$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

Resultado 1

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $\underset{m \times p}{A}$ matriz de constantes posto $= m \leq p$.

$Y = AX \sim N_m(A\mu, A\Sigma A')$.

$\Rightarrow$ Subvetores de X têm distribuição normal multivariada

$\Rightarrow$ Marginais são normais multivariadas

Resultado 2

$X \sim N(\mu, \Sigma)$ $\quad X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$ $\quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ $\quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$

Nessas condições

$X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são independentes se e somente se $\Sigma_{12} = 0$.

Neste caso temos

$f(x) = f_1(x^{(1)}) \cdot f_2(x^{(2)})$ onde

$$f_1(x^{(1)}) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{(1)}-\mu_1)'\Sigma_{11}^{-1}(x^{(1)}-\mu_1)\right]$$

$$f_2(x^{(2)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-q}{2}}|\Sigma_{22}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{(2)}-\mu_2)'\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)}-\mu_2)\right]$$

Prova:

$\Sigma_{12}=0 \quad X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são independentes

$$m_X(t) = E(e^{t'X}) = E(e^{t_1'X^{(1)}+t_2'X^{(2)}}) \qquad t'=(t_1' \ \ t_2')$$

$$= \exp\left[t'\mu + \frac{1}{2}t'\Sigma t\right] = \exp\left[t_1'\mu_1 + t_2'\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1' \ t_2') \cdot \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}t_1 \\ t_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= \exp\left[t_1'\mu_1 + t_2'\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1'\Sigma_{11}t_1 + t_2'\Sigma_{22}t_2)\right]$$

$$= \underbrace{\exp\left[t_1'\mu_1 + \frac{1}{2}t_1'\Sigma_{11}t_1\right]}_{\text{fgm } X^{(1)}} \cdot \underbrace{\exp\left[t_2'\mu_2 + \frac{1}{2}t_2'\Sigma_{22}t_2\right]}_{\text{fgm } X^{(2)}}$$

pq pelo Resultado 1 $X^{(1)} \sim N_q(\mu_1, \Sigma_{11})$

$X^{(2)} \sim N_{p-q}(\mu_2, \Sigma_{22})$

$\Rightarrow X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são independentes.

Resultado 3

Se $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são independentes, $X_1 \sim N_{q_1}(\mu_1, \Sigma_{11})$ e $X_2 \sim N_{q_2}(\mu_2, \Sigma_{22})$ então $\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$ tem distribuição Normal multivariada

$$N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right).$$

Prova:

Trivial $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ independentes construir a conjunta (produto das marginais) e identificar com a $N_{q_1+q_2}$.

Exemplo

$\mathrm{Var}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Cov}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_3\right)$

$$X \sim N_3(\mu, \Sigma) \qquad \mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\mathrm{Var}(X_3)$

a) Determine a distribuição de $\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix}$

b) X_1 e X_2 são independentes?

c) (X_1, X_2) e X_3 são independentes?

d) Qual é a distribuição de $4X_1 - 2X_3$?

a) $\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right)$

$A\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\sigma_{12} = 1$ e portanto X_1 e X_2 não são independentes

c) $Cov\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, X_3 \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e como $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_3 \implies$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ e X_3 são independentes.

d) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right).$

$4X_1 - 2X_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}}_{a'} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad a'\mu = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 18$

$a'\Sigma a = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 72$

$4X_1 - 2X_3 \sim N(18, 72)$

Distribuição Condicional de $X^{(1)}$ dado $X^{(2)}$

$$g(x^{(1)} \mid x^{(2)}) = \frac{f(x^{(1)}, x^{(2)})}{f_2(x^{(2)})}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1} & -(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = |\Sigma_{22}| \; |\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'|$$

$\therefore$

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \, |\Sigma_{22}|^{1/2} \, |\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}'|^{1/2}}$$

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[(x^{(1)} - \mu_1)'(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1}(x^{(1)} - \mu_1)$$

$$- (x^{(2)} - \mu_2)' \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}' (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1}(x^{(1)} - \mu_1)$$

$$- (x^{(1)} - \mu_1)' (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1} \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)} - \mu_2)$$

$$+ (x^{(2)} - \mu_2)' \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}' (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1} \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)} - \mu_2)$$

$$+ (x_2 - \mu_2)' \Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)\Big]\Big\}$$

$$g(x^{(1)} | x^{(2)}) = \frac{f(x^{(1)}, x^{(2)})}{f_2(x^{(2)})} \Rightarrow$$

$$g(x^{(1)} \mid x^{(2)}) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \left| \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}' \right|^{1/2}}$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[x_1 - \mu_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2) \right]' \left(\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}' \right)^{-1} \right.$$
$$\left. \left[x_1 - \mu_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2) \right] \right\}$$

