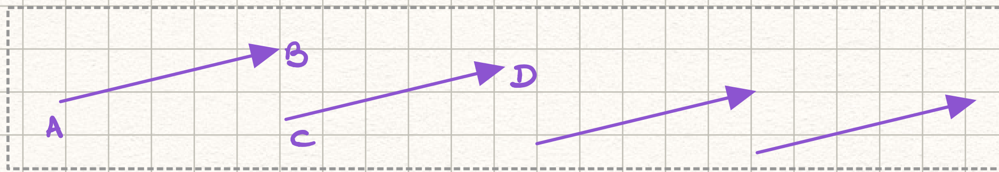
SOs Equipolentes:



Mesmos $\begin{cases} \text{módulo} \\ \text{direção} \\ \text{sentido} \end{cases}$

Vetor: $\vec{v}$

Conjunto de todos os SOs equipolentes a um SO conhecido.

Dependência Linear:

$$\boxed{a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_n\vec{v_n}} = \vec{0} \quad \begin{cases} \exists\, a_i \neq 0 \longrightarrow \text{LD} \\ \text{somente } a_i = 0 \longrightarrow \text{LI} \end{cases}$$

CL

SOLUÇÃO TRIVIAL

2 vetores LD são paralelos

$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \boxed{\vec{u} = \lambda \vec{v}}$ CL

2 vetores LI não são paralelos

$\nexists \lambda \in \mathbb{R} / \vec{u} = \lambda \vec{v}$

3 vetores LD são coplanares

CL

$$\boxed{\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$

projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

3 vetores LI não são coplanares

Não é possível decompor qualquer dos vetores na direção dos outros $\therefore \nexists$ CL

Base

- vetores LI : $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} = \vec{0}$ e $a_i = 0$
- Geram todos os vetores do plano ou espaço

$E = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$

$\vec{w} \in$ plano / espaço

CL dos vetores da base $\rightarrow$ $\vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$

$\vec{w} = (a_1, a_2, a_3)_E$ ... coordenadas de $\vec{w}$ em relação aos vetores da base E

Base Canônica

* Base Ortonormal

- vetores unitários : $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- vetores dois a dois ortogonais : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$

$\Sigma\ (O, \{\vec{i}, \vec{j}\}) = \mathbb{R}^2$ ... plano cartesiano

$\Sigma\ (O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}) = \mathbb{R}^3$ ... espaço cartesiano

Operações com Vetores : $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $m \in \mathbb{R}$

* Igualdade : $\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$; $z_1 = z_2$

* Adição (Diferença) : $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \in \mathbb{R}^3$

* Multiplicação por escalar : $m\vec{u} = (mx_1, my_1, mz_1) \in \mathbb{R}^3$

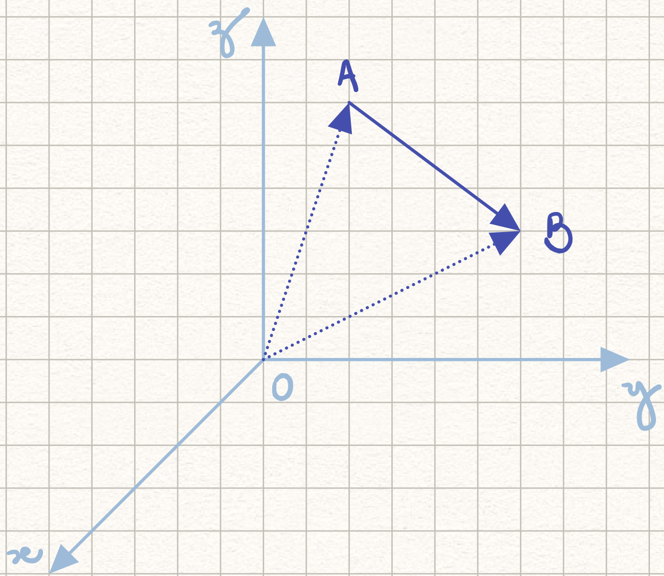
Paralelismo entre Dois Vetores :

$\vec{u} \parallel \vec{v} \longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = k\vec{v}$

$\therefore \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$

As coordenadas dos vetores são proporcionais !

