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar os radicais do denominador sem alterá-la.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2}} \times \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \sqrt[5]{16}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Uma expressão onde aparecem números reais, operações entre os números e sinais convencionais de organização da ordem das operações é o que chamamos de uma expressão numérica real ou simplesmente expressão numérica.

$$E = \left\{ -2\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5} - \frac{1}{6} \right) \times 3 + 5^2 \right] \div 2 \right\} \times 5$$

Ordem na reunião

- Parênteses ( )
- Colchetes [ ]
- Chaves { }

Ordem nas operações

- Potência e raiz
- Multiplicação e divisão
- Adição e Subtração

Exemplo

$$\{6 - [(3^2 \cdot 4 \div 2 - 1) - (\sqrt{16} \cdot 2^3 \div 4)] \cdot 3\} \div 7 =$$

$$= \{6 - [(9 \cdot 4 \div 2 - 1) - (4 \cdot 8 \div 4)] \cdot 3\} \div 7$$

$$= \{6 - [(18 - 1) - 8] \cdot 3\} \div 7$$

$$= \{6 - 9 \cdot 3\} \div 7$$

$$= \{-21\} \div 7$$

$$= -3$$

Fundo Patrimonial FEAUSP

FEAUSP