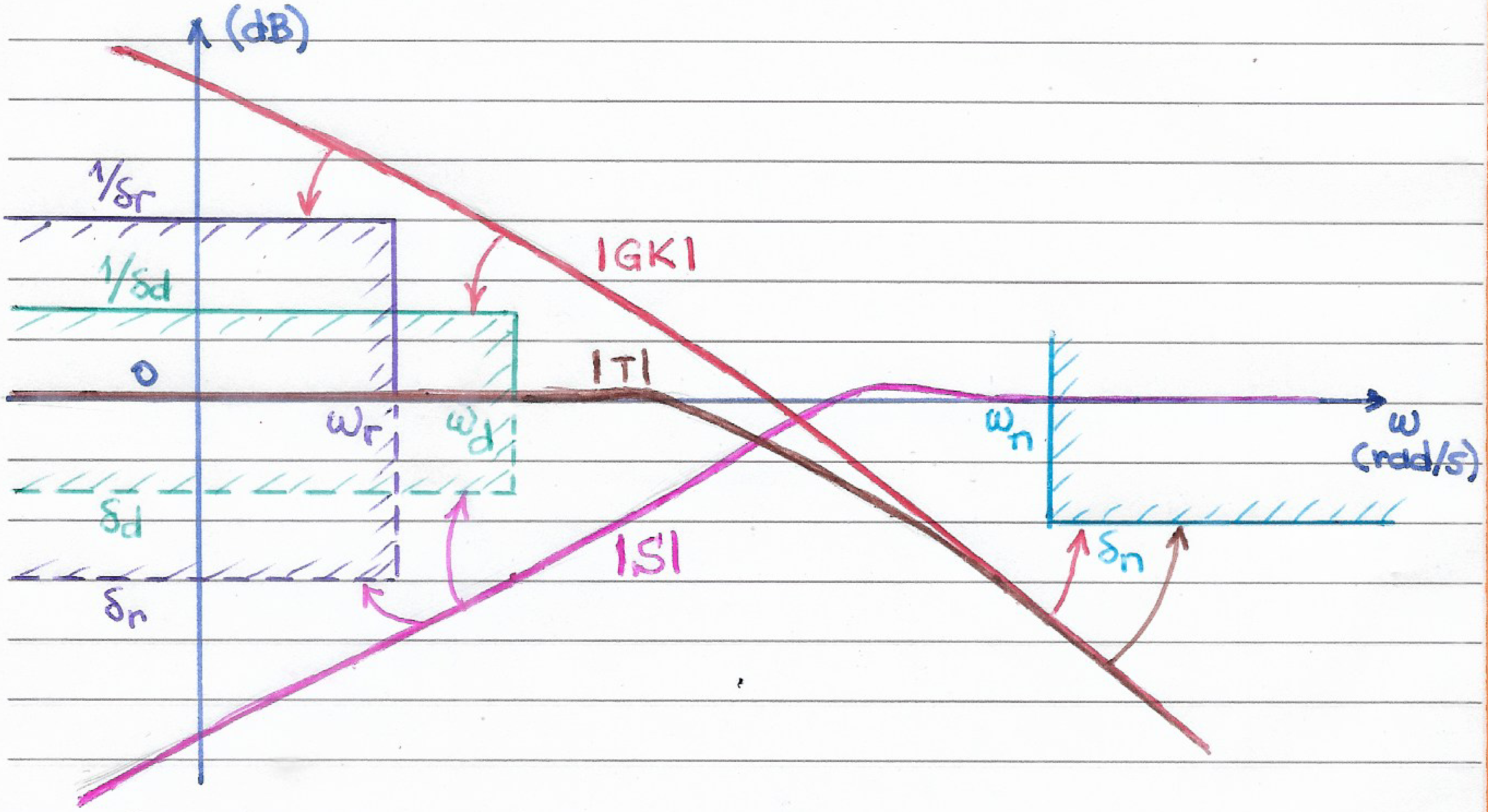
2.7 - RESUMO DOS REQUISITOS DE PROJETO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- Restrições de projeto referentes a:

  - acompanhamento de referência
  - rejeição de perturbação
  - rejeição do erro de medida



- Conflito

Acompanhamento de referência Rejeição de perturbação	X	Rejeição do erro de medida
$|GK|$ alto $|T| \simeq 1$ $|S|$ baixo		$|GK|$ baixo $|T|$ baixo $|S| \simeq 1$

- Solução do conflito

$$(\Omega_r \cup \Omega_d) \cap \Omega_n = \phi$$

- Compatibilidade entre o sensor e as especificações de baixas frequências

  - Deve haver espaço entre as barreiras

- TEOREMA 2.2 - Teorema de Bode da Relação entre Ganho e Fase

G(s) de fase mínimo , G(0) > 0

Então:

$$\boxed{\underline{/G(j\omega_0)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dM}{du}\right)W(u)\,du}$$

em que:

$$M = \ln|G(j\omega)|$$

$$u = \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$W(u) = \ln\left(\coth\frac{|u|}{2}\right)$$

- CASO PARTICULAR

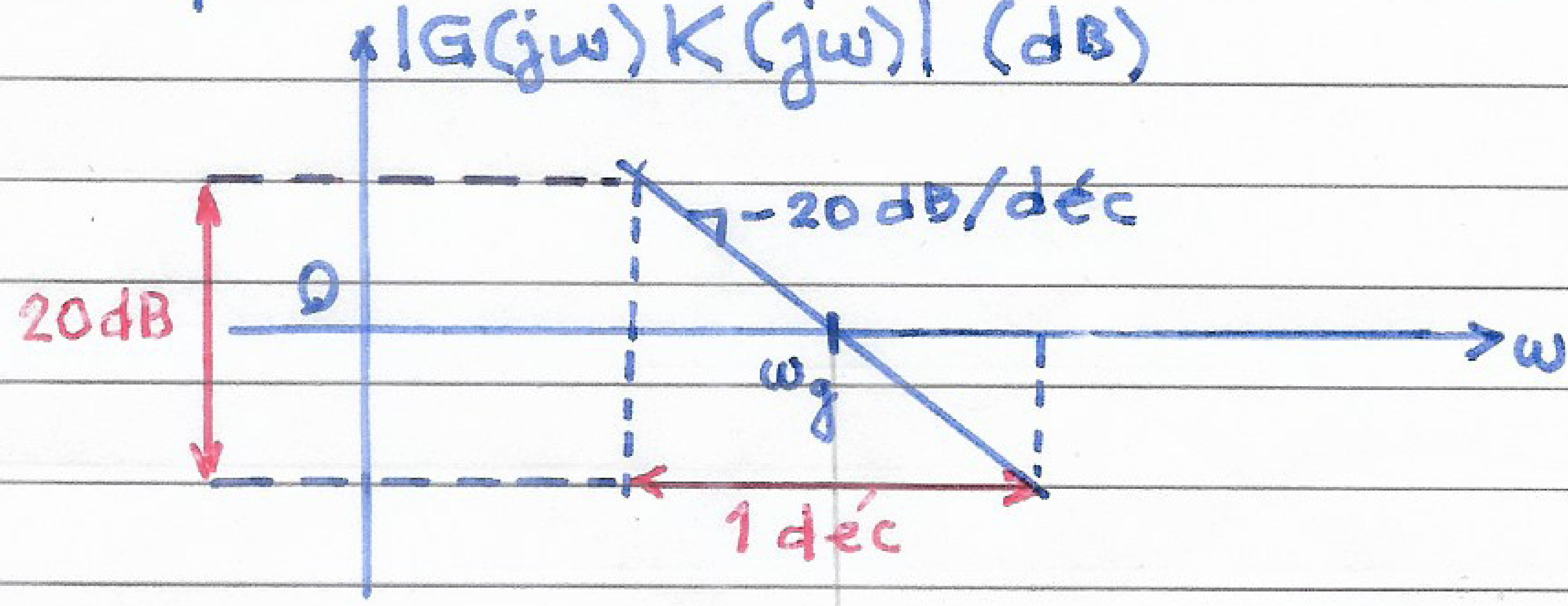
Se declividade $\simeq$ cte em uma década em torno de $\omega_0 \Rightarrow \boxed{/G(j\omega_0) \simeq n\,90^\circ}$
em que $n = -1$ p/ -20 dB/déc, $n = -2$ p/ -40 dB/déc, etc...