Vetor Definido por Dois Pontos



$A(x_a, y_a, z_a) \in \mathbb{R}^3$

$B(x_b, y_b, z_b) \in \mathbb{R}^3$

$$\therefore \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v} = (x_a - x_b,\ y_a - y_b,\ z_a - z_b)$$

5. PRODUTO ESCALAR

Slide 04

a) Módulo :
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(a,b,c)_E \cdot (a,b,c)_E}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\vec{v} = (a,b,c)_E$

b) Versor :
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$$

$K \in \mathbb{R}$

$\therefore \ \vec{u} = K\vec{v}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$K > 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido

Se $\vec{u} = K\vec{v}$, tem-se:

$$\vec{u} = K(a,b,c)_E = (Ka, Kb, Kc)_E$$

E:
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{K^2a^2 + K^2b^2 + K^2c^2}$$
$$|\vec{u}| = K\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$\sqrt{K^2(a^2+b^2+c^2)}$

Mas $K = \dfrac{1}{|\vec{v}|}$, portanto :

$$|\vec{u}| = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}^{=k} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$$

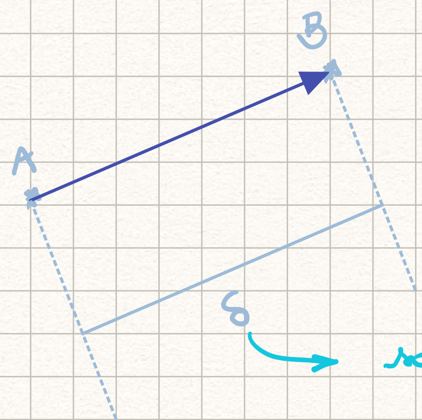
$|\vec{u}| = 1 \;\; \forall \; \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$ é um vetor unitário.

Logo, $\vec{u}$ é versor de qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

OBS: Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\exists \; \vec{u}$ versor de $\vec{v}$, $\forall \; \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

c) Distância: δ

$A(x_a, y_a, z_a)$
$B(x_b, y_b, z_b)$



$$\delta(A,B) = |\vec{AB}|$$

$$\delta(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

só o tamanho do vetor!

Slide 05

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$; $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$; $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$; $m \in \mathbb{R}$

I) $\vec{u} \cdot \vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E \cdot (a_1, b_1, c_1)_E$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = (a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \quad \forall \; \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff a_1 = b_1 = c_1 = 0 \quad \therefore \quad \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

II) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Comutativa)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_1, b_1, c_1)_E \cdot (a_2, b_2, c_2)_E$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 = (a_2, b_2, c_2)_E \cdot (a_1, b_1, c_1)_E$

$\therefore \; \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributiva)

$$\vec{v} + \vec{w} = (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3)_E$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (a_1, b_1, c_1)_E \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3)_E$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3) + c_1(c_2 + c_3)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3 + c_1c_2 + c_1c_3$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3$$

$$\therefore \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

IV) $(m\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$ (Associativa)

$$m\vec{u} = m(a_1, b_1, c_1)_E = (ma_1, mb_1, mc_1)_E$$

$$m\vec{v} = m(a_2, b_2, c_2)_E = (ma_2, mb_2, mc_2)_E$$

$$(m\vec{u}) \cdot \vec{v} = (ma_1, mb_1, mc_1)_E \cdot (a_2, b_2, c_2)_E$$

$$= ma_1a_2 + mb_1b_2 + mc_1c_2$$

$$m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = m(a_1, b_1, c_1)_E \cdot (a_2, b_2, c_2)_E$$

$$= m(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) =$$

$$= ma_1a_2 + mb_1b_2 + mc_1c_2$$

$$\vec{u} \cdot (m\vec{v}) = (a_1, b_1, c_1)_E \cdot (ma_2, mb_2, mc_2)_E$$

$$= a_1 ma_2 + b_1 mb_2 + c_1 mc_2$$

$$= ma_1a_2 + mb_1b_2 + mc_1c_2$$

$$\therefore (m\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$$

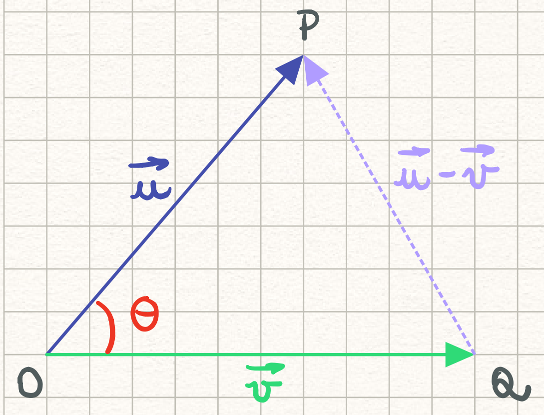
V) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(a_1, b_1, c_1)_E \cdot (a_1, b_1, c_1)_E}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2}$$

$$\big\downarrow (\ )^2$$

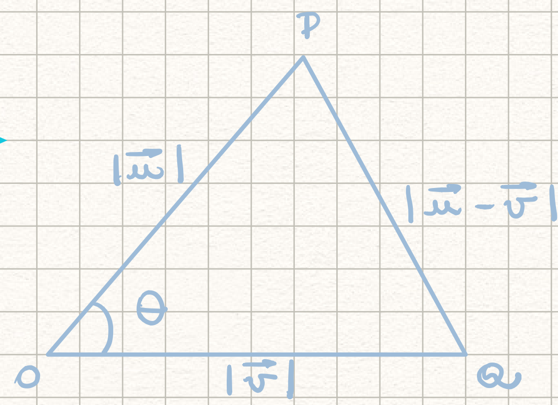
$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2$$

Slide 06 : Ângulo entre Dois Vetores



Seja o triângulo POQ

assim representado



Sejam $(a_1, b_1, c_1)_E$ e $(a_2, b_2, c_2)_E$ as coord. de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na base E, respectivamente.

