Propagação de Erros

Como as incertezas nas medidas diretas produzem a incerteza na medida indireta?

Como calcular a incerteza da medida indireta?

1. Função de 1 variável

Considere *x* uma medida direta

Então podemos descrever

$x = \acute{x} \pm \Delta x$

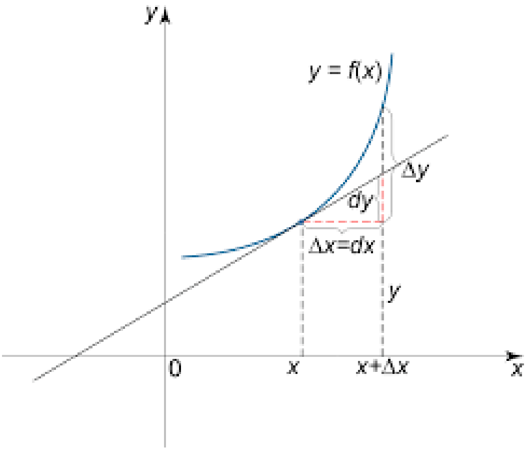
Se calcularmos uma medida indireta :$f = f\left(\acute{x}\right)$,

$f = f\left(\acute{x}\right) \pm \Delta f$

então a definição de propagação de erros nesse caso é:

$$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| . \Delta x$$

lembrando que : $df = \left|\frac{df}{dx}\right| . d\,x$ é a diferencial de f.



Exemplo:

$f = k\,x^3$

$$\Delta f = \left|3\,k\,x^2\right| . \Delta\,x$$

Se $f = k\,.\,tg\theta$

$$\Delta f = \left|k\,.\,sec^2\theta\right| . \Delta\,\theta$$

E assim por diante...

2. Funções de 2 ou mais variáveis.

Seja $f=f(x,y,z)$ e

$x=\acute{x}\pm\Delta x;$

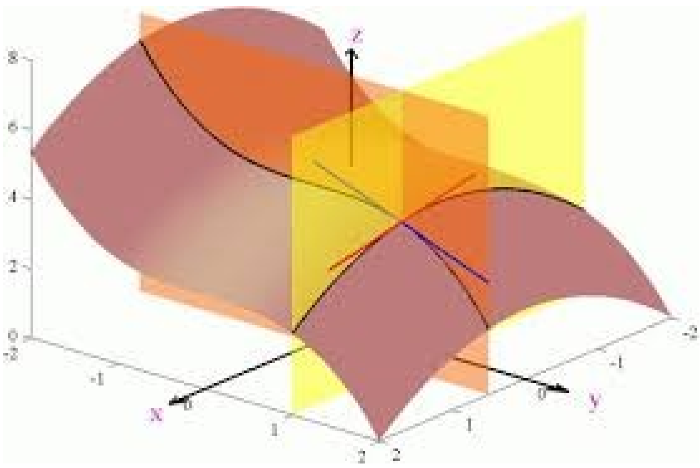
$y=\acute{y}\pm\Delta y;$

$z=\acute{z}\pm\Delta z.$

Então:

$$\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2.\Delta x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.\Delta y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.\Delta z^2}$$

Derivada Parcial



$$f = k \cdot x^2 \cdot y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k \cdot y^3 \cdot 2x = 2k \cdot y^3 \cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k \cdot x^2 \cdot 3y^2$$

$$f = x \cdot seny$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = seny$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xcosy$$

Exemplo:

$f = k\,x^a\,y^b$

k, *a*,*b* são constantes, então, pela definição:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 . \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 . \Delta y^2}$$

diferencial em 2 variáveis

$$\Delta f = \sqrt{\left(k y^b\, a x^{a-1}\right)^2 . \Delta x^2 + \left(k x^a\, b\, y^{b-1}\right)^2 . \Delta y^2}$$

Chegamos em :

$$\Delta f = |f| \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y}\right)^{2.} ¿}$$

3. Resumo

$f = f(x)$	$\bar{f} = f(\bar{x})$	$\Delta\bar{f} = \left\lvert \frac{df}{dx} \right\rvert \Delta\bar{x}$
$f = f(x,y)$	$\bar{f} = f(\bar{x},\bar{y})$	$\Delta\bar{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta\bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta\bar{y})^2}$
$f = ax + by$	$\bar{f} = a\bar{x} + b\bar{y}$	$\Delta\bar{f} = \sqrt{(a\Delta\bar{x})^2 + (b\Delta\bar{y})^2}$
$f = ax^{\alpha}y^{\beta}$	$\bar{f} = a\bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\beta}$	$\Delta\bar{f} = \bar{f}\sqrt{(\alpha\Delta\bar{x} / \bar{x})^2 + (\beta\Delta\bar{y} / \bar{y})^2}$

Fonte: Carlos H. Brito Cruz *et al*, Guia para Física Experimental, IFGW UNICAMP.

Exercício:

Considere um **cilindro d**e raio $a = 2 \pm 0{,}05$ cm, altura $h = 10{,}10 \pm 0{,}05$ cm, calcule o volume e a incerteza:

$$V = \pi \, . \, a^{2.} \, . \, h = 40{,}4\,\pi = 126{,}92 \text{ cm}^3$$

$$V = \pi \, . \, x^{2.} \, . \, y = 40{,}4\,\pi = 126{,}92$$

$$\Delta V = V \, . \sqrt{\left(2\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(1.\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = ¿$$

$$\Delta V = 126{,}92 . \sqrt{\left(2\frac{0{,}05}{2}\right)^2 + \left(1.\frac{0{,}05}{10{,}1}\right)^2} = 126{,}92 . 0{,}05 = 6{,}3777$$

então, a medida e sua incerteza:

$V = 126{,}92 \pm 6{,}38 \text{ cm}^3$

Comentário sobre casas decimais (algarismos significativos)

Exemplo:

Como escrever o valor, abaixo?

5,2324876345324 ± 0,044638174687

5,23 ± 0,04

A incerteza vai definir quantas casas serão usadas.

Arredondando a incerteza e o valor medido, ficamos com:

5,23 ± 0,04