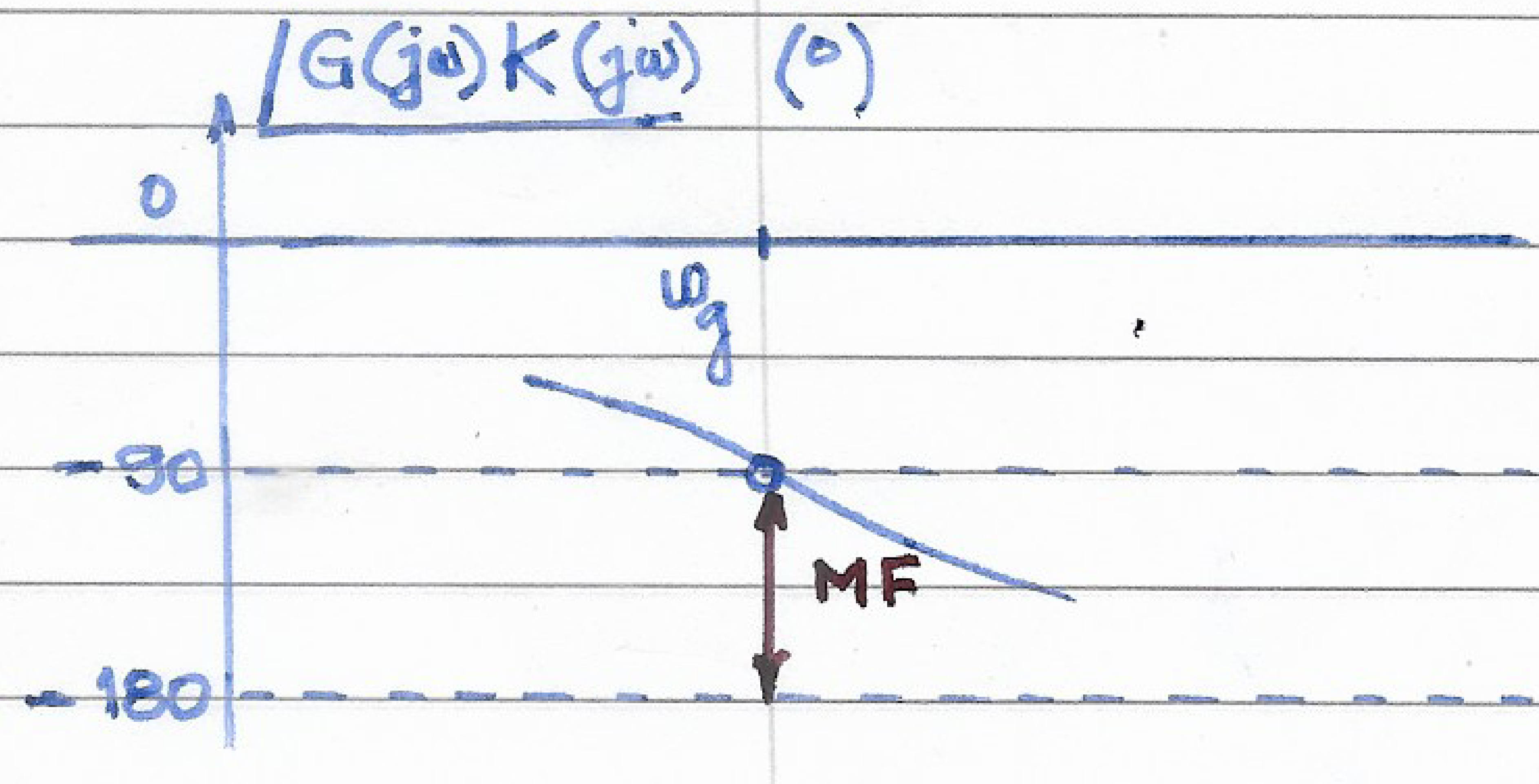
• **CONSEQUÊNCIA IMPORTANTE!**

- Seja ω_g a frequência de cruzamento do ganho de malha, isto é,

$$|G(j\omega_g)K(j\omega_g)| = 1 = 0\,dB$$

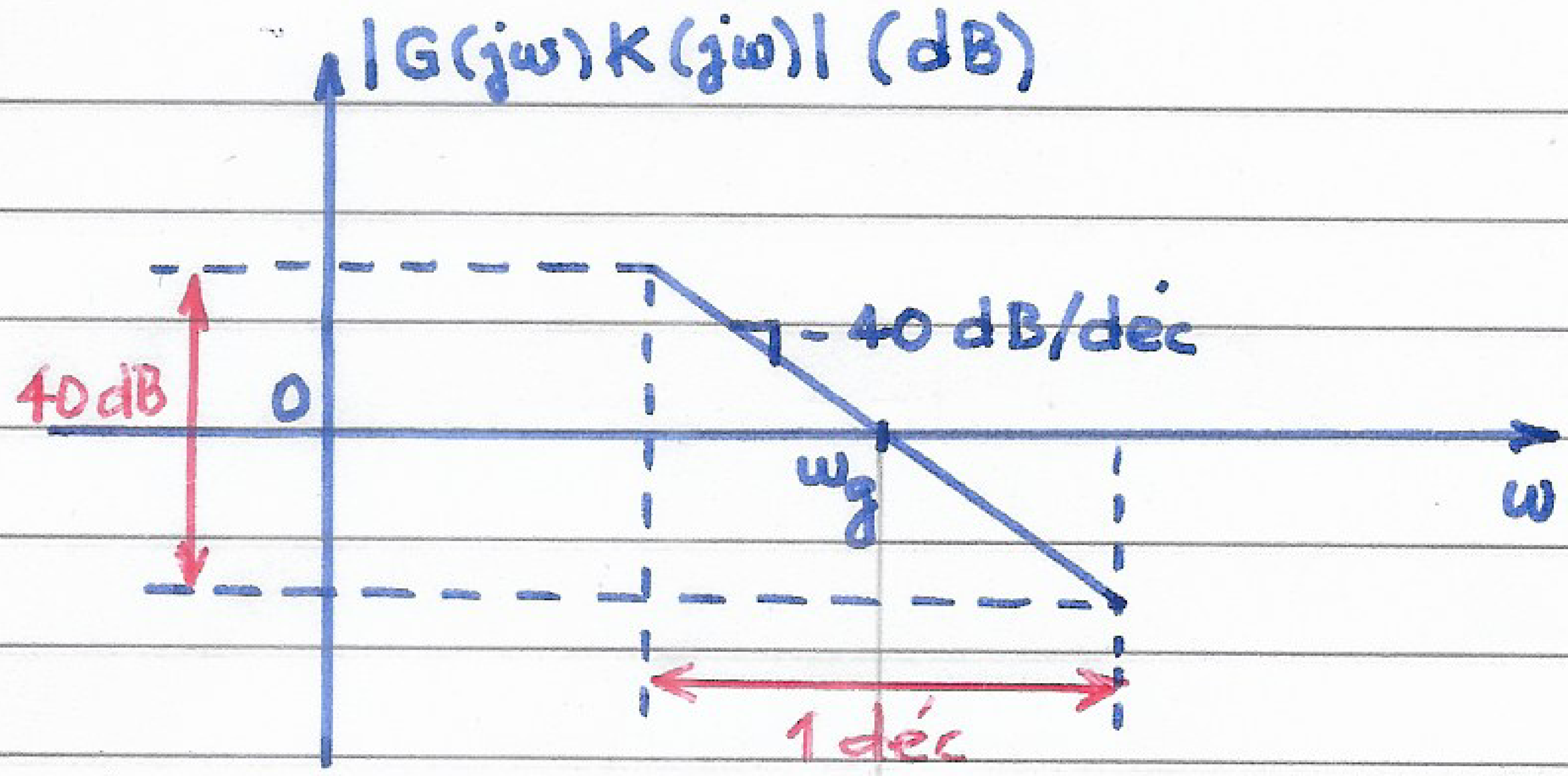
- Suponhamos que a declividade seja $\cong -20\,dB/déc$ por uma década em torno de $\omega_g \Rightarrow \underline{/G(j\omega_g)K(j\omega_g)} \cong -90^\circ$