Esta densidade é da distribuição normal multivariada com média

$$\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)$$

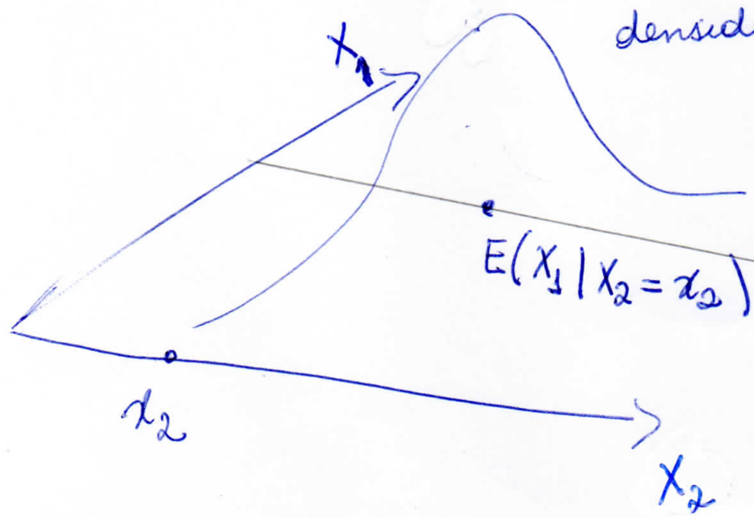
e matriz de covariância

$$\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}' .$$

Para $p = 2$,

$$X_1 \mid X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} (x_2 - \mu_2),\ \underbrace{\sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}} \right)$$

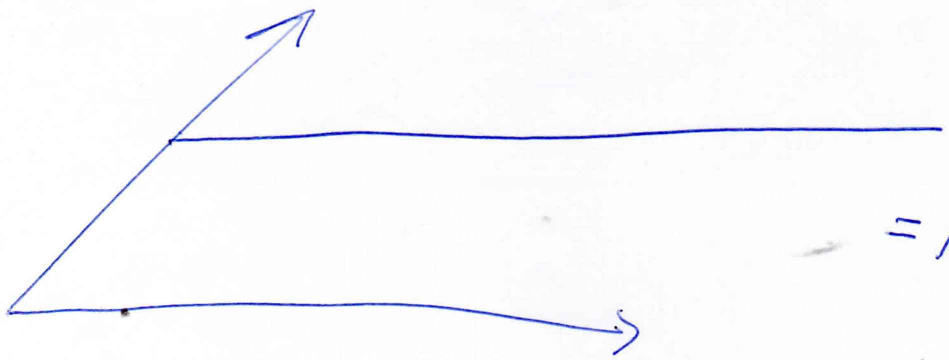
$$\sigma_{11} - \frac{\rho_{12}^2 \sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{22}} =$$
$$= \sigma_{11} (1 - \rho_{12}^2)$$



densidade de $X_1 | X_2 = x_2$

$$N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2),\ \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)\right)$$

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2)$$



$$E(X_1 | X_2 = x_2)$$

$$= \underbrace{\mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\mu_2}_{\beta_0} + \underbrace{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}}_{\beta_1} x_2$$

A curva $E(X_1|X_2)$ é denominada Regressão de X_1 em X_2. Observar que na distribuição Normal Bivariada a regressão de X_1 em X_2 é linear.

Fórmula de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$?

$$\left.\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \end{aligned}\right\}$$ alguma an-logia com coeficientes d[...] reta?

$Var(X_1|X_2) = \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)$

Como $-1 < \rho_{12} < 1$, $0 \le 1-\rho_{12}^2 \le 1 \Rightarrow Var(X_1|X_2)$ indepe[...]

de X_2 e $Var(X_1|X_2) < Var(X_1)$

[...]lastividade).

