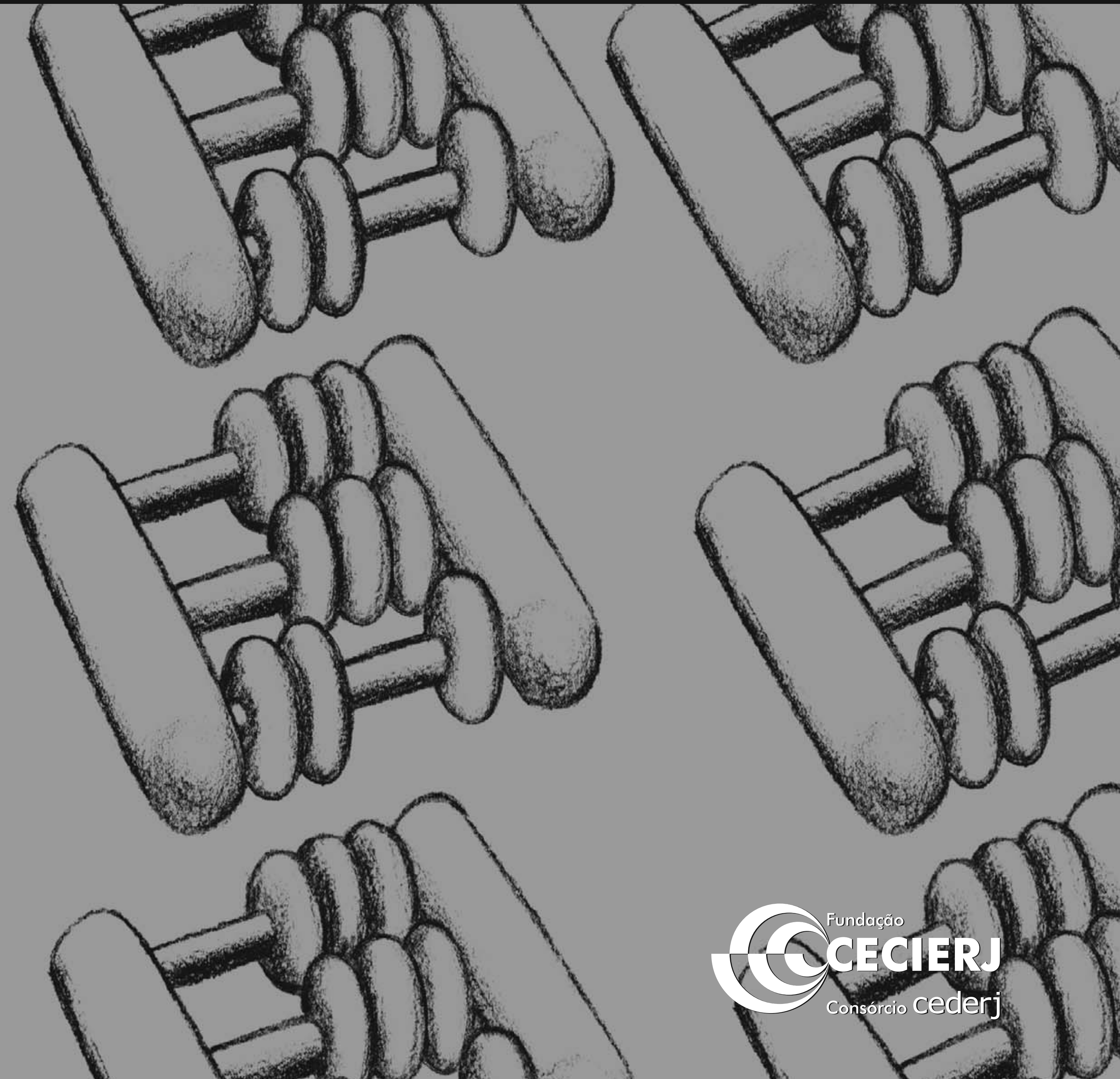
Módulos 3 e 4

Jorge J. Delgado Gómez
Maria Lúcia T. Villela

Volume 2
4ª edição

Pré-Cálculo



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Pré-Cálculo

Volume 2 - Módulos 3 e 4
4ª edição

Jorge J. Delgado Gómez
Maria Lúcia T. Villela

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação
BRASIL
UM PAÍS DE TODOS

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 - Mangueira - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Jorge J. Delgado Gómez
Maria Lúcia T. Villela

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Leonardo Villela
Márcio Paschoal

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO
Débora Barreiros

AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO
Letícia Calhau

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

D352p
Delgado Gómez, Jorge J.
Pré-cálculo: v.2 / Jorge J. Delgado Gómez.
4.ed. Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007.
230p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-359-9

1. Polinômios. 2. Funções. I. Villela, Maria Lúcia T.
II. Título.

CDD: 515

2007/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governadora
Rosinha Garotinho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Wanderley de Souza

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Raimundo Braz Filho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Nival Nunes de Almeida

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Cícero Mauro Fialho Rodrigues

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Pré-Cálculo | Volume 2

SUMÁRIO

Módulo 3

Polinômios com coeficientes reais

Em tais ocasiões, sinto vibrar em mim, com grande vivacidade, o verdadeiro sentido de $\sqrt{-1}$, mas creio que será extraordinariamente difícil exprimi-lo com palavras ...

Gauss

O objetivo deste módulo é estudar os polinômios com coeficientes reais, suas operações de adição e multiplicação e algumas propriedades elementares, tais como: os conceitos de divisibilidade e fatoração de polinômios em produto de potências de fatores da forma $x - a$, onde $a \in \mathbb{R}$, e $x^2 + bx + c$, onde b e c são números reais tais que $b^2 - 4c < 0$.

Veremos que a construção desta fatoração está relacionada com a existência de raízes complexas para os polinômios com coeficientes reais.
O conjunto dos números reais não tem raízes para todos os polinômios com coeficientes reais. Para determinarmos todas as raízes, precisamos de um conjunto de números maior, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Vamos definir o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, que contém $\mathbb{R}$, suas operações de adição e multiplicação, e estudar algumas das propriedades relevantes para obter a fatoração dos polinômios com coeficientes reais.

Finalmente, conhecendo os números complexos, finalizamos este Módulo com o famoso *Teorema Fundamental da Álgebra*, a saber: Todo polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais possui exatamente n raízes complexas. Este teorema foi demonstrado por *Gauss* em 1799 que, no decorrer de sua vida, apresentou ainda três demonstrações desse mesmo teorema, e *D'Alembert* dispendeu grandes esforços tentando demonstrá-lo.

Gauss
1777-1855, Alemanha.

Carl Friedrich Gauss, um mês antes de completar 19 anos, havia feito uma importante descoberta - a construção com régua e compasso do polígono regular de 17 lados. Esse foi um avanço considerável em relação à Matemática grega. Havia 2000 anos que sabia-se construir com régua e compasso o triângulo equilátero, o pentágono regular, assim como outros polígonos regulares com número de lados múltiplo de dois, três e cinco, mas nenhum outro polígono com número de lados primo. Entre as contribuições de Gauss, ainda como estudante, estão o método dos mínimos quadrados, a lei de reciprocidade quadrática e o Teorema Fundamental da Álgebra.

No endereço: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html` podem ser encontradas mais informações sobre Gauss.

§1. Polinômios e operações

Conceitos:
Números reais e operações,
frações irredutíveis.

Nesta seção definiremos o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e suas operações de adição e multiplicação. Estudaremos as propriedades destas operações, relacionadas diretamente com as propriedades da adição e multiplicação de números reais, e aprenderemos a efetuá-las na prática. Daremos o algoritmo de Euclides para polinômios e ensinaremos a determinar o quociente e o resto do algoritmo, em um problema do tipo "arme a conta e efetue os cálculos". A existência de raiz real em um polinômio com coeficientes reais será relacionada com a divisibilidade por polinômios lineares. Veremos que há polinômios com coeficientes reais sem raízes reais.

Determinar, quando existem, as raízes reais de um polinômio não é um problema fácil. Discutiremos um método para procurar as raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros.

Considerando a importância da divisão de um polinômio por um polinômio linear, vamos apresentar o dispositivo de Briot-Ruffini. Finalizaremos com a divisão sucessiva por polinômios lineares, relacionada com o conceito de raízes múltiplas.

Aula 16 – Polinômios - operações e propriedades

Objetivos

- Definir polinômios com coeficientes reais.
- Identificar monômios e o grau de um monômio.
- Aprender as operações de adição e multiplicação de polinômios com coeficientes reais e suas propriedades.
- Aprender o conceito de grau de polinômio e as suas propriedades.

Conceitos:
Números reais, operações de adição e multiplicação de números reais.

Nas Aulas 13 e 14, estudamos expressões do tipo $ax+b$ e ax^2+bx+c, sendo a, b e c números reais fixados e $a \neq 0$, sob o ponto de vista geométrico. Estas expressões são polinômios com coeficientes reais e serão estudadas nesta aula sob o ponto de vista algébrico, isto é, essas expressões serão manipuladas, usando operações de adição e multiplicação.

Seja x um símbolo não pertencente ao conjunto dos números reais, chamado uma *indeterminada ou variável sobre* $\mathbb{R}$.

Para cada número natural j, designamos a *j-ésima potência de x* por x^j e escrevemos $x^1 = x$ e $x^0 = 1$.

Um *polinômio com coeficientes reais* é uma expressão do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j,$$

onde n é um número natural e $a_j \in \mathbb{R}$, para $0 \leq j \leq n$.

O símbolo $\sum$ lê-se como somatório ou soma.

Para $0 \leq j \leq n$, os números reais a_j são chamados de *coeficientes*, as parcelas a_jx^j de *termos* e os termos a_jx^j tais que $a_j \neq 0$ de *monômios de grau j* do polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de *termo constante*.

Convencionamos:

(a) Para cada número natural n, chamar $0(x) = 0+0x+\cdots+0x^n$ de *polinômio identicamente nulo* e escrever $0(x) \equiv \mathbf{0}$.

O símbolo $\equiv$ lê-se como idêntico.

(b) Chamar $f(x) = a_0$ de *polinômio constante*.