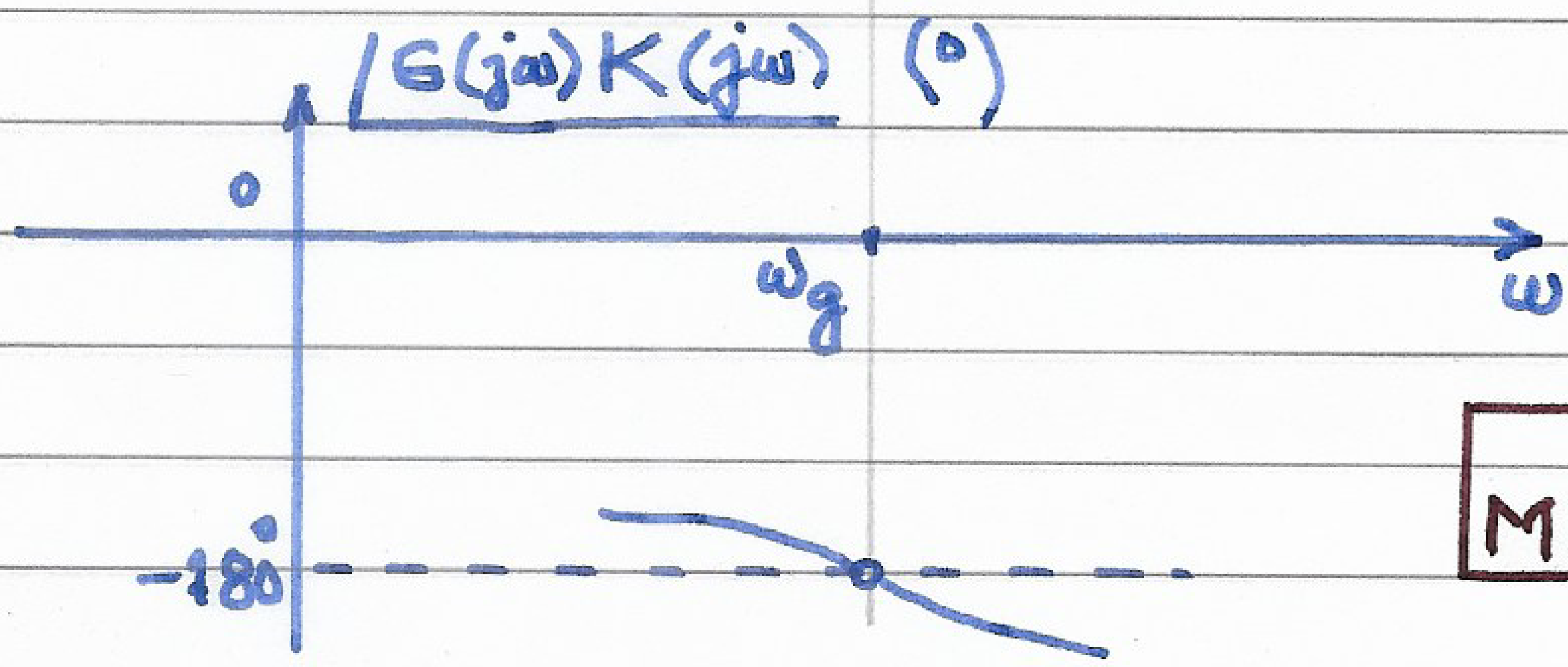




$\boxed{MF = 90^\circ} \Rightarrow$ BOM!

- Suponhamos que a declividade seja $\cong -40\,dB/déc$ por uma década em torno de $\omega_g \Rightarrow \underline{/G(j\omega_g)K(j\omega_g)} \cong -180^\circ$





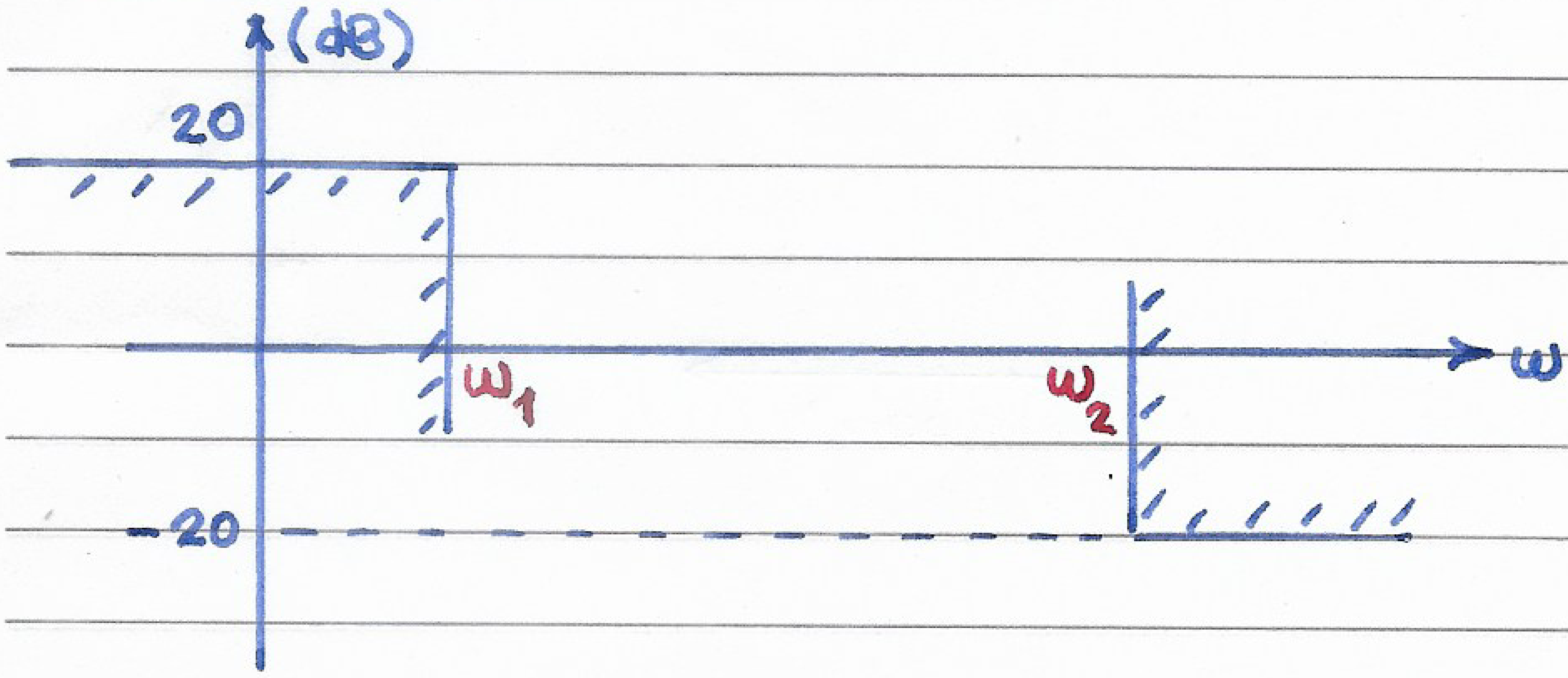
$\boxed{MF = 0^\circ}$ ⇒ INACEITÁVEL!