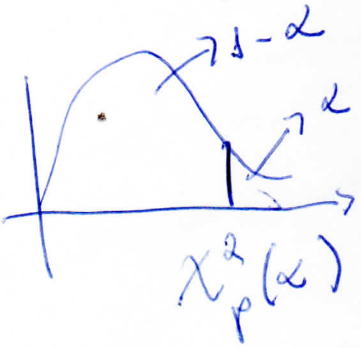
Se $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, Σ positiva definida. Resultado 4

a) $(X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu) \sim \chi^2_p$ (distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade)

Como consequência,

b) $P\left((X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu) \leq \chi^2_p(\alpha) \right) = 1-\alpha$,

onde $\chi^2_p(\alpha)$ é o quantil de ordem $1-\alpha$ da dist. χ^2_p



$p=1 \Rightarrow \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_1$ (resultado conhecido).

Resultado 5

Sejam $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2 \dots \underset{\sim}{X}_n$ vetores aleatórios independentes, p dimensionais, com $X_j \sim N_p(\mu_j, \underset{\uparrow \text{cte}}{\Sigma})$, $j = 1, 2, \dots, n$,

Nessas condições, $V_1 = c_1 \underset{\sim}{X}_1 + c_2 \underset{\sim}{X}_2 + \dots + c_n \underset{\sim}{X}_n$ tem distribuição $N_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \mu_j, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \right) \Sigma \right)$.

Resultado 6

Nas condições do resultado 5, se $V_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n$ então

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \sim N_{2p}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j \mu_j \\ \sum_{j=1}^{n} b_j \mu_j \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\Sigma & b'c\,\Sigma \\ b'c\,\Sigma & \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\Sigma \end{bmatrix} \right)$$

$b' = (b_1 \; b_2 \dots b_n) \qquad c' = (c_1 \; c_2 \dots c_n)$

Obs: V_1 e V_2 são independentes se e somente se $b'c = 0$.

Resultados Adicionais

1) $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$$\underset{\downarrow \\ p\times p}{X'AX} \sim \chi^2_{r(A),\, \underbrace{\frac{1}{2}\mu' A \mu}_{\substack{\downarrow \\ \text{parâmetro de não centralidade}}}} \iff A\Sigma \text{ é idempotente}$$

$A\Sigma A\Sigma = A\Sigma$

2) Independência entre duas formas quadráticas

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

As formas quadráticas $X'AX$ e $X'BX$ são independentes se e somente se $A\Sigma B = 0$ (ou $B\Sigma A = 0$).

3) Independência entre Forma Quadrática e Linear

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$X'\underset{p \times p}{A}X$ e $\underbrace{\underset{q \times p}{B}X}_{q \times 1}$ são independentes $\Leftrightarrow$ $\underset{q\times p}{B}\underset{p\times p}{\Sigma}\underset{p\times p}{A} = \underset{q\times p}{0}$

4) $E(X) = \mu \quad Var(X) = \Sigma$

$E(X'AX) = tr(A\Sigma) + \mu' A \mu$

5) $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ então

$Cov(\underset{p\times 1}{X}, \underset{1\times p}{X'}\underset{p\times p}{A}\underset{p\times 1}{X}) = 2\underset{p\times p}{\Sigma}\underset{p\times p}{A}\underset{p\times 1}{\mu}$

$Var(X'AX) = 2\,tr[(A\Sigma)^2] + 4\mu' A \Sigma A \mu.$

Exemplo de 3)

$X_1, X_2 \ldots X_n$ amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, $p=1$. $\Rightarrow$

$\bar{X}$ e S^2 são variáveis aleatórias independentes

É imediato que $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N_n(\mu, \Sigma)$

$$\mu = (\mu \quad \mu \quad \mu)' \qquad \Sigma = \sigma^2 I_n$$

$\mu \to n \times 1$

$$\bar{X} = \frac{1'X}{n} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} X' \left[I_n - \frac{1\,1'}{n} \right] X$$

$1' = (1 \quad 1 \ldots 1)_{1 \times n}$

$\therefore \quad \bar{X} = BX \quad$ para $\quad B = \frac{1'}{n}$

$\qquad S^2 = X'AX \quad$ para $\quad A = \frac{1}{n-1}\left(I_n - \frac{11'}{n} \right)$

$X'AX$ e BX são independentes $\iff \underset{1\times n}{B}\,\underset{n\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{A} = \underset{1\times n}{0}$

$$B \Sigma A = \frac{1'}{n} \sigma^2 I \frac{1}{n-1} \left[I - \frac{1\,1'}{n} \right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n(n-1)} \left[1' - \frac{\overset{n}{1'1}\,1'}{n} \right] = \frac{\sigma^2}{n(n-1)} \left[1' - 1' \right] =$$

$$= 0_{1 \times n}$$

$\therefore \bar{X}$ e S^2 são variáveis aleatórias independentes.