(c) Escrever o polinômio $f(x)$ com as j-ésimas potências de x em ordem crescente ou em ordem decrescente, a saber, $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ou $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(d) Não escrever o termo $a_j x^j$ sempre que $a_j = 0$, quando houver algum termo não-nulo no polinômio.

Exemplo 6

a. Dados os números reais $a_0 = \dfrac{3}{2}$, $a_1 = -1$, $a_2 = \sqrt{2}$ e $a_3 = 1$, temos $f(x) = \dfrac{3}{2} - x + \sqrt{2}x^2 + x^3$.

b. Dados os números reais $a_0 = 2$, $a_1 = -\sqrt{5}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\pi$, $a_4 = 0$ e $a_5 = -2{,}4$, temos $g(x) = 2 - \sqrt{5}x - \pi x^3 - 2{,}4\,x^5$.

c. Dados os números reais $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$ e $a_4 = -3$, temos $h(x) = -x + 3x^2 - 3x^4$.

d. Dados os números reais $a_0 = 5$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 3$, temos $r(x) = 5 - x + 3x^2$.

e. Dados os números reais $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$ e $a_4 = -3$, temos $s(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$.

f. Dados os números reais $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = -3$ e $a_5 = a_6 = 0$, temos $t(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$.

g. As expressões $u(x) = x^{-2} + 3\sqrt{x} + x^5$ e $v(x) = 6\sqrt{x^3} - 4x^2 + 5$ **não são polinômios** porque nem todos os expoentes da variável x são números naturais.

O polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ pode também ser escrito como $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^{n+m}$, para todo número natural $m \geq 1$. Portanto, quando comparamos dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, é possível assumir que os termos de ambos têm as mesmas potências de x.

> Igualdade de polinômios:
> Os polinômios com coeficientes reais $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ *são iguais* se, e somente se, $a_j = b_j$ para todo j, tal que $0 \leq j \leq n$. Escrevemos $f(x) = g(x)$.

Isto é, $f(x)$ e $g(x)$ são iguais apenas quando todos os coeficientes das correspondentes potências de x em $f(x)$ e $g(x)$ são iguais.

Observe que, se $f(x)$ e $g(x)$ *não são iguais*, então existe algum número natural j, com $0 \leq j \leq n$ e $a_j \neq b_j$. Neste caso, dizemos que $f(x)$ e $g(x)$ *são diferentes* e escrevemos $f(x) \neq g(x)$.

No Exemplo 6, os coeficientes dos termos constantes dos polinômios $h(x) = -x + 3x^2 - 3x^4$ e $t(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$ são diferentes; logo $h(x) \neq t(x)$. Enquanto $s(x) = t(x)$, pois todos os coeficientes das mesmas potências de x em $s(x)$ e $t(x)$ são iguais.

Exemplo 7

Os polinômios $f(x) = x^4 - x^5 + 4x^2 + 3 - 2x$ e $g(x) = 3 + 4x^2 - 2x - x^5 + x^4$ são iguais, porque os seus coeficientes a_j da j-ésima potência x^j são: $a_0 = 3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ e $a_5 = -1$.

Escrevendo os polinômios com as potências de x em ordem crescente, visualizamos imediatamente a igualdade dos polinômios. Temos

$$f(x) = g(x) = 3 - 2x + 4x^2 + x^4 - x^5.$$

Em todo polinômio não identicamente nulo, $f(x) \not\equiv \mathbf{0}$, algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior número natural n, tal que $a_n \neq 0$. Definimos o grau de $f(x)$ por $gr(f(x)) = n$ e, nesse caso, a_n é chamado de coeficiente líder de $f(x)$.

O símbolo $\not\equiv$ lê-se como não é idêntico.

O símbolo $gr(f(x))$ lê-se como grau de f de x.

Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ são chamados de polinômios mônicos.

Importante: Não definimos o grau do polinômio identicamente nulo, $0(x) \equiv \mathbf{0}$.

Exemplo 8

O polinômio constante $u(x) = 5$ não é identicamente nulo e $gr(u(x)) = 0$. Volte ao Exemplo 6 e observe que $gr(f(x)) = 3$, $gr(g(x)) = 5$, $gr(h(x)) = 4$, $gr(r(x)) = 2$, $gr(s(x)) = 4$, $gr(t(x)) = 4$ e que o polinômio $f(x)$ é mônico.

Note que:

$$\boxed{gr(f(x)) = 0 \text{ se, e somente se, } f(x) = a \neq 0.}$$

Denotamos o conjunto de todos os polinômios na variável x com coeficientes reais por $\mathbb{R}[x]$.

$$\boxed{\mathbb{R}[x] = \{\, f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \;\mid\; n \in \mathbb{N},\, a_j \in \mathbb{R},\, 0 \leq j \leq n \,\}.}$$

No conjunto $\mathbb{R}[x]$ estão definidas duas operações com polinômios: adição e multiplicação.

Definição 16.1 (Adição de polinômios)

Definimos a adição dos polinômios $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ por

$$\boxed{f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j) x^j.}$$

O resultado da adição de dois polinômios é chamado de soma.

Exemplo 9

Sejam $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$ e $h(x) = -4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$. Então,

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= (4+0)x^3 + (-3+2)x^2 + (4+(-5))x + (5+(-2)) \\
&= 4x^3 - x^2 - x + 3, \\
f(x) + h(x) &= (4-4)x^3 + (-3+5)x^2 + (4-3)x + (5+1) \\
&= 0x^3 + 2x^2 + x + 6 \\
&= 2x^2 + x + 6.
\end{aligned}$$

Lembre que $a - b = a + (-b)$, para todos os números reais a e b.

No exemplo anterior, observamos que $gr(f(x)) = gr(h(x)) = 3$ e $gr(f(x) + h(x)) = 2$, enquanto $gr(g(x)) = 2$ e $gr(f(x) + g(x)) = 3 =$ máximo $\{ gr(f(x)), gr(g(x)) \}$.

Na adição de polinômios vale a seguinte propriedade do grau.

Propriedade do grau: [Adição de polinômios]

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_n \neq 0$, e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, com $b_m \neq 0$. Se $f(x) + g(x) \not\equiv \mathbf{0}$, então

$$\boxed{gr(f(x) + g(x)) \leq \max\{ gr(f(x)), gr(g(x)) \} = \max\{ n, m \}}$$

valendo a igualdade sempre que $gr(f(x)) = n \neq m = gr(g(x))$.

O símbolo max significa o maior ou o máximo dos números.

A adição de polinômios satisfaz diversas propriedades, que são conseqüência das propriedades da adição de números reais, conforme veremos a seguir.

Propriedades da adição:

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ e $h(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ elementos de $\mathbb{R}[x]$.

(A1) Comutativa:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)\,,$$

pois para todos $0 \leq j \leq n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, temos $a_j + b_j = b_j + a_j$.

(A2) Associativa:

$$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)),$$

pois para todos $0 \le j \le n$ e $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, temos $(a_j+b_j)+c_j = a_j+(b_j+c_j)$.

Lembre que
a adição de números reais é
comutativa e associativa.

(A3) Existência de elemento neutro:

O polinômio identicamente nulo $\mathbf{0} = \sum_{j=0}^{n} 0x^j$ satisfaz $f(x) = \mathbf{0} + f(x)$,

pois para todos $0 \le j \le n$ e $a_j \in \mathbb{R}$, temos $a_j = 0 + a_j$.

Lembre que em $\mathbb{R}$
0 é o elemento neutro aditivo
e
$-a$ é o simétrico de a.

(A4) Existência de simétrico:

Dado $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, o polinômio $-f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-a_j)x^j$ é o *simétrico* de $f(x)$, sendo

$$f(x) + (-f(x)) = \sum_{j=0}^{n} 0x^j\,,$$

pois $a_j + (-a_j) = 0$ para todo $0 \le j \le n$ e $a_j \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10

Consideremos os polinômios $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$ e $h(x) = -4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ do Exemplo 9.

a. No Exemplo 9 determinamos $f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 - x + 3$. Assim,

$(f(x)+g(x))+h(x) = (4x^3 - x^2 - x + 3) + (-4x^3 + 5x^2 - 3x + 1) =$
$(4-4)x^3 + (-1+5)x^2 + (-1-3)x + (3+1) = 0x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 4.$

b. A adição de polinômios pode ser feita facilmente se escrevemos os polinômios numa tabela, onde nas primeiras linhas estão cada um dos polinômios com as potências x^j em ordem decrescente, e na última linha o resultado da adição, de maneira similar à adição de números reais. Calcularemos $g(x) + h(x)$ desse modo.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 2x^2 & - & 5x & - & 2 \\ (+) & - & 4x^3 & + & 5x^2 & - & 3x & + & 1 \\ \hline & - & 4x^3 & + & 7x^2 & - & 8x & - & 1 \end{array}$$

Nesse caso, $g(x) + h(x) = -4x^3 + 7x^2 - 8x - 1$.

c. Podemos usar este processo para calcular a soma de m polinômios, construindo uma tabela com $m+1$ linhas e tantas colunas quantas forem necessárias. Por exemplo, para calcular $f(x) + g(x) + h(x)$ a tabela terá quatro linhas

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 4x^3 & - & 3x^2 & + & 4x & + & 5 \\ & & & & 2x^2 & - & 5x & - & 2 \\ (+) & - & 4x^3 & + & 5x^2 & - & 3x & + & 1 \\ \hline & & 0x^3 & + & 4x^2 & - & 4x & + & 4 \end{array}$$

Logo, $f(x) + g(x) + h(x) = 4x^2 - 4x + 4$.

No item a fizemos a adição desses três polinômios, usando a propriedade associativa e o resultado do cálculo de $f(x) + g(x)$ obtido no Exemplo 9. Faça a adição desses três polinômios, usando a propriedade associativa e o resultado do cálculo de $g(x) + h(x)$ obtido anteriormente.

Definição 16.2 (Multiplicação de polinômios)
Definimos a *multiplicação* dos polinômios $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ por

O resultado da multiplicação de dois polinômios é chamado de produto.