- Conclusão

Para sistemas de fase mínima, uma boa declividade na região de cruzamento do ganho é de -20 dB/déc ou um pouco mais acentuado, mas não deve ser próxima de -40 dB/déc.

Este fato permite estabelecer objetivamente o que é um espaçamento razoável entre as barreiras de baixas e de altas frequências.

EXEMPLO 2.9



- Se o espaçamento entre ω_2 e ω_1 for de 2 décadas, isto é,

$$\omega_2 = 10^2\,\omega_1 ,$$

uma declividade de $-40/2 = -20$ dB/déc será bastante satisfatória.

- Se o espaçamento entre ω_2 e ω_1 for de 1 década, isto é,

$$\omega_2 = 10\,\omega_1 ,$$

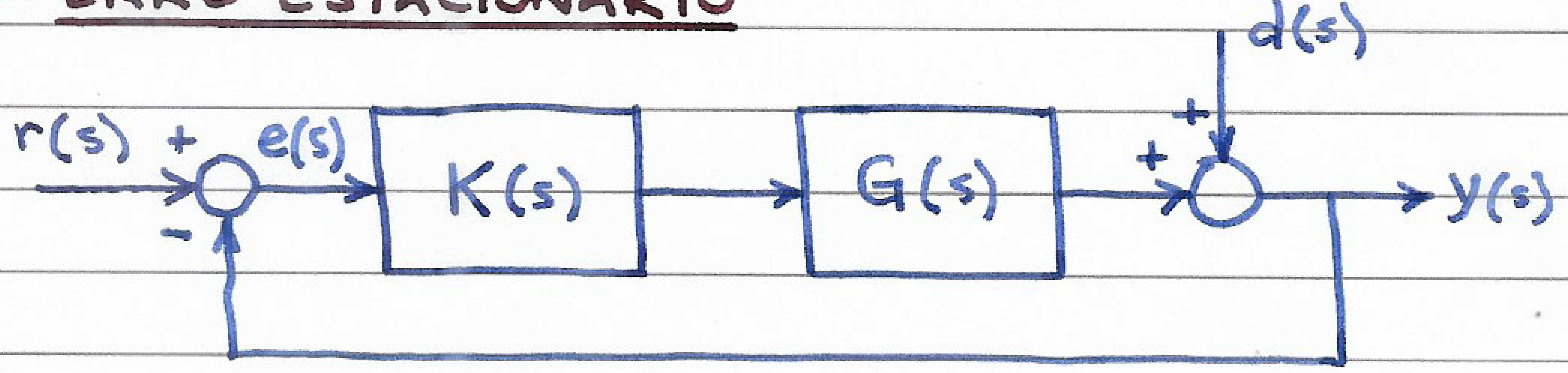
uma declividade de $-40/1 = -40$ dB/déc não será aceitável.

- Se o espaçamento entre ω_2 e ω_1 for de 1/3 década, isto é,

$$\omega_2 = 10^{4/3}\,\omega_1 ,$$

uma declividade de $-40/(4/3) = -30$ dB/déc será aceitável.

2.8 · ERRO ESTACIONÁRIO



$$G(s)\,K(s) = K_0\,\frac{(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

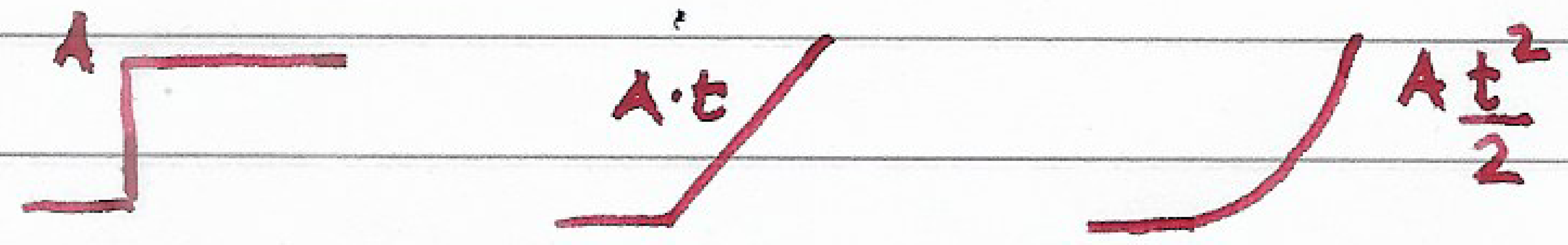
$N=0 \Rightarrow$ Tipo 0

$N=1 \Rightarrow$ Tipo 1

$N=2 \Rightarrow$ Tipo 2

$$d(s)=0 \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)}\,r(s)$$

$$r(s)=0 \Rightarrow y(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)}\,d(s)$$



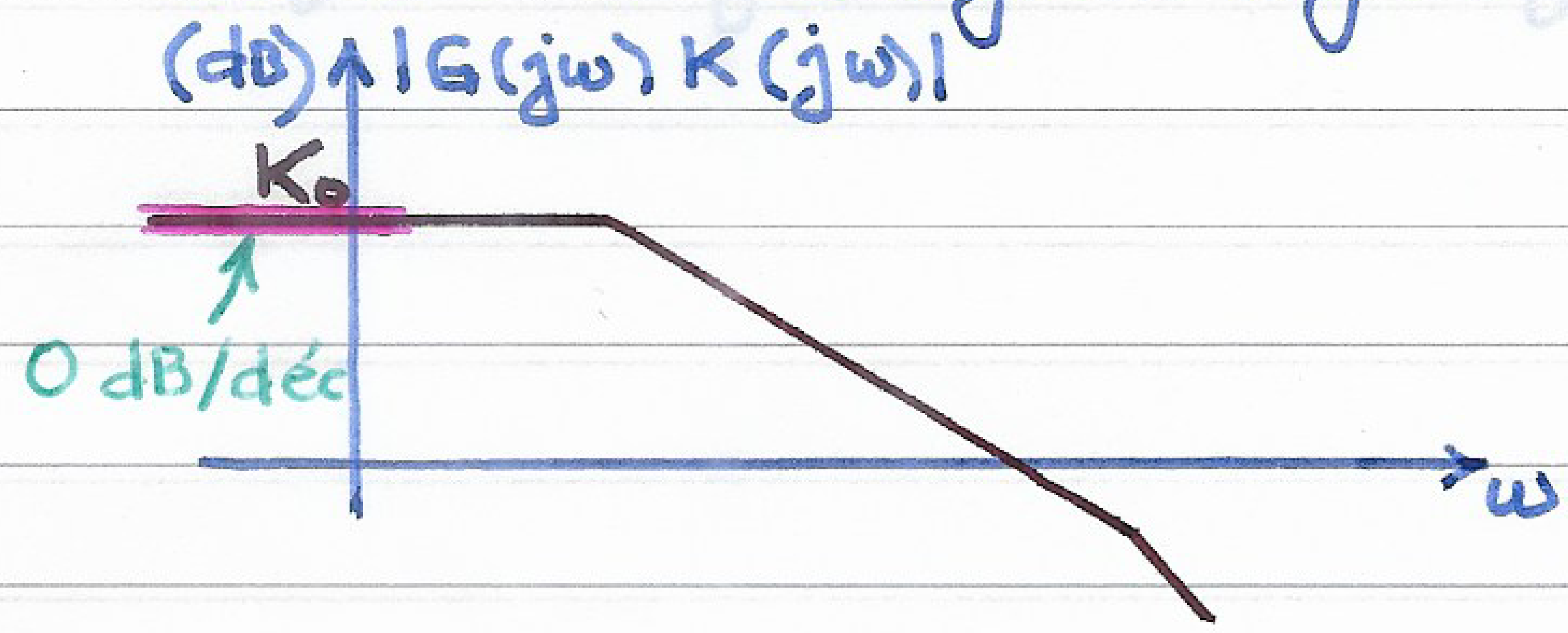
	A	$A\cdot t$	$A\dfrac{t^2}{2}$
Tipo 0	$\dfrac{A}{1+K_0}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\dfrac{A}{K_0}$	∞
Tipo 2	0	0	$\dfrac{A}{K_0}$

