/ /

Fixe uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Queremos tomar nosso x como $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde $s_n = \sum_{i \leq n} \frac{a_i}{2^i}$

No entanto, para o sup estar definido, precisamos que a sequência seja limitada. Vamos mostrar que 1 é limitante. Como já mostramos que soma preserva as desigualdades, basta considerarmos o caso em que $a_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Provaremos por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$ $s_n = 1 - 1/2^n \leq 1$

Para $n = 1$ é óbvio, $s_1 = 1/2 = 1 - 1/2$

Agora assuma para n.

$s_{n+1} = \sum_{i \leq n+1} 1/2^i = \sum_{i \leq n} 1/2^i + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1-2}{2^{n+1}}$

Então podemos definir o x como queríamos e teremos também que $x \in [0,1]$, pois x é o menor majorante

Agora assuma a existência de outro y com a propriedade de que para todo n, $\sum_{i \leq n} \frac{a_i}{2^n} \leq y \leq \sum_{i \leq n} \frac{a_i}{2^n} + \frac{1}{2^n}$

Já vimos que se $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = y$, então escolha $\varepsilon > 0$.

Usando a desigualdade de Bernoulli para $x = 1$ temos que

$2^n \geq n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ou seja $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado. Podemos então escolher um $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \varepsilon$.

Com isso, temos, usando a desigualdade triangular,

$|x - y| \leq \left| \sum_{i \leq n} \frac{a_i}{2^n} + 1/2^n - \sum_{i \leq n} \frac{a_i}{2^n} \right| \leq |1/2^n| < \varepsilon$

Portanto, $x = y$