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j}$$

sendo

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\ c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ &\vdots \\ c_j &= a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \cdots + a_j \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu \\ &\vdots \\ c_{n+m} &= a_n \cdot b_m\,. \end{aligned}$$

Propriedade do grau: [Multiplicação de polinômios]

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_n \neq 0$, e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, com $b_m \neq 0$. Então,

$$\boxed{gr(f(x) \cdot g(x)) = n + m}$$

pois o coeficiente líder de $f(x) \cdot g(x)$ é $c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$.

Lembre que nos números reais $a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

A multiplicação de polinômios satisfaz as seguintes propriedades.

Propriedades da multiplicação:

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ e $h(x) = \sum_{j=0}^{r} c_j x^j$ elementos de $\mathbb{R}[x]$.

(M1) Comutativa:

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)\,,$$

pois para todo $0 \leq j \leq n+m$, vale a identidade

$$\sum_{\lambda+\mu=j} a_\mu b_\lambda = \sum_{\lambda+\mu=j} b_\lambda a_\mu\,.$$

Lembre que

no conjunto dos números reais a multiplicação é comutativa e associativa.

(M2) Associativa:

$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))\,.$$

Note que, em vista da definição das operações:

- Para todos $j, k \in \mathbb{N}$, vale a identidade: $x^j \cdot x^k = x^{j+k}$.
- Se $f(x) = a$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, então

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= a \cdot g(x) = a \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{m} (a \cdot b_k) x^k \\ &= (a \cdot b_0) + (a \cdot b_1)x + \cdots + (a \cdot b_m)x^m\,, \end{aligned}$$

pois, nesse caso, $a_0 = a$, $n = 0$, e $c_j = a_0 \cdot b_j = a \cdot b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

- Se $f(x) = ax^j$ com $j \geq 1$, e $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, então

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (ax^j) \cdot g(x) = (ax^j) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{m} (a \cdot b_k) x^{k+j} \\ &= (a \cdot b_0)x^j + (a \cdot b_1)x^{j+1} + \cdots + (a \cdot b_m)x^{j+m}\,, \end{aligned}$$

pois, nesse caso, temos $a_0 = 0, \ldots, a_{j-1} = 0$ $a_j = a$, $n = j$, $n+m = j+m$, $c_0 = 0, \ldots, c_{j-1} = 0$, $c_j = a_j \cdot b_0 = a \cdot b_0$, $c_{j+1} = a_j \cdot b_1 = a \cdot b_1$, $\ldots$, $c_{j+m} = a_j \cdot b_m = a \cdot b_m$.

Combinando as três observações anteriores com o fato da adição de polinômios corresponder a adicionar os coeficientes das potências de x de mesmo expoente em ambos os polinômios, obtemos mais uma propriedade, que envolve as duas operações.

Propriedade da adição e multiplicação:

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ e $h(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j$.

(AM) Distributiva:

$$(f(x) + g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)\,.$$

Lembre que

no conjunto dos números reais a adição e a multiplicação satisfazem a propriedade distributiva:

$$a(b+c) = ab + ac\,.$$

Agora podemos fazer exemplos de multiplicação de polinômios.

Exemplo 11

Consideremos os polinômios $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$ e $h(x) = -4x^3 - 3x + 1$.

a. Vamos calcular $f(x) \cdot g(x)$.

Usando a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios, temos

$$\begin{aligned}
&f(x) \cdot g(x) = (4x^3 - 3x^2 + 4x + 5) \cdot (2x^2 - 5x - 2) \\
&= 4x^3 \cdot (2x^2 - 5x - 2) + (-3x^2) \cdot (2x^2 - 5x - 2) + 4x \cdot (2x^2 - 5x - 2) + 5 \cdot (2x^2 - 5x - 2) \\
&= (8x^5 - 20x^4 - 8x^3) + (-6x^4 + 15x^3 + 6x^2) + (8x^3 - 20x^2 - 8x) + (10x^2 - 25x - 10) \\
&= 8x^5 + (-20 - 6)x^4 + (-8 + 15 + 8)x^3 + (6 - 20 + 10)x^2 + (-8 - 25)x - 10 \\
&= 8x^5 - 26x^4 + 15x^3 - 4x^2 - 33x - 10.
\end{aligned}$$

Observe que as igualdades acima foram obtidas:
(1) distribuindo as parcelas de $f(x)$ na multiplicação por $g(x)$;
(2) distribuindo cada multiplicação com respeito às parcelas de $g(x)$;
(3) fazendo a adição dos coeficientes das potências de x de mesmo expoente.

b. Vamos calcular $h(x) \cdot g(x)$.

Construiremos uma tabela, escrevendo $h(x)$ na primeira linha e $g(x)$ na segunda, com as potências de x em ordem decrescente. Fazemos a multiplicação usando a propriedade distributiva e calculando a multiplicação dos termos do polinômio $g(x)$ por $h(x)$, em ordem crescente das potências de x e organizando na tabela os resultados parciais em ordem decrescente das potências de x. A última linha da tabela será a adição das multiplicações parciais.

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & - & 4x^3 & - & 3x & + & 1 & \\
 & & & & (\times) & & 2x^2 & - & 5x & - & 2 & \\
\hline
 & & & & 8x^3 & & & + & 6x & - & 2 & -2 \cdot (-4x^3 - 3x + 1) \\
 & + & 20x^4 & & & + & 15x^2 & - & 5x & & & -5x \cdot (-4x^3 - 3x + 1) \\
-8x^5 & & & - & 6x^3 & + & 2x^2 & & & & & 2x^2 \cdot (-4x^3 - 3x + 1) \\
\hline
-8x^5 & + & 20x^4 & + & 2x^3 & + & 17x^2 & + & x & - & 2 & \text{adição das 3 parcelas}
\end{array}$$

Temos $gr(h(x) \cdot g(x)) = 5 = 3 + 2 = gr(h(x)) + gr(g(x))$.

Resumo

Você aprendeu o conceito de polinômio com coeficientes reais, as operações de adição e multiplicação de polinômios e suas propriedades comutativa, associativa e distributiva. Também aprendeu que o maior inteiro n, tal que o coeficiente $a_n \neq 0$, é chamado de grau do polinômio.

Exercícios

1. Sejam $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, $g(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x - 3$, $h(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 2$, $r(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$ e $s(x) = -x^2 + x - 3$. Efetue a operação e dê o grau dos resultados não identicamente nulos:

a. $f(x) + g(x)$ **b.** $x^2 \cdot f(x) - g(x) + x \cdot h(x)$
c. $g(x) + (3 - 2x^2) \cdot h(x)$ **d.** $g(x) + h(x) + r(x) + s(x)$
e. $h(x) + r(x)$ **f.** $h(x) \cdot s(x) + r(x) \cdot s(x)$
g. $(2x - 1) \cdot r(x) - (3x + 2) \cdot s(x)$ **h.** $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) - (s(x))^2$

Se $f(x)$ é um polinômio e $n \geq 1$ é um número natural, então $(f(x))^n = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ fatores}}$

Convencionamos não escrever o sinal da operação de multiplicação de polinômios. Assim, $f(x)g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

2. Determine:
a. $(x^4 - 3x^2 + 5)(2x + 3) + (x^2 + 3x)(4x^3 - 6x)$.
b. $9x^2(2x^2 + 3) + 4x(3x^3 - 2)$.

3. Determine:

a. $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$ **b.** $(x - 2)^3$ **c.** $(x - 1)^2(x + 1)^2$
d. $(x + 3)(x + 1)(x - 4)$ **e.** $(x + 2)^4$ **f.** $(\frac{1}{2}x - 4)^2$
g. $(\frac{1}{3}x + 3)^3$

Lembre da fórmula do binômio de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

4. Determine os números reais a, b, c e d para que as identidades de polinômios sejam verdadeiras:
a. $(a + 5)x^3 + (1 - b)x^2 + (2c - 1)x + (d + 2) \equiv \mathbf{0}$.
b. $3ax^7 - 2bx^5 + 3cx^4 + (d + 3) = x^5 - x^4 + 3$.
c. $ax^2 + bx + c = (ax - d)^2$.
d. $(b + d)x^4 + (d + a)x^3 + (a - c)x^2 + (c + b)x = 4x^4 + 2x^2$.

5. Determine números reais a, b, c e d tais que
$$f(x) + 2g(x) - 3h(x) = -3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x + 2,$$
sabendo que $f(x) = ax^3 + 2x^2 - x + d$, $g(x) = x^3 + bx^2 - 2x - 4$ e $h(x) = x^4 + 2x^3 + dx^2 + cx + c$.

6. Dado o polinômio $g(x)$, determine, em cada item, o polinômio $f(x)$, satisfazendo a condição indicada:
a. $f(x) + g(x) = \mathbf{0}$, $g(x) = x^2 - x + 3$.

b. $2f(x)+3g(x)=4x^5+x^3+x^2-x+1$, $g(x)=2x^4-x^3-x^2+3x+5$.
c. $3f(x)-2g(x)+5x-3=6x^3+5x^2-3x-2$, $g(x)=5ax^3-bx^2+2x+c$.

7. Discuta, para $a \in \mathbb{R}$, o grau do polinômio $f(x)$:
a. $f(x)=(a^2-1)^2x^3+(a^2-3a+2)x+a+3$
b. $f(x)=ax^2+2ax+9$
c. $f(x)=(a^3-a)x^3+a(a-1)x^2+a^3-1$

Auto-avaliação

Você deve prosseguir após saber identificar um polinômio com coeficientes reais; determinar o grau de polinômios não identicamente nulos; comparar polinômios; calcular a adição e a multiplicação de polinômios e saber suas propriedades. Resolveu os exercícios sem dificuldade? Caso não tenha conseguido, reveja as definições das operações e releia as suas propriedades. Para resolução dos exercícios propostos basta saber as operações, suas propriedades e como comparar polinômios. Nos Exercícios 4 a 6 use a definição de igualdade de polinômios e no Exercício 7, a definição de grau. Procure os tutores sempre que a dúvida persistir. Na Aula 17 vamos aprender o algoritmo euclidiano para polinômios e o conceito de divisibilidade.

Aula 17 – Divisibilidade - raízes

Objetivos

- Aprender o conceito de divisibilidade e o algoritmo euclidiano para polinômios.
- Compreender o conceito de raiz real de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$.
- Relacionar a existência de uma raiz real α com a divisibilidade por $x - \alpha$.
- Relacionar a existência de raízes reais distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com a divisibilidade por $(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$.
- Determinar as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros.