TIPO 0

$$G(s)K(s) = K_0 \frac{(\tau_1 s+1)\dots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)\dots(T_n s+1)} \Rightarrow$$

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_0 \frac{(\tau_1 j\omega+1)\dots(\tau_m j\omega+1)}{(T_1 j\omega+1)\dots(T_n j\omega+1)}$$

$$\omega \to 0 \Rightarrow G(j\omega)K(j\omega) \to K_0$$



Obs: Se $K_0 > 0$,

$\angle G(j\omega)K(j\omega) \to 0$

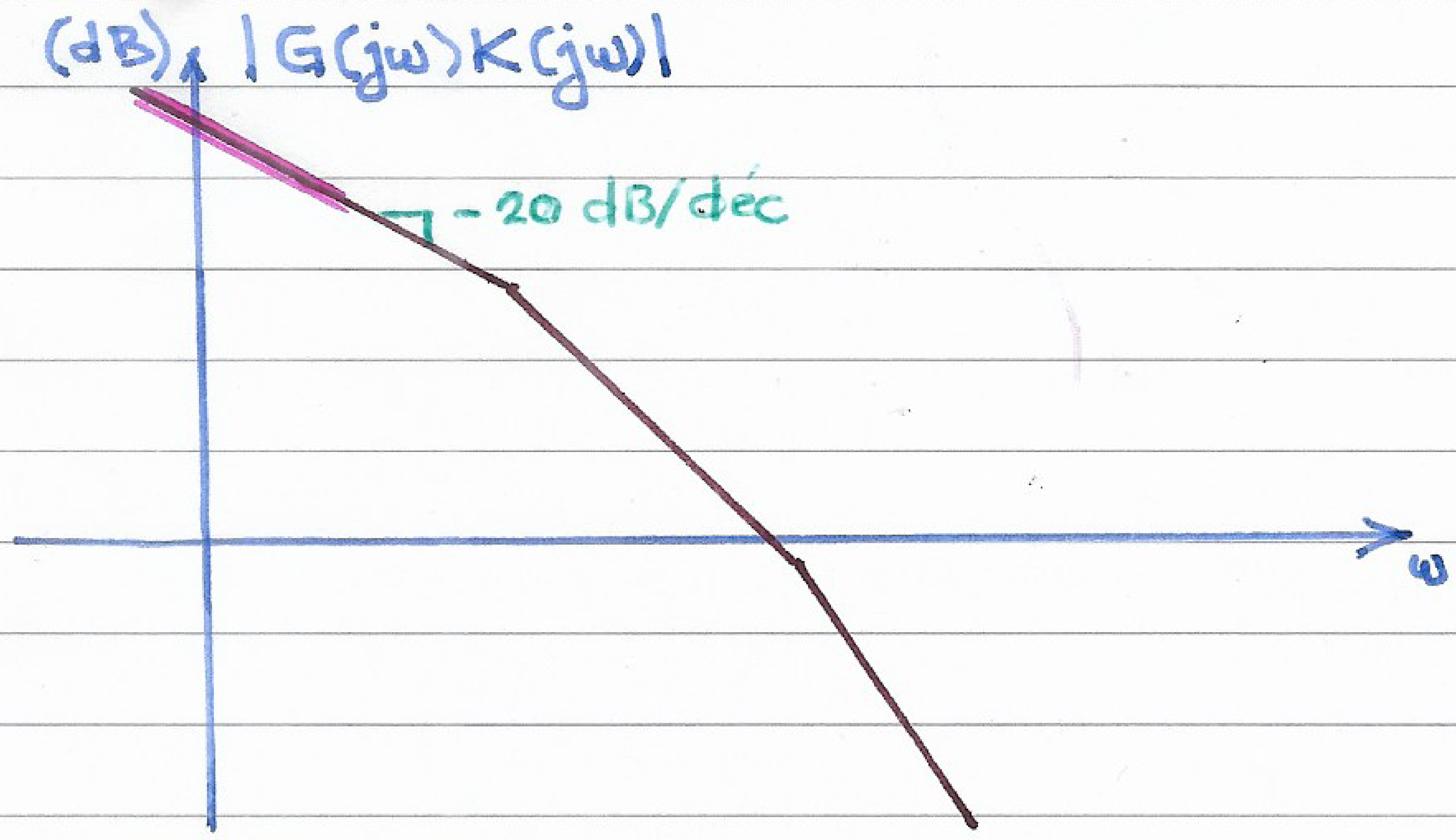
TIPO 1

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_0 \frac{(\tau_1 j\omega+1)\dots(\tau_m j\omega+1)}{j\omega(T_1 j\omega+1)\dots(T_n j\omega+1)}$$

ω suficientemente pequeno $\Rightarrow$

$$G(j\omega)K(j\omega) \to \frac{K_0}{j\omega} \Rightarrow$$

$$20\log_{10}|G(j\omega)K(j\omega)| \to 20\log|K_0| \underbrace{- 20\log\omega}_{-20\,dB/déc}$$