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo POQ, tem-se:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \qquad (1)$$

Por outro lado:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = \left(\sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}\right)^2$$

$$= (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)_E \cdot (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)_E$$

$$= (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$$

$$= a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2$$

$$= \boxed{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \boxed{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} - 2\boxed{(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = \boxed{|\vec{u}|^2} + \boxed{|\vec{v}|^2} - 2\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})} \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2), tem-se:

$$\cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = -2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Ou:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

EXERCÍCIOS - 1 a 4

1) $\theta = \pi/3$

$\vec{u} = (2, 1, -1)$, $m = ?$

$\vec{v} = (1, -1, m+2)$

A relação entre ângulo e vetores se dá por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta \qquad (1)$$

Calculando o que é necessário:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 1, -1) \cdot (1, -1, m+2) = 2 - 1 - (m+2) = -1 - m$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(2,1,-1) \cdot (2,1,-1)} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(1,-1,m+2) \cdot (1,-1,m+2)}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + (m+2)^2} = \sqrt{m^2 + 4m + 6}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$$

Substituindo em (1):

$$-1 - m = \sqrt{6}\sqrt{m^2 + 4m + 6}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-2(m+1) = \sqrt{6}\sqrt{m^2 + 4m + 6} \qquad (\ )^2$$

$$4(m^2 + 2m + 1) = 6(m^2 + 4m + 6)$$

$$4m^2 + 8m + 4 = 6m^2 + 24m + 36$$

$$2m^2 + 16m + 32 = 0$$

ou $\quad m^2 + 8m + 16 = 0$

BÁSKARA: $\quad m = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$

$$\therefore \quad m = \frac{-8}{2} \longrightarrow m = -4$$

2) $\vec{u} = (1, a, -2a-1)$

$\vec{v} = (a, a-1, 1)$, $a = ?$ tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$\vec{w} = (a, -1, 1)$

Desenvolvendo a equação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \qquad (1)$$

Calculando os produtos escalares:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, a, -2a-1) \cdot (a, a-1, 1) = a^2 - 2a - 1$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, a, -2a-1) \cdot (a, -1, 1) = -2a - 1$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (a, a-1, 1) \cdot (a, -1, 1) = a^2 - a + 2$

Substituindo em (1):

$$\cancel{a^2} - \cancel{2a} - \cancel{1} = -\cancel{2a} - \cancel{1} + \cancel{a^2} - a + 2$$

$\longrightarrow$ $\boxed{a = 2}$

3) A(1, 2, 3)

B(−6, −2, 3)

C(1, 2, 1)

$\vec{v} = 3\,\overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{BC}$

Versor de $\vec{v}$: $\vec{u} = ?$

Calculando os vetores a partir dos pontos:

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, 3) - (-6, -2, 3) = (7, 4, 0)$

$3\,\overrightarrow{BA} = (21, 12, 0)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 2, 1) - (-6, -2, 3) = (7, 4, -2)$

$2\,\overrightarrow{BC} = (14, 8, -4)$

$\therefore \vec{v} = (21, 12, 0) - (14, 8, -4) = (7, 4, 4)$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \ \exists$ o versor $\vec{u}$ tal que $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Logo,

basta dividir as coord. de $\vec{v}$ pelo seu módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(7,4,4) \cdot (7,4,4)} = \sqrt{81} = 9$$

Portanto:

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{9}(7,4,4) \longrightarrow \vec{u} = \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

4) $\left.\begin{array}{l} A(3, m-1, -4) \\ B(8, 2m-1, m) \end{array}\right\}$ $m = ?$ tal que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, m, m+4)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(5, m, m+4) \cdot (5, m, m+4)} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + m^2 + (m+4)^2} = \sqrt{2m^2 + 8m + 41}$$

Mas $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$. Assim:

$$\sqrt{35} = \sqrt{2m^2 + 8m + 41} \qquad (\ )^2$$

$$2m^2 + 8m + 41 = 35$$

$$2m^2 + 8m + 6 = 0$$

ou

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

BÁSKARA: $m = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$

$$\therefore \ m = \frac{-4 \pm 2}{2} \longrightarrow m = -3 \text{ ou } -1$$