Conceitos:
Números reais, operações de adição e multiplicação de números reais, frações irredutíveis, polinômios e operações de adição e multiplicação de polinômios.

No conjunto dos polinômios $\mathbb{R}[x]$ temos o conceito de divisibilidade.

Definição 17.1 (Divisibilidade)
Sejam $f(x)$, $g(x)$ polinômios em $\mathbb{R}[x]$, com $g(x) \not\equiv \mathbf{0}$. Dizemos que $g(x)$ *divide* $f(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que

$$f(x) = q(x)\,g(x).$$

Dizemos também que $f(x)$ é *múltiplo* de $g(x)$ ou que $f(x)$ é *divisível* por $g(x)$.

Exemplo 6

a. Como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, temos que $x - 2$ divide $x^2 - 4$. Note que $x + 2$ também divide $x^2 - 4$.

b. O polinômio $x^4 + 5x^2 + 6$ pode ser escrito como

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2+3)(x^2+2).$$

Logo, $x^2 + 3$ e $x^2 + 2$ dividem $x^4 + 5x^2 + 6$.

c. A igualdade dos polinômios $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, $2x+1 = 2(x+\frac{1}{2})$ e $(2x+1)(x^3-8) = 2x^4 + x^3 - 16x - 8$ significa que $2x^4 + x^3 - 16x - 8$ é múltiplo de $x + \frac{1}{2}$, $x - 2$ e $x^2 + 2x + 4$.

d. Dados números naturais $m \leq n$, o polinômio x^m divide x^n pois, tomando $r = n - m \geq 0$, podemos escrever

$$x^n = x^{r+m} = x^r \cdot x^m.$$

É claro que nem sempre um polinômio é múltiplo do outro.

Exemplo 7

A redução ao absurdo é uma estratégia para demonstrações. O Módulo 3 de Matemática Discreta que trata da redução ao absurdo.

Há algum polinômio $q(x)$, tal que $x^2 + 3x + 2 = q(x)(x + 4)$?

Suponhamos, por absurdo, que existe $q(x)$. Como $2 = gr(x^2 + 3x + 2)$ e $1 = gr(x + 4)$, um tal polinômio $q(x)$ deve ter grau igual a 1. Assim, $q(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ e a, b números reais. Então,

$$x^2+3x+2 = (ax+b)(x+4) = ax^2+4ax+bx+4b = ax^2+(4a+b)x+4b.$$

Portanto, $a = 1$, $4a+b = 3$ e $4b = 2$. A primeira e a última equação nos dizem que $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, mas $3 = 4a + b = 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ é uma contradição. Concluímos assim que $x^2 + 3x + 2$ não é divisível por $x + 4$.

No conjunto dos números inteiros, conhecemos o conceito de divisibilidade e aprendemos o algoritmo euclidiano, um algoritmo para a divisão por um inteiro positivo com resto maior ou igual a zero e menor do que o divisor.

No conjunto $\mathbb{R}[x]$ dos polinômios com coeficientes reais temos um algoritmo para a divisão de polinômios, similar ao algoritmo da divisão nos inteiros, onde o resto deve satisfazer uma condição especial.

Algoritmo de Euclides

Dados os polinômios com coeficientes reais $f(x)$ e $g(x) \not\equiv \mathbf{0}$, existe um único par de polinômios com coeficientes reais $q(x)$ e $r(x)$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)\,,$

(ii) $r(x) \equiv \mathbf{0}$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))\,.$

Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão. Os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são chamados de *dividendo* e *divisor*. Além disso, quando o resto $r(x)$ é identicamente nulo, temos que $g(x)$ divide $f(x)$.

Exemplo 8

Sejam $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

Como $gr(2x + 1) = 1 < 2 = gr(x^2 + 3x - 2)$, tomamos $q(x) \equiv \mathbf{0}$ e $r(x) = f(x)$ pois, $f(x) = 2x + 1 = \mathbf{0} \cdot g(x) + r(x)$.

O exemplo anterior ilustra o caso geral em que o grau do dividendo é menor do que o grau do divisor.

Sempre que $gr(f(x)) < gr(g(x))$ tomamos $q(x) \equiv \mathbf{0}$, $r(x) = f(x)$ e

escrevemos $f(x) = \mathbf{0} \cdot g(x) + r(x)$.

Como determinamos $q(x)$ e $r(x)$ quando $gr(f(x)) \geq gr(g(x))$?

Primeiramente, observe que com $gr(f(x)) \geq gr(g(x))$ temos $q(x) \not\equiv \mathbf{0}$. Logo, $gr(q(x)g(x)) = gr(q(x)) + gr(g(x))$.

Sendo $r(x) \equiv \mathbf{0}$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x)) \leq gr(q(x)) + gr(g(x)) = gr(q(x)g(x))$, temos que $gr(q(x)g(x)) = gr(q(x)g(x) + r(x)) = gr(f(x))$. Portanto, $gr(q(x)) = gr(f(x)) - gr(g(x))$.

Fazemos a divisão nos preocupando apenas com o grau do divisor e do dividendo e com a condição do resto ser identicamente nulo ou ter grau menor do que o grau do divisor. Vejamos como são feitos os cálculos, usando o *método dos coeficientes a determinar.*

O método dos coeficientes a determinar consiste em calcular os coeficientes do quociente e do resto, usando os coeficientes do dividendo e do divisor e a igualdade de polinômios.

Exemplo 9

Sejam $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ e $g(x) = x + 2$. Na divisão de $f(x)$ por $g(x)$, o quociente $q(x)$ tem grau igual a $gr(f(x)) - gr(g(x)) = 1$ e o resto $r(x)$ é identicamente nulo ou tem grau menor do que $gr(g(x)) = 1$. Portanto, podemos escrever $q(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, e $r(x) = c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{ é equivalente a}$$
$$2x^2 + 5x + 3 = (ax + b)(x + 2) + c = ax^2 + (2a + b)x + (2b + c).$$

Comparando os coeficientes dos polinômios da direita e da esquerda da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 5 \\ 2b + c = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 - 2a = 5 - 2 \cdot 2 = 1 \\ c = 3 - 2b = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Portanto, $q(x) = 2x + 1$, $r(x) = 1$ e $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 1)(x + 2) + 1$.

Exemplo 10

Digamos que $f(x) = 12x^4 + 6x^2 + 2$ e $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Na divisão de $f(x)$ por $g(x)$, o quociente $q(x)$ tem grau 2 e o resto $r(x) \equiv \mathbf{0}$ ou $0 \leq gr(r(x)) \leq 1$. Escrevemos $q(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e $r(x) = dx + e$, com $d, e \in \mathbb{R}$. Devemos determinar números reais a, b, c, d, e tais que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$. Isto é equivalente a

$$12x^4 + 6x^2 + 2 = (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + dx + e.$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade, obtemos

$12x^4+6x^2+2 = 3ax^4+(2a+3b)x^3+(a+2b+3c)x^2+(b+2c+d)x+(c+e).$

Comparando os coeficientes, temos

$$\begin{cases} 3a = 12 \\ 2a+3b=0 \\ a+2b+3c=6 \\ b+2c+d=0 \\ c+e=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{3} = 4 \\ b = -\frac{2a}{3} = -\frac{2\cdot 4}{3} = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{6-a-2b}{3} = \frac{6-4-2\cdot(-\frac{8}{3})}{3} = \frac{22}{9} \\ d = -b-2c = \frac{8}{3} - 2\cdot\frac{22}{9} = -\frac{20}{9} \\ e = 2-c = 2-\frac{22}{9} = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Concluímos assim que $q(x) = 4x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{22}{9}$, $r(x) = -\frac{20}{9}x - \frac{4}{9}$ e

$$12x^4+6x^2+2 = (4x^2 - \tfrac{8}{3}x + \tfrac{22}{9})(3x^2+2x+1) - \tfrac{20}{9}x - \tfrac{4}{9}.$$

Você deve ter observado, no exemplo anterior, que a determinação do monômio de maior grau do quociente só depende dos monômios de maior grau do dividendo e do divisor. No algoritmo da divisão de polinômios devemos prestar atenção aos graus do dividendo, do divisor e do resto. Agora vamos armar a divisão.

Vejamos como determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão euclidiana do polinômio $f(x)$ por $g(x) \not\equiv \mathbf{0}$. Elaboramos uma tabela, ilustrando os cálculos passo a passo, com o objetivo de obter o algoritmo da divisão. Na tabela armamos a divisão para calcular o quociente e o resto, resultados do algoritmo da divisão. Os seguintes exemplos consistem de armar e efetuar, conforme o modelo.

$$\begin{array}{c|c} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

Exemplo 11

Sejam $f(x) = 4x+3$ e $g(x) = x^2+3x+1$.

(1) Temos $gr(f(x)) = 1 < 2 = gr(g(x))$. Nada a fazer.

(2) O quociente é $q(x) \equiv \mathbf{0}$ e o resto é $r(x) = f(x) = 4x+3$.

$$\begin{array}{ccc|ccccc} 4x & + & 3 & x^2 & + & 3x & + & 1 \\ \cline{4-8} & - & 0 & 0 & & & & \\ \cline{1-3} 4x & + & 3 & & & & & \end{array}$$

Exemplo 12

Sejam $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

(1) O monômio de maior grau de $f(x)$ é $2x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $2x^2$ por x^2 é $q_1(x) = 2$.

(2) Fazemos o cálculo:

$$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (2x^2 + 4x + 3) - 2x^2 - 6x - 2 = -2x + 1.$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 2x^2 & + & 4x & + & 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{7-7} - & 2x^2 & - & 6x & - & 2 & 2 \\ \cline{1-6} & & - & 2x & + & 1 & \end{array}$$

(3) Como $1 = gr(r_1(x)) < gr(g(x)) = 2$, não podemos continuar a divisão, paramos os cálculos.

(4) Obtemos $q(x) = q_1(x) = 2$ e $r(x) = r_1(x) = -2x + 1$.

Sempre que $n = r + m$, com $n, m, r \in \mathbb{N}$, temos $n \geq m$, $x^n = x^r \cdot x^m$ é equivalente a x^m divide x^n.