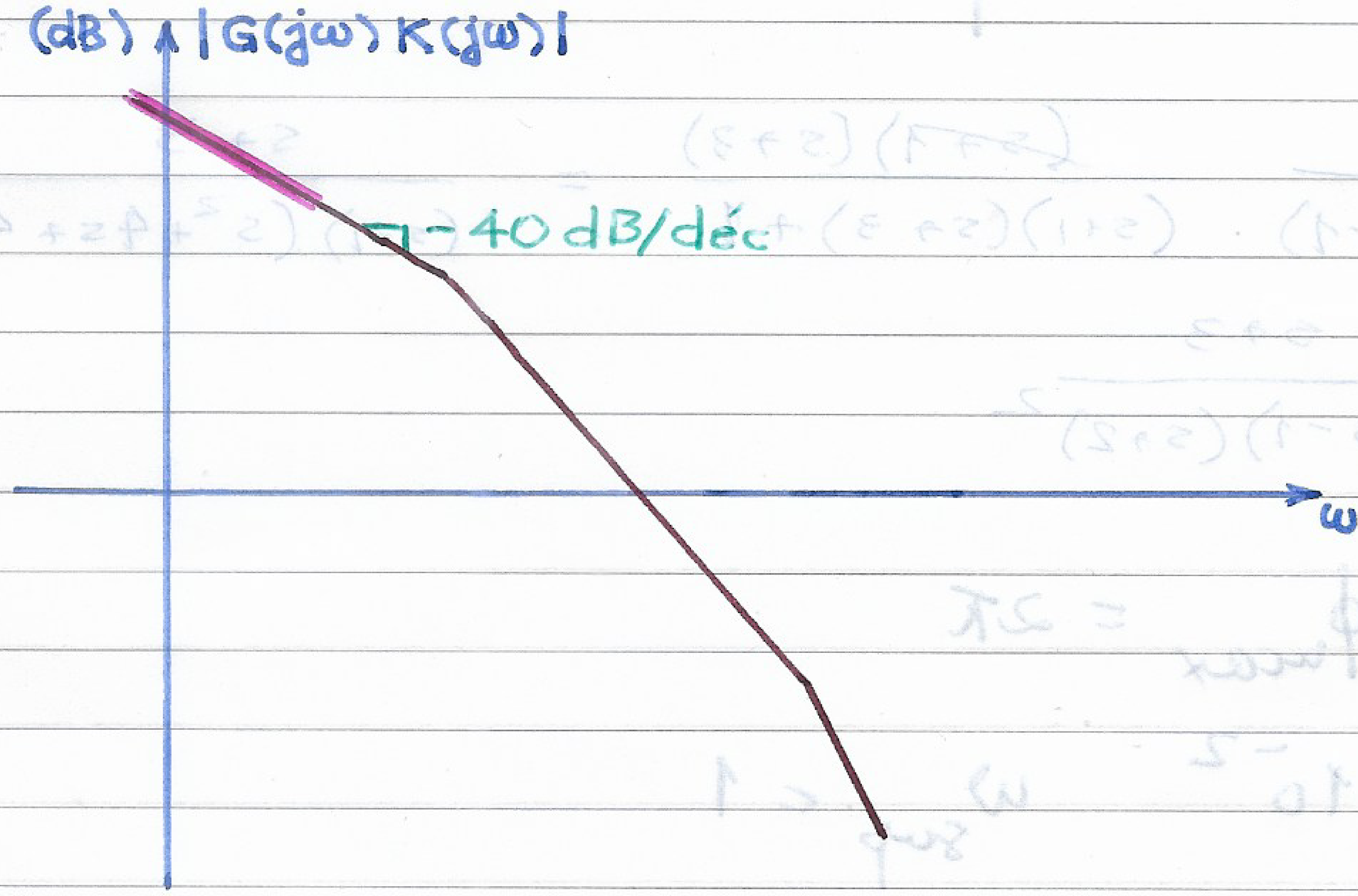
TIPO 2

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_o \frac{(\tau_1 j\omega+1)\dots(\tau_m j\omega+1)}{(j\omega)^2(T_1 j\omega+1)\dots(T_n j\omega+1)}$$

ω suficientemente pequeno $\Rightarrow$

$$G(j\omega)K(j\omega) \to \frac{K_o}{(j\omega)^2} \Rightarrow$$

$$20\log_{10}|G(j\omega)K(j\omega)| \to 20\log_{10}|K_o| - \underbrace{20\log\omega^2}_{-40\ dB/déc}$$



2.8.1 - ENTRADA DEGRAU / PERTURBAÇÃO DEGRAU

- $r(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \frac{A}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) \overset{\text{T.V.Final}}{=} \lim_{s\to 0} s\,e(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+G(s)K(s)}}_{S(s)} \frac{A}{\cancel{s}}$$

$$\therefore \boxed{e_{ss} = A\,S(0)}$$

- $G(s)K(s)$ tipo 0 $\Rightarrow S(0) = \frac{1}{1+K_0} \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{1+K_0}$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 1 $\Rightarrow G(0)K(0) = \infty \Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow e_{ss} = 0$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 2 $\Rightarrow G(0)K(0) = \infty \Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow e_{ss} = 0$ ✓

- $d(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{A}{1+G(s)K(s)} \cdot \frac{A}{s}$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+G(s)K(s)}}_{S(s)} \cdot \frac{A}{\cancel{s}}$$

$$\therefore \boxed{y_{ss} = A \cdot S(0)}$$

- $G(s)K(s)$ tipo 0 $\Rightarrow S(0) = \frac{1}{1+K_0} \Rightarrow y_{ss} = \frac{A}{1+K_0}$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 1 $\Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow y_{ss} = 0$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 2 $\Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow y_{ss} = 0$ ✓

2.8.2 - ENTRADA RAMPA/PERTURBAÇÃO RAMPA

- $r(s) = \frac{A}{s^2} \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \frac{A}{s^2} \Rightarrow$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,e(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1}{1+G(s)K(s)} \frac{A}{s^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A}{s+sG(s)K(s)} \Rightarrow$$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{sG(s)K(s)}}$$

- $G(s)K(s)$ tipo 0 $\Rightarrow G(0)K(0) = K_0 \Rightarrow e_{ss} = \infty$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 1 $\Rightarrow sG(s)K(s)\Big|_{s=0} = K_0 \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K_0}$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 2 $\Rightarrow sG(s)K(s)\Big|_{s=0} = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0$ ✓

- $d(s) = \frac{A}{s^2} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \frac{A}{s^2} \Rightarrow$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+G(s)K(s)} \frac{A}{s^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A}{s+sG(s)K(s)} \Rightarrow$$

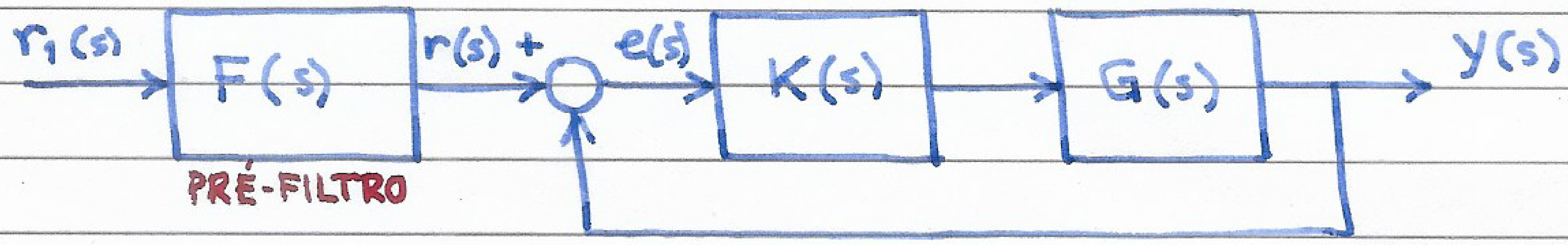
$$\boxed{y_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{sG(s)K(s)}}$$

- $G(s)K(s)$ tipo 0 $\Rightarrow G(0)K(0) = K_0 \Rightarrow y_{ss} = \infty$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 1 $\Rightarrow sG(s)K(s)\Big|_{s=0} = K_0 \Rightarrow y_{ss} = \frac{A}{K_0}$ ✓
- $G(s)K(s)$ tipo 2 $\Rightarrow sG(s)K(s)\Big|_{s=0} = \infty \Rightarrow y_{ss} = 0$ ✓

2.9 - ESPECIFICAÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO

- Comum: especificações da resposta transitória
  - sobressinal
  - tempo de acomodação
  - etc.
- Como abordar no domínio da frequência?

- **Sistemas com 2 graus de liberdade**



Ideia simples:

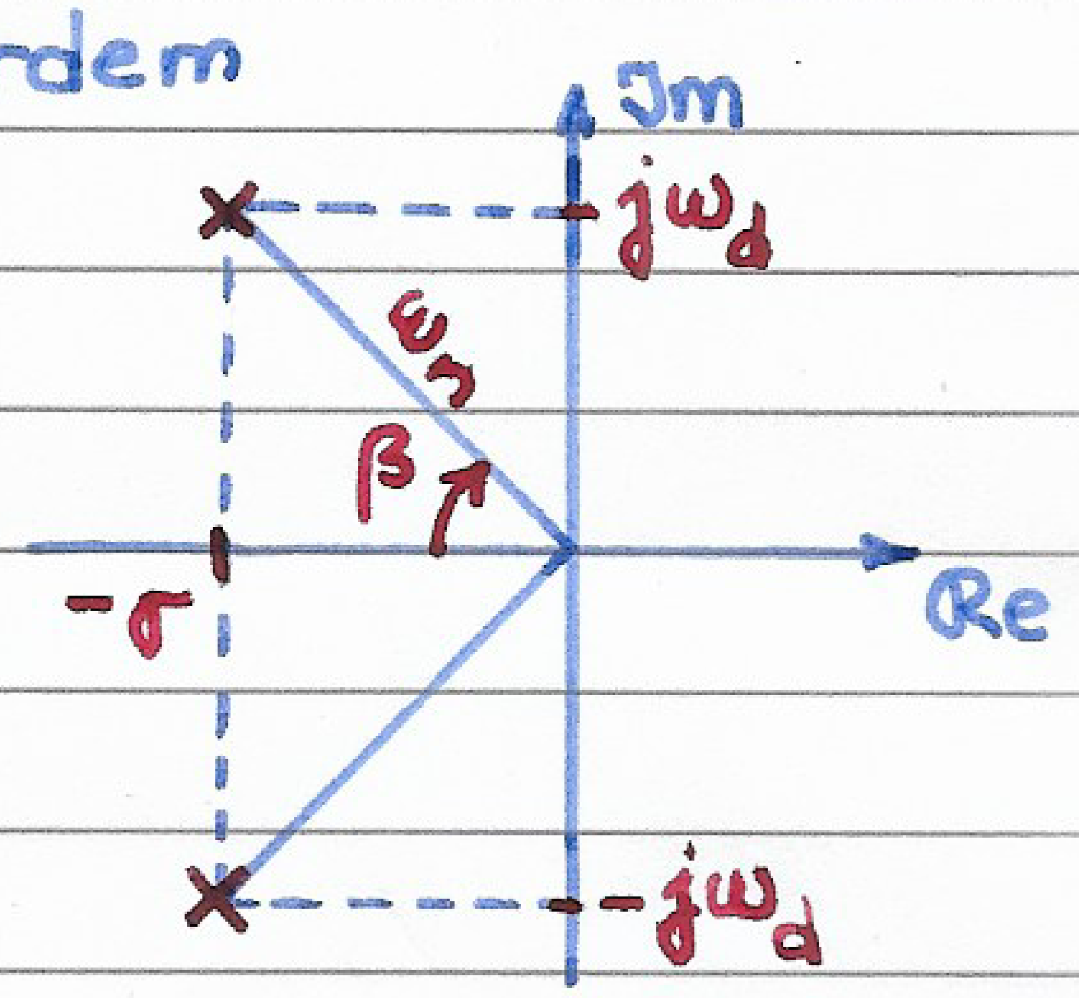
- Escolher $F(s)$ para $r(t)$ atender às especificações temporais
- Sintonizar a malha fechada para acompanhar $r(t)$
- Resultado: $y(t) \simeq r(t)$

• A escolha do pré-filtro

EXEMPLO - Sistema de 2ª ordem

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n > 0$ $\quad 0 < \xi < 1$

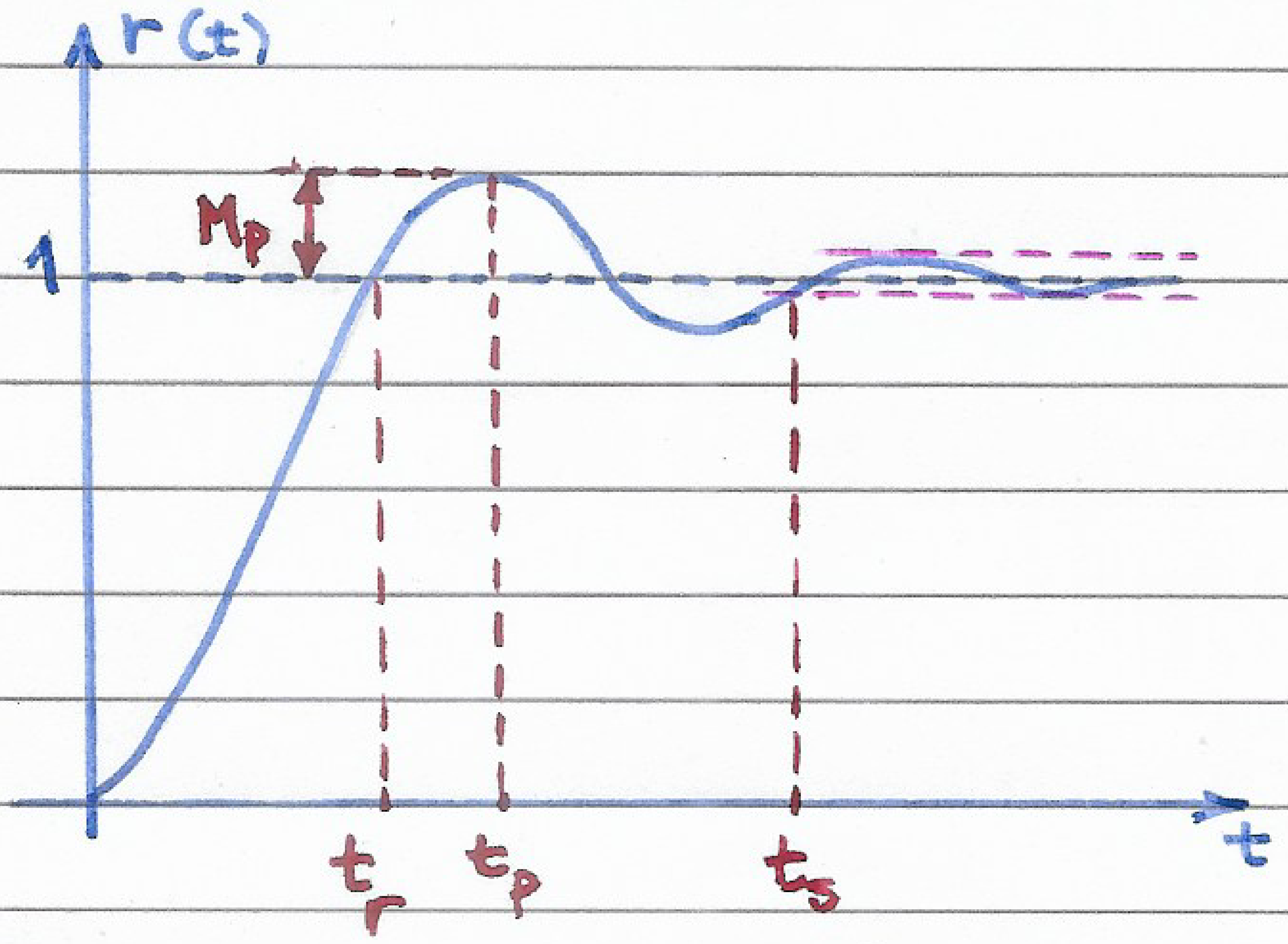


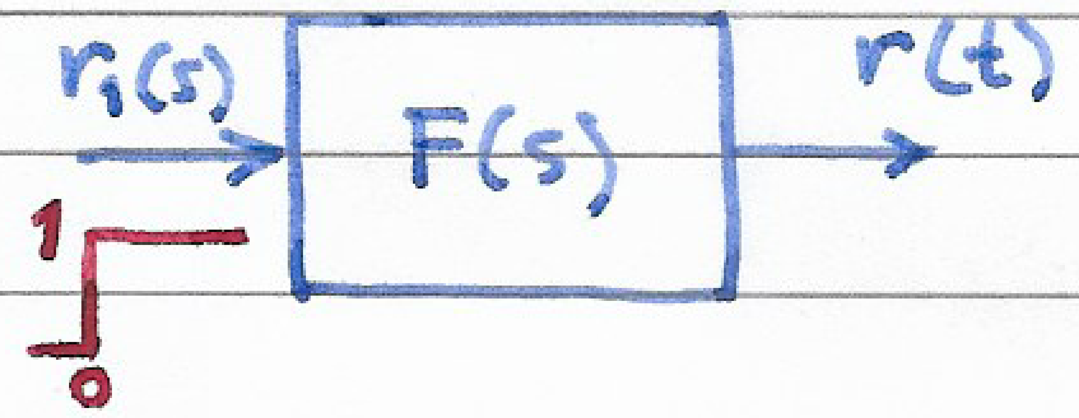
$\xi = \cos\beta$

$\omega_d = \omega_n \operatorname{sen}\beta$

$\sigma = \omega_n \xi$

Resposta a degrau unitário





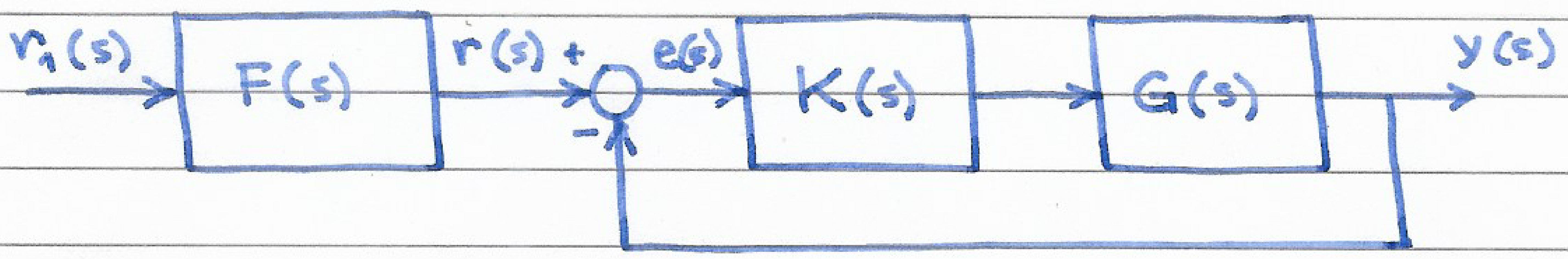
- Tempo de subida : $t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d}$

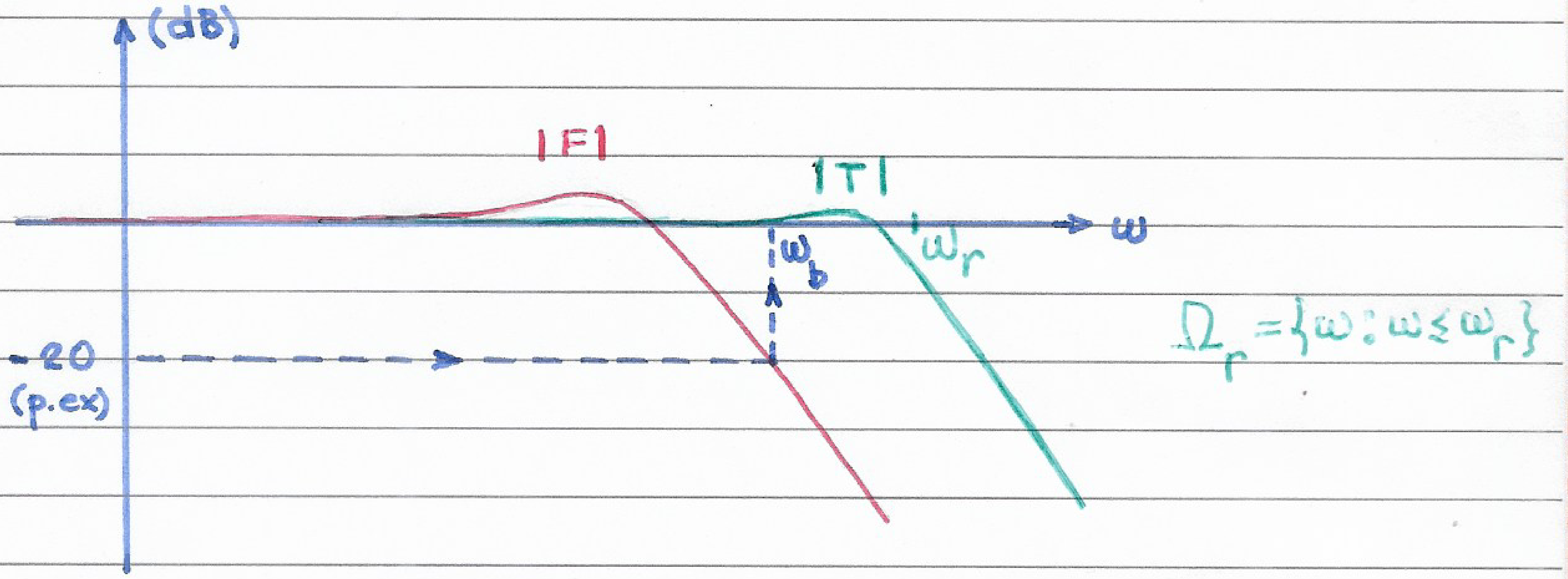
- Instante de pico : $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$

- Sobressinal : $M_p = e^{-\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

- Tempo de acomodação : $t_s(2\%) \simeq \dfrac{4}{\xi\omega_n}$
  $(0 < \xi < 0{,}9)$

  $t_s(5\%) \simeq \dfrac{3}{\xi\omega_n}$





- Se $T(j\omega) \simeq 1$ p/ $\omega \in \Omega_r$

- Se $\omega_r \geq \omega_b$

- Então

$$\frac{y(j\omega)}{r_1(j\omega)} = F(j\omega)T(j\omega) \simeq F(j\omega) \qquad (\omega \in \Omega_r)$$

$$\therefore \omega \leq \omega_b$$

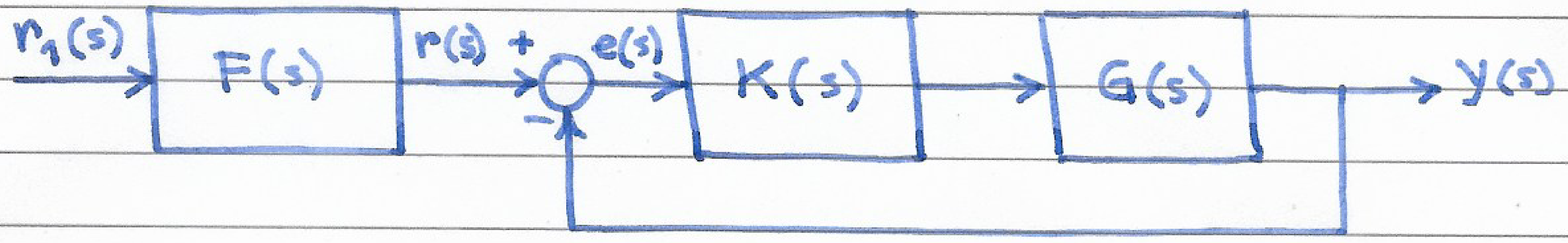
- Ou seja, na prática, para frequências $\omega \leq \omega_b$,

$$y(s) \simeq F(s)\, r_1(s)$$

e a resposta temporal do sistema de 2 g.d.l.

é proxima da resposta do pré-filtro.

- **Compatibilidade do pré-filtro com a malha fechada**



- Seja $\delta_F(\omega) > 0$ dado para $\omega \leq \omega_b$ (tipicamente $\delta_F(\omega) << 1$ p/ $\omega \leq \omega_b$)

- Dizemos que o pré-filtro é compatível com a malha fechada se

$$\frac{|e(j\omega)|}{|r_1(j\omega)|} \leq \delta_F(\omega) \qquad (\omega \leq \omega_b)$$

- Mas: $e(s) = r(s) - y(s) = r(s) - T(s)\,r(s) = [1 - T(s)]\,r(s)$

- Como: $r(s) = F(s)\,r_1(s)$

- Então: $e(s) = [1 - T(s)]\,F(s)\,r_1(s) \Rightarrow$

$$\frac{e(s)}{r_1(s)} = F(s)\,[1 - T(s)]$$

e a condição de compatibilidade fica:

$$\boxed{\left| F(j\omega)\,[1 - T(j\omega)] \right| \leq \delta_F(\omega) \qquad (\omega \leq \omega_b)}$$

- **NOTA**: Esta é a condição que deve ser satisfeita pelo pré-filtro qdo a malha fechada foi projetada previamente ($T(j\omega)$ é dado).