Exemplo 13

Sejam $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

(1) O monômio de maior grau de $f(x)$ é $3x^4$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $3x^4$ por x^2 é $q_1(x) = 3x^2$.

(2) Fazemos o cálculo:

$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3) - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 = -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l} & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{11-11} - & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & 3x^2 \\ \cline{1-10} & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 & \end{array}$$

(3) Como $3 = gr(r_1(x)) > gr(g(x)) = 2$ devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto do algoritmo de Euclides.

(4) O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $-4x^3$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $-4x^3$ por x^2 é $q_2(x) = -4x$.

(5) Fazemos o cálculo:

$r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = (-4x^3 - 2x^2 + 2x - 3) + 4x^3 + 12x^2 + 4x = 10x^2 + 6x - 3$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l} & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{11-11} - & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & 3x^2 - 4x \\ \cline{1-10} & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 & \\ & & & 4x^3 & + & 12x^2 & + & 4x & & & \\ \cline{3-10} & & & & & 10x^2 & + & 6x & - & 3 & \end{array}$$

(6) Como $2 = gr(r_2(x)) = gr(g(x)) = 2$, podemos continuar, calculando a divisão de $r_2(x)$ por $g(x)$, pois $r_2(x)$ não é o resto do algoritmo de Euclides.

(7) O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é $10x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $10x^2$ por x^2 é $q_3(x) = 10$.

(8) Fazemos o cálculo:

$$r_3(x) = r_2(x) - q_3(x)g(x) = (10x^2+6x-3) - 10x^2 - 30x - 10 = -24x - 13.$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrr}
 & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & x^2 & + & 3x & + & 1 \\ \cline{11-15}
- & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & 3x^2 & - & 4x & + & 10 \\ \cline{1-10}
 & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 & & & & & \\
 & & & 4x^3 & + & 12x^2 & + & 4x & & & & & & & \\ \cline{3-10}
 & & & & & 10x^2 & + & 6x & - & 3 & & & & & \\
 & & & & - & 10x^2 & - & 30x & - & 10 & & & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & - & 24x & - & 13 & & & & &
\end{array}$$

(9) Como $1 = gr(r_3(x)) < gr(g(x)) = 2$, terminamos o algoritmo, pois $r_3(x)$ é o resto do algoritmo de Euclides.

(10) Obtemos

$q(x) = 3x^2 - 4x + 10 = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$ e $r(x) = r_3(x) = -24x - 13$.

Consideremos o polinômio $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ com coeficientes reais e o número real α. Substituindo x por α na expressão de $f(x)$, obtemos o número real

O símbolo α lê-se alfa.

O símbolo $f(\alpha)$ lê-se efe de alfa.

$$\boxed{f(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + \cdots + a_2 \cdot \alpha^2 + a_1 \cdot \alpha + a_0}$$

Dizemos que o número real $f(\alpha)$ é obtido *avaliando* $f(x)$ em $x = \alpha$.

Exemplo 14

Seja $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Escolhendo $\alpha = -2$, temos

$$f(\alpha) = f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 1 = -8 + 4 - 2 + 1 = -5.$$

Fazendo $x = 3$, obtemos $f(3) = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$ e tomando $x = -1$, $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$.

Note que podemos escrever $f(x)$ como o produto $f(x) = (x+1)(x^2+1)$.

Para cada número real α, temos $f(\alpha) = (\alpha+1)(\alpha^2+1)$ e $\alpha^2 + 1 \neq 0$. Portanto, $f(\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha + 1 = 0$. Isto é, $f(\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha = -1$.

Exemplo 15

Seja $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$. Nesse caso,

$g(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 = 32 - 24 + 4 = 12$, $\;g(0) = 2 \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^3 + 0^2 = 0$,
$g(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ e $g(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^4 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 0$.

Note que podemos escrever $g(x)$ como o produto

$$g(x) = 2(x^4 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2) = 2x^2(x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}) = 2x^2(x-1)(x-\tfrac{1}{2}).$$

A última igualdade foi obtida usando as *fórmulas de Bhaskara* para calcular as raízes de $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, onde o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (\frac{3}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$$x_1 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}) = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Para cada número real α, temos $g(\alpha) = 2\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha - \frac{1}{2})$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 \quad & \text{se, e somente se,} \quad \alpha^2 = 0, \text{ ou } \alpha - 1 = 0, \text{ ou } \alpha - \tfrac{1}{2} = 0 \\ & \text{se, e somente se,} \quad \alpha \in \{\, 0, 1, \tfrac{1}{2} \,\}. \end{aligned}$$

Definição 17.2 (Raiz)
Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais e $gr(f(x)) \geq 1$. Dizemos que o número real α é uma raiz de $f(x)$ se, e somente se, $f(\alpha) = 0$.

No Exemplo 14, a única raiz real de $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ é $\alpha = -1$, enquanto, no Exemplo 15, o polinômio $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$ admite 3 raízes reais distintas, a saber 0, 1 e $\frac{1}{2}$.

Uma raiz real α de um polinômio não-constante $f(x)$ está relacionada com o fato de $x - \alpha$ dividir $f(x)$. Por quê?

Dados um polinômio não-constante $f(x)$ e um número real α, fazendo a divisão euclidiana de $f(x)$ por $x - \alpha$, obtemos

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x), \text{ onde } r(x) \equiv \mathbf{0} \text{ ou } 0 \leq gr(r(x)) < 1.$$

Logo, podemos escrever $r(x) = c \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + c.$$

Substituindo $x = \alpha$ na igualdade anterior, obtemos

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + c = 0 \cdot q(\alpha) + c = c.$$

Logo,

$$\boxed{\begin{gathered} \text{O resto da divisão de } f(x) \text{ por } x - \alpha \text{ é } r(x) = f(\alpha) \\ \text{e} \\ x - \alpha \text{ divide } f(x) \Longleftrightarrow r(x) \equiv \mathbf{0} \Longleftrightarrow f(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \text{ é uma raiz de } f(x). \end{gathered}}$$

Exemplo 16

Na divisão de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ por $x - 1$ o resto é $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$. Portanto, 1 não é raiz de $f(x)$. No entanto, temos

$$f(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 4 = -8 + 4 + 4 = 0.$$

Logo, -2 é uma raiz de $f(x)$ e $x + 2$ divide $f(x)$. Calcule o quociente e verifique que $q(x) = x^2 - 2x + 2$. A única raiz real de $f(x)$ é -2. Por quê?

Escreva $f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. As raízes de $f(x)$ são -2 e as raízes de $x^2 - 2x + 2$. Como o discriminante do trinômio do 2º grau é

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0,$$

o gráfico desse trinômio é uma parábola que não intersecta o eixo x, então o trinômio não tem raízes reais.

Vimos no Exemplo 15 que $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ dividia o polinômio $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$, onde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ eram as raízes reais distintas de $g(x)$.

Esta propriedade vale para todos os polinômios com n raízes reais distintas, conforme veremos na seguinte proposição.

Proposição 17.1
Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. O polinômio $f(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números reais distintos se, e somente se, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são raízes reais distintas de $f(x)$.

Para provar a equivalência $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ usamos os símbolos ($\Rightarrow$:) e ($\Leftarrow$:) para indicar as demonstrações de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, respectivamente.

Demonstração: ($\Rightarrow$:) Se $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ divide $f(x)$, então existe um polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) q(x).$$

Dessa igualdade segue que $f(\alpha_1) = 0, \ldots, f(\alpha_n) = 0$. Logo, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são raízes reais distintas de $f(x)$.

($\Leftarrow$:) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ raízes reais distintas de $f(x)$.

(1ª Etapa) Como α_1 é raiz de $f(x)$ podemos escrever

$$f(x) = (x - \alpha_1) q_1(x).$$

(2ª Etapa) Como α_2 também é raiz de $f(x) = (x - \alpha_1) q_1(x)$, temos

$$0 = f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) q_1(\alpha_2).$$

Como $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ (pois $\alpha_1 \neq \alpha_2$) e o produto de dois números reais é zero se, e somente se, um dos fatores é zero, devemos ter $q_1(\alpha_2) = 0$.

Portanto, α_2 é raiz do polinômio $q_1(x)$, $q_1(x) = (x - \alpha_2) q_2(x)$ e

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) q_2(x).$$

(3ª Etapa) Como α_3 também é raiz de $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)q_2(x)$, temos

$$0 = f(\alpha_3) = (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)q_2(\alpha_3).$$

Como $\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_3 - \alpha_2 \neq 0$ (pois α_1, α_2 e α_3 são distintas), devemos ter $q_2(\alpha_3) = 0$.

Portanto, α_3 é raiz do polinômio $q_2(x)$, $q_2(x) = (x-\alpha_3)q_3(x)$ e

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)q_3(x).$$

Você já entendeu o que devemos fazer. Continuamos o processo dividindo por $x - \alpha_j$, com $j = 1, 2, \ldots, n$. Em cada etapa, a raiz usada para fazer a divisão é diferente das anteriores.

Finalmente, na última etapa obtemos

$$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)q(x)\,. \quad \square$$

Esta demonstração deve ser feita por **indução** sobre n, o número de raízes reais distintas de $f(x)$. Veja o Módulo 3 de Matemática Discreta.

Lembre que o símbolo $\square$ significa o fim da demonstração.

Certamente, você conhece diversos polinômios com coeficientes reais que não têm raízes reais. Lembre-se dos polinômios x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+x+1 e x^2+3x+5.

Determinar, se existirem, as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais não é um problema fácil, principalmente se as raízes são números irracionais.

Quando o polinômio tem coeficientes inteiros sabemos onde procurar as raízes racionais, se existirem.

Exemplo 17

O polinômio $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$ tem raízes racionais e essas raízes estão no conjunto

$$\{\,-1, 1, -3, 3, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\,\}\,.$$

Avaliando $f(x)$ nesses valores, vemos que 1 e -1 não são raízes. No entanto, $f(3) = 0$. Assim, $\alpha = 3$ é uma raiz de $f(x)$ e $x - 3$ divide $f(x)$. Aplicando o algoritmo euclidiano, escrevemos

$$f(x) = (x-3)(4x^2-4x+1).$$

Pelas fórmulas de Bhaskara, o trinômio do 2º grau $4x^2 - 4x + 1$ com discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0$ tem raízes $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$. Portanto, $4x^2 - 4x + 1 = 4(x-\frac{1}{2})^2$ e

$$f(x) = 4(x-3)(x-\tfrac{1}{2})^2.$$

Pudemos fatorar $f(x)$ porque sabíamos onde pesquisar as raízes.

Está curioso para aprender a determinar as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros?

Vamos ensinar!

Primeiramente, observamos que todo polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \not\equiv \mathbf{0}$$

com coeficientes reais e $a_0 = 0$ tem a raiz $\alpha = 0$, pois

$$f(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 0 = 0.$$

Reveja o Exemplo 15 e calcule as possíveis raízes racionais do polinômio do exemplo anterior, usando a seguinte proposição.

Proposição 17.2

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \not\equiv \mathbf{0}$ com coeficientes inteiros e suponhamos que $\alpha \neq 0$ é uma raiz racional de $f(x)$. Então, escrevendo $\alpha = \frac{b}{c}$ como uma fração irredutível, temos que b divide a_0 e c divide a_n.

$\frac{b}{c} \neq 0$ é uma fração irredutível se, e somente se, b e c são inteiros não-nulos primos entre si.

Demonstração: Temos $f(\frac{b}{c}) = a_n \cdot (\frac{b}{c})^n + a_{n-1} \cdot (\frac{b}{c})^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot (\frac{b}{c}) + a_0 = 0$ que é equivalente a $a_n \cdot \dfrac{b^n}{c^n} + a_{n-1} \cdot \dfrac{b^{n-1}}{c^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \dfrac{b}{c} + a_0 = 0$.

Multiplicando essa igualdade por c^n, obtemos

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} \cdot c + \cdots + a_1 \cdot b \cdot c^{n-1} + a_0 \cdot c^n = 0, \qquad (17.1)$$

ou seja,

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} \cdot c + \cdots + a_1 \cdot b \cdot c^{n-1} = -a_0 \cdot c^n,$$

colocando b em evidência no lado esquerdo dessa igualdade, obtemos

$$b \cdot (a_n \cdot b^{n-1} + a_{n-1} \cdot b^{n-2} \cdot c + \cdots + a_1 \cdot c^{n-1}) = -a_0 \cdot c^n.$$

Portanto, b divide $a_0 \cdot c^n$.

Sendo b e c primos entre si, concluímos que b divide a_0.

Analogamente, da equação (1), obtemos

$$a_{n-1} \cdot b^{n-1} \cdot c + \cdots + a_1 \cdot b \cdot c^{n-1} + a_0 \cdot c^n = -a_n \cdot b^n.$$

Colocando c em evidência no lado esquerdo dessa igualdade, temos

$$c \cdot (a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b \cdot c^{n-2} + a_0 \cdot c^{n-1}) = -a_n \cdot b^n.$$

Portanto, c divide $a_n \cdot b^n$.

Sendo b e c primos entre si, concluímos que c divide a_n. $\square$

Note que se o polinômio $f(x)$ com coeficientes inteiros tem coeficiente líder $a_n = 1$ e tem uma raiz racional $\alpha \neq 0$, então escrevendo α como uma fração irredutível, $\alpha = \frac{b}{c}$ com b e c primos entre si, pela Proposição 17.2, obtemos que c divide 1. Portanto, $c = 1$ ou $c = -1$, logo, $\alpha = \pm b$ é um número inteiro que divide $a_0 \in \mathbb{Z}$. Assim, obtemos a seguinte conseqüência da Proposição 17.2:

Corolário 17.1

Seja $f(x)$ um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Então, toda raiz racional de $f(x)$ é um número inteiro.

Exemplo 18

Para determinar as raízes racionais $\alpha = \frac{b}{c}$ de $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, tomamos b no conjunto dos divisores de $a_0 = 2$ e c no conjunto dos divisores de $a_3 = 5$. Portanto, $b \in \{1, -1, 2, -2\}$ e $c \in \{1, -1, 5, -5\}$ e

$$\alpha = \frac{b}{c} \in \{1, -1, 2, -2, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\}.$$

Temos,

α	-2	-1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	2
$f(\alpha)$	-48	-4	$\frac{56}{25}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{12}{25}$	0	20

Então, 1 é a única raiz racional de $f(x)$ e $x - 1$ divide $f(x)$.

Descobrimos que os números reais x_1 e x_2 são irracionais, assim como, $\sqrt{41}$ e $-\sqrt{41}$. Por quê? Tente verificar diretamente que esses números são irracionais.

Fazendo a divisão de $f(x)$ por $x-1$, obtemos $f(x) = (x-1)(5x^2+x-2)$.

O discriminante do trinômio $5x^2+x-2$ é $\Delta = b^2-4ac = 1-4\cdot5\cdot(-2) = 41$.

As duas raízes desse trinômio são $x_1 = \frac{-1-\sqrt{41}}{10}$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{41}}{10}$ e também são raízes de $f(x)$. Sabendo as raízes fazemos a fatoração:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(5x^2+x-2) \\ &= 5(x-1)(x^2+\tfrac{1}{5}x-\tfrac{2}{5}) \\ &= 5(x-1)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 5(x-1)(x+\tfrac{1+\sqrt{41}}{10})(x+\tfrac{1-\sqrt{41}}{10}). \end{aligned}$$

Exemplo 19

Vamos tentar determinar as raízes reais de $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$. Começamos pelas raízes racionais. Como esse polinômio é mônico, as raízes racionais, se existirem, são números inteiros divisores de 6. Os divisores de 6 são $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Verificamos que apenas $f(1) = 0$ e $f(-3) = 0$. Portanto,

$$(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3 \text{ divide } f(x).$$

Fazendo a divisão de $f(x)$ por x^2+2x-3, obtemos $f(x) = (x^2+2x-3)(x^2-2)$.

Note que obtivemos uma nova demonstração de que $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são números irracionais. Pense sobre isso!

As raízes de $x^2 - 2$ são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Combinando as fatorações, temos

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2) = (x-1)(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

Resumo

Você aprendeu o conceito de divisibilidade de polinômios com coeficientes reais; o algoritmo euclidiano; a armar a divisão de polinômios numa tabela similar à da divisão de números; o que é uma raiz real de um polinômio; que, na divisão de $f(x)$ por $x-\alpha$, o resto é $f(\alpha)$; o número real α é uma raiz de $f(x)$ se, e somente se, $x-\alpha$ divide $f(x)$; que a existência de raízes reais distintas $\alpha_1 \dots, \alpha_n$ é equivalente à divisibilidade pelo produto $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$; a determinar as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros.

Exercícios

1. Determine, usando a divisão euclidiana, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$:
a. $f(x) = 2x^2 + 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 1.$
b. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^2 + 1.$
c. $f(x) = x^6 + 1, \quad g(x) = x^3 + 1.$
d. $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2, \quad g(x) = x - 1.$
e. $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2, \quad g(x) = x + 1.$
f. $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 4x + 3, \quad g(x) = x^2 - 2x + 3.$
g. $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 6x + 6, \quad g(x) = 2x^2 - x.$
h. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6, \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$

2. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, sem efetuar a divisão:
a. $f(x) = x^5 - 1, \quad g(x) = x + 2.$
b. $f(x) = x^4 + x^3 - 2x - 4, \quad g(x) = x - 4.$
c. $f(x) = x^8 - x^7 - 2x^5, \quad g(x) = x - \sqrt{3}.$

3. Nos exercícios anteriores, determine os pares $f(x)$ e $g(x)$, tais que $g(x)$ divide $f(x)$.

4. Determine as raízes racionais de $f(x)$ e, sempre que possível, escreva $f(x)$ como um produto de fatores lineares:
a. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
b. $f(x) = 2x^3 - 5x - 3$
c. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$
d. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$
e. $f(x) = x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$
f. $f(x) = 4x^3 + 20x^2 - 23x + 6$
g. $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$
h. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 3x^2$
i. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$
j. $f(x) = x^3 - 28x - 48$

5. Determine todas as raízes reais dos polinômios do exercício anterior.

6. Determine, usando as propriedades da divisão:

a. o polinômio mônico $f(x)$ de grau 5, tal que

$$f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 0;$$

b. o valor de n, tal que -8 é o resto da divisão de $x^2 + 5x - 2$ por $x + n$;

c. o valor de a para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$;

d. o valor de a para que $ax^3 - 25x^2 + 47x + 30$ seja múltiplo de $x - 10$;

e. o quociente da divisão de $f(x)$ por $(x-1)(x+1)(x+2)$, sendo

$$f(x) = x^5 + x^4 + 5x^2 - x - 6;$$

f. as condições sobre $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, para que 1 seja raiz do polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \not\equiv \mathbf{0}$;

g. o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por x, sendo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Auto-avaliação

Para prosseguir, você deve saber armar e efetuar a divisão, obtendo o quociente e o resto do algoritmo de Euclides (Exercício 1); saber determinar o resto da divisão euclidiana de $f(x)$ por $x-\alpha$, sem armar e efetuar os cálculos (Exercício 2); relacionar a existência de uma raiz real α de um polinômio com a sua divisibilidade por $x - \alpha$ (Exercício 3); relacionar as raízes reais distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de um polinômio com a sua divisibilidade pelo produto $(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$ (Exercício 4) e saber determinar as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros (Exercício 4).
O Exercício 6 trabalha os conceitos apresentados de polinômios. Caso tenha dificuldades, releia a aula e os exemplos com atenção.

Aula 18 – Dispositivo de Briot-Ruffini

Objetivos

- Aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini.
- Fazer divisões sucessivas e aprender a divisão por potências de $x - \alpha$, usando esse dispositivo.
- Aprender os conceitos de raiz real múltipla e de multiplicidade da raiz.

Conceitos:
Números reais e operações. Polinômios com coeficientes reais, operações e propriedades e o algoritmo euclidiano.

O *dispositivo de Briot-Ruffini* é um algoritmo eficiente e prático para a determinação do quociente $q(x)$ e do resto $r(x)$ da divisão euclidiana de um polinômio $f(x)$ por $x - \alpha$. A lógica desse algoritmo está fundamentada no método dos coeficientes a determinar.

Lembramos que:

$$\boxed{f(x) = q(x)(x - \alpha) + r, \text{ onde } r(x) = r \in \mathbb{R} \text{ e } gr(q(x)) = gr(f(x)) - 1}$$

O símbolo α lê-se alfa.

Para você entender esse algoritmo, consideramos a divisão por $x - \alpha$ de um polinômio $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau 3. Nesse caso, o resto é $r(x) = r \in \mathbb{R}$ e o quociente é $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= (q_2x^2 + q_1x + q_0)(x - \alpha) + r \\ &= q_2x^3 + (q_1 - q_2\alpha)x^2 + (q_0 - q_1\alpha)x + (r - q_0\alpha)\,. \end{aligned}$$

Logo, $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = q_2x^3 + (q_1 - q_2\alpha)x^2 + (q_0 - q_1\alpha)x + (r - q_0\alpha)$.

Comparando os coeficientes, obtemos

$$\left\{\begin{array}{l} q_2 = a_3 \\ q_1 - q_2\alpha = a_2 \\ q_0 - q_1\alpha = a_1 \\ r - q_0\alpha = a_0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} q_2 = a_3 \\ q_1 = q_2\alpha + a_2 \\ q_0 = q_1\alpha + a_1 \\ r = q_0\alpha + a_0\,. \end{array}\right.$$

O dispositivo de Briot-Ruffini consiste na elaboração de uma tabela com o objetivo de calcular, sucessivamente, os coeficientes do quociente e do resto, usando a fórmula recursiva acima. A tabela tem duas linhas. Na primeira, colocamos α seguido dos coeficientes a_3, a_2, a_1 e a_0 do dividendo $f(x)$. Na segunda, colocamos os coeficientes q_2, q_1 e q_0 do quociente $q(x)$ e o valor do resto $r(x) = r$, que são calculados um após o outro. A forma final da tabela é a seguinte:

Fórmula recursiva
A partir de um valor inicial, nesse caso o coeficiente do termo de mais alto grau de $q(x)$, determinamos os outros valores, um após o outro.

α	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_2	q_1	q_0	$\vdots\ r$

Paolo Ruffini
1765-1822, Itália.
Em 1783, ingressou na Universidade de Modena, onde estudou Matemática, Medicina, Filosofia e Literatura. Além da sua atuação como professor na Universidade de Modena, exerceu a Medicina.
No endereço:
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Ruffini.html`
podem ser encontradas mais informações sobre Ruffini.

Charles Auguste Briot, matemático francês, nasceu em 1817 e faleceu em 1882. Obteve o seu doutorado em 1842, com um trabalho sobre a órbita de um corpo sólido em torno de um ponto fixo. Escreveu diversos livros e recebeu prêmios pelos seus trabalhos. Trabalhou em Análise, Calor e Eletricidade. Foi professor na Universidade de Lyon, onde conheceu Claude Bouquet, com quem fez importantes trabalhos de Análise. Atuou na *École Polytechnique*, na *Faculté des Sciences* e, a partir de 1864, foi professor da Sorbonne. Lamentavelmente, não temos uma foto do Briot.
Quer saber mais? Consulte
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Briot.html`

Roteiro:

(1) Os polinômios $f(x)$ e $x - \alpha$ são os dados do problema. Construímos a primeira linha da tabela com α seguido dos coeficientes a_3, a_2, a_1 e a_0, nessa ordem.

(2) A segunda linha é construída passo a passo. Primeiramente, colocamos embaixo de a_3 o valor de $q_2 = a_3$. Esse é o valor inicial.

α	a_3	a_2	a_1		a_0
	$q_2 = a_3$			⋮	

(3) Usando q_2, α e a_2, calculamos o valor de $q_1 = q_2\alpha + a_2$ e colocamos embaixo de a_2.

α	a_3	a_2	a_1		a_0
	q_2	$q_1 = q_2\alpha + a_2$		⋮	

(4) Usando q_1, α e a_1, calculamos o valor de $q_0 = q_1\alpha + a_1$ e colocamos embaixo de a_1.

α	a_3	a_2	a_1		a_0
	q_2	q_1	$q_0 = q_1\alpha + a_1$	⋮	

(5) Usando q_0, α e a_0, calculamos o valor de $r = q_0\alpha + a_0$ e colocamos embaixo de a_0.

α	a_3	a_2	a_1		a_0
	q_2	q_1	q_0	⋮	$r = \alpha q_0 + a_0$

Exemplo 6

Vamos determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x) = r$ da divisão euclidiana de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ por $x - 2$, seguindo o roteiro anterior. Nesse caso, $\alpha = 2$ e os coeficientes de $f(x)$ são $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$.

(1) A primeira linha da tabela é:

2	1	-3	0		4
				⋮	

Construímos a segunda linha, a partir da segunda coluna, passo a passo. O quociente tem grau 2. Começamos determinando q_2.

(2) O coeficiente do termo de maior grau do quociente é $q_2 = a_3 = 1$.

2	1	-3	0		4
	1			⋮	

(3) Calculamos o coeficiente $q_1 = q_2\alpha + a_2 = 1 \times 2 - 3 = -1$.

2	1	-3	0	4
	1	-1		⋮

(4) Calculamos o coeficiente $q_0 = q_1\alpha + a_1 = (-1) \cdot 2 + 0 = -2$.

2	1	-3	0		4
	1	-1	-2	⋮	

(5) Calculamos o resto $r = q_0\alpha + a_0 = (-2) \cdot 2 + 4 = 0$.

2	1	-3	0		4
	1	-1	-2	⋮	0

Obtemos o quociente $q(x) = x^2 - x - 2$ e o resto $r = 0$. O polinômio $f(x)$ é divisível por $x - 2$. Assim, $\alpha = 2$ é uma raiz de $f(x)$ e $f(x) = (x^2 - x - 2)(x - 2)$.

Exemplo 7

Vamos agora dividir $g(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 4$ por $x + 2$, usando o dispositivo de Briot-Ruffini.

(1) Para construirmos a primeira linha da tabela, escrevemos $\alpha = -2$, $a_4 = 2$, $a_3 = 1$, $a_2 = -1$, $a_1 = 3$ e $a_0 = -4$.

-2	2	1	-1	3		-4
					⋮	

Calculamos a segunda linha, começando da segunda coluna, usando a fórmula recursiva com valor inicial 2, obtendo:

-2	2	1	-1	3		-4
	2	-3	5	-7	⋮	10
	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)

(2) $q_3 = a_4 = 2$.

(3) $q_2 = q_3\alpha + a_3 = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$.

(4) $q_1 = q_2\alpha + a_2 = (-3) \cdot (-2) + (-1) = 5$.

(5) $q_0 = q_1\alpha + a_1 = 5 \cdot (-2) + 3 = -7$.

(6) $r = q_0\alpha + a_0 = (-7) \cdot (-2) + (-4) = 10$.

Obtemos o quociente $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ e o resto $r = 10$. Nesse caso, $g(-2) = 10$.

Exemplo 8

Qual o valor de $h(-3)$, sendo $h(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$?

Podemos fazer este cálculo utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, pois $h(-3)$ é o resto da divisão de $h(x)$ por $x + 3$.

Lembre que:
$h(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x)$,
$r(x) = r \in \mathbb{R}$ e
$h(\alpha) = r(\alpha) = r$.

(1) Para formar a primeira linha da tabela, temos $\alpha = -3$, $a_5 = 1$, $a_4 = 2$, $a_3 = -4$, $a_2 = -3$, $a_1 = 2$ e $a_0 = -1$.

-3	1	2	-4	-3	2	-1
						$\vdots$

O quociente tem grau 4. Construímos a segunda linha começando da segunda coluna, usando a fórmula recursiva com valor inicial $q_4 = a_5 = 1$, obtendo:

-3	1	2	-4	-3	2	-1
	1	-1	-1	0	2	$\vdots -7$
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

(2) $q_4 = a_5 = 1$.

(3) $q_3 = q_4\alpha + a_4 = 1 \cdot (-3) + 2 = -1$.

(4) $q_2 = q_3\alpha + a_3 = (-1) \cdot (-3) - 4 = -1$.

(5) $q_1 = q_2\alpha + a_2 = (-1) \cdot (-3) - 3 = 0$.

(6) $q_0 = q_1\alpha + a_1 = 0 \cdot (-3) + 2 = 2$.

(7) $r = q_0\alpha + a_0 = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$.

Escrevemos o quociente $q(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2$ e o resto $r = -7$, olhando para a segunda linha da tabela. Portanto, $h(-3) = -7$.

Quando $\alpha_1 \neq \alpha_2$ são raízes reais do polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ e $f(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. O algoritmo de Briot-Ruffini é muito eficiente para obter o quociente $q(x)$ e escrever a fatoração $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q(x)$. Usamos o algoritmo duas vezes. Na primeira, dividimos $f(x)$ por $x - \alpha_1$, logo,

$$f(x) = (x - \alpha_1)h(x).$$

Como $0 = f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)h(\alpha_2)$ e $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$, temos que $h(\alpha_2) = 0$. Logo, $h(x)$ é divisível por $x - \alpha_2$. Sabendo $h(x)$, aplicamos o algoritmo pela segunda vez, fazendo a divisão de $h(x)$ por $x - \alpha_2$, obtendo

$$h(x) = (x - \alpha_2)q(x).$$

Assim,

$$f(x) = (x - \alpha_1)h(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q(x).$$

Consideremos o polinômio $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$. Note que $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$. Fazendo a divisão de $f(x)$ por $x - 1$, aplicando o algoritmo com $\alpha_1 = 1$, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \vdots\ 0
\end{array}$$

O quociente dessa divisão é $x^3 + 2x^2 + x + 2$. Logo, temos a fatoração $f(x) = (x-1)(x^3+2x^2+x+2)$. Devemos dividir x^3+2x^2+x+2 por $x+2$. Fazemos esse cálculo na mesma tabela. Acrescentamos o valor de $\alpha_2 = -2$ na primeira coluna da segunda linha da tabela anterior. Obtemos:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
\hline
-2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \vdots\ 0 \\
\hline
 & & & & \vdots &
\end{array}$$

Aplicamos novamente o dispositivo de Briot-Ruffini, construindo uma nova linha da tabela, formada pelos coeficientes do quociente da divisão do polinômio x^3+2x^2+x+2 por $x+2$ e também pelos coeficientes do quociente da divisão de $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ por $(x - 1)(x + 2)$. Obtemos:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
\hline
-2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \vdots\ 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \vdots\ 0 &
\end{array}$$

Finalmente, sendo o último quociente $x^2 + 1$, concluímos que

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1) \text{ e } f(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1).$$

Esse procedimento pode ser generalizado, continuando a divisão, quando o polinômio tiver outras raízes reais distintas.

Também podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, sucessivamente, para verificar se um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - \alpha$, $(x - \alpha)^2$, $(x - \alpha)^3$ etc. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 9

O polinômio $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ tem a raiz $\alpha = -1$. Os coeficientes de $f(x)$ são $a_6 = 1$, $a_5 = 0$, $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = -3$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 2$. A divisão de $f(x)$ por $x + 1$, aplicando o dispositivo é:

-1	1	0	0	0	-3	0	2
	1	-1	1	-1	-2	2	⋮ 0

Logo, $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2)$. Para verificar se $(x + 1)^2$ divide $f(x)$, aplicamos novamente o dispositivo ao quociente obtido acima. Acrescentamos na segunda linha da tabela o valor de $\alpha = -1$ e fazemos os cálculos:

-1	1	0	0	0	-3	0	2
-1	1	-1	1	-1	-2	2	⋮ 0
	1	-2	3	-4	2	⋮ 0	

O resto da divisão é 0. Logo, $(x + 1)^2$ divide $f(x)$.

Para saber se $(x+1)^3$ divide $f(x)$, continuamos o procedimento. Acrescentamos $\alpha = -1$ na terceira linha e aplicamos, novamente, o algoritmo:

-1	1	0	0	0	-3	0	2
-1	1	-1	1	-1	-2	2	⋮ 0
-1	1	-2	3	-4	2	⋮ 0	
	1	-3	6	-10	⋮ 12		

Agora, o resto é diferente de zero, assim $(x + 1)^3$ não divide $f(x)$. No entanto, na terceira linha da tabela, podemos ler os coeficientes do quociente da divisão de $f(x)$ por $(x + 1)^2$ e escrever

$$f(x) = (x + 1)^2(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2)\,.$$

Observe que $\alpha = 1$ é raiz de $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$. Fazendo a divisão sucessiva de $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ por $x - 1$, $(x - 1)^2$ e $(x - 1)^3$, obtemos:

1	1	-2	3	-4	2
1	1	-1	2	-2	$\vdots$ 0
1	1	0	2	$\vdots$ 0	
	1	1	$\vdots$ 3		

Verificamos que $(x-1)^2$ divide e $(x-1)^3$ não divide $x^4-2x^3+3x^2-4x+2$. Consultanto a terceira linha da tabela anterior, escrevemos

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x-1)^2(x^2+2).$$

Portanto,

$$f(x) = (x+1)^2(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = (x+1)^2(x-1)^2(x^2+2).$$

Esse último exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 18.1 (Multiplicidade da raiz)
Dizemos que o número real α é uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade r se, e somente se, $(x-\alpha)^r$ divide $f(x)$ mas $(x-\alpha)^{r+1}$ não divide $f(x)$, onde r é um número natural maior ou igual a 1. Nesse caso, r é o expoente da maior potência de $x-\alpha$ que divide $f(x)$ e

$$f(x) = (x-\alpha)^r q(x), \text{ com } q(\alpha) \neq 0.$$

Dizemos que α é uma raiz simples de $f(x)$ quando $r = 1$ e uma raiz múltipla de $f(x)$, quando $r \geq 2$.

Chamamos uma raiz múltipla de dupla, tripla, quádrupla, quíntupla, sêxtupla, ..., quando $r = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, respectivamente.

No Exemplo 9, vimos que 1 é raiz de $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ com multiplicidade 2 , enquanto -1 e 1 são raízes de $x^6 - 3x^2 + 2$ com multiplicidade 2.

Exemplo 10

Seja $f(x) = (x-1)(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{3})(x-2)^3(10x-3)(x^2+x+1)$.
Os números reais 1, $-\sqrt{3}$ e $\frac{3}{10}$ são raízes simples, $\sqrt{2}$ é raiz dupla e 2 é raiz tripla de $f(x)$. O polinômio x^2+x+1 tem discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 1-4 = -3 < 0$ e assim, para todo número real x, o valor $x^2+x+1 \geq -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4}$. Logo, o polinômio x^2+x+1 não tem raízes reais. As raízes reais de $f(x)$ são 1, $-\sqrt{3}$, $\frac{3}{10}$, $\sqrt{2}$ e 2.

Lembre que ...
Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ e $a > 0$, então
$ax^2 + bx + c \geq -\frac{\Delta}{4a} > 0$.
O gráfico dessa parábola está voltado para cima.

Resumo

Você aprendeu a aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini; a utilizá-lo para determinar se um número real α é uma raiz de um polinômio e para calcular a divisão sucessiva por $x - \alpha$. Aprendeu também os conceitos de multiplicidade de uma raiz real e de raiz real simples e múltipla. Viu como utilizar esse dispositivo para determinar a multiplicidade r de uma raiz real α de $f(x)$ e escrever $f(x) = (x - \alpha)^r q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. E viu ainda a relação entre a divisibilidade por potências de $x - \alpha$ e a multiplicidade da raiz α.

Exercícios

1. Determine $f(\alpha)$, usando o algoritmo de Briot-Ruffini:
a. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 7$ e $\alpha = -3$.
b. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 7x + 6$ e $\alpha = 3$.

2. Determine o quociente e o resto da divisão euclidiana de $f(x)$ por $g(x)$:
a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ e $g(x) = x + 3$.
b. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ e $g(x) = x + 1$.
c. $f(x) = x^3 - 27$ e $g(x) = x - 3$.
d. $f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$ e $g(x) = x - \dfrac{1}{2}$.

3. Verifique que -2 é raiz de $f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$ e determine a sua multiplicidade.

4. Verifique que α é uma raiz de $f(x)$, determine a sua multiplicidade r e escreva $f(x) = (x - \alpha)^r q(x)$:
a. $f(x) = x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$, $\alpha = 1$.
b. $f(x) = x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$, $\alpha = -1$.
c. $f(x) = x^4 + x^3 - 15x^2 - 9x + 54$, $\alpha = 3$.
d. $f(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$, $\alpha = 2$.

5. Verifique que $(x - 2)(x + 3)$ divide $f(x) = x^4 + x^3 - 15x^2 - 9x + 54$. Determine a multiplicidade das raízes 2 e -3.

6. Verifique que $(x-1)(x+1)$ divide $2x^7 - 6x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 2$. Determine a multiplicidade das raízes 1 e -1.

7. Determine m para que $x^4 + ma^2x^2 - 5ax^2 + a^4$ seja divisível por $x - a$, $a \neq 0$.

8. Diga quais das afirmações são falsas ou verdadeiras, justificando a sua resposta:
   a. As raízes reais de $f(x) = x^4 - 4$ são simples.
   b. O polinômio $x^n - 1$ é múltiplo de $x + 1$, para todo número natural $n \geq 1$.
   c. O polinômio $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$ tem duas raízes reais, ambas com multiplicidade 2.
   d. Existe um único polinômio de grau 3 tendo raízes 1 , 2 e 3.
   e. $x^3 + x - 2$ tem uma única raiz real simples.

9. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Determine as condições sobre os coeficientes de $f(x)$ para que:
   a. x divida $f(x)$. Qual o quociente?
   b. x^2 divida $f(x)$. Qual o quociente?
   c. x^r divida $f(x)$, onde $r \geq 1$ é um número natural. Qual o quociente?
   d. 0 seja uma raiz simples de $f(x)$.
   e. 0 seja uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade 2.
   f. 0 seja uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade r.

Auto-avaliação

Você deve prosseguir após ter entendido o dispositivo de Briot-Ruffini e as suas aplicações: determinar se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz de um polinômio (Exercícios 1 a 7); fazer divisões sucessivas por fatores distintos da forma $x - \alpha$ (Exercícios 5 e 6); fazer divisões sucessivas por potências de $x - \alpha$ e determinar a multiplicidade de uma raiz real (Exercícios 5 e 6). Os Exercícios 8 e 9 são conceituais. Na Aula 17 vamos estudar os números complexos, inventados para determinar raízes para os polinômios do 2º grau com discriminante negativo.

§2. Números complexos e a fatoração em $\mathbb{R}[x]$

Conceitos:
Números reais e operações.
Polinômios com coeficientes reais, operações e divisibilidade.

Nesta seção vamos definir o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e suas operações de adição e multiplicação. Estudaremos as propriedades destas operações, relacionadas diretamente com as propriedades da adição e multiplicação de números reais.

Os números complexos foram criados para extrair raízes quadradas de números reais negativos. Todas as equações quadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, b, c são números reais, sempre têm duas soluções em $\mathbb{C}$.

Vamos relacionar a existência de raízes complexas para polinômios $f(x)$ de coeficientes reais com a sua divisibilidade por polinômios quadráticos do tipo $x^2 + bx + c$ com $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Finalmente, estudaremos o Teorema Fundamental da Álgebra e a sua relação com a fatoração de um polinômio com coeficientes reais num produto de potências de fatores dos tipos $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, ou $x^2 + bx + c$, com $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Aula 19 – Números complexos

Objetivos

- Definir os números complexos $\mathbb{C}$ e representá-los graficamente.
- Aprender as operações de adição e multiplicação de números complexos e suas propriedades.
- Aprender a conjugação de números complexos e suas propriedades.
- Resolver equações quadráticas com coeficientes reais.

Conceitos:
Números reais, operações de adição e multiplicação de números reais.

Procurar soluções para equações tem sido uma fonte de inspiração para ampliar os conjuntos numéricos. No conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não podemos resolver a equação $x + 3 = 0$. Ampliando esse conjunto para os números inteiros $\mathbb{Z}$, a equação anterior passa a ter solução, pois $-3 \in \mathbb{Z}$. A inclusão de números negativos não resolve completamente os nossos problemas. Pois, há equações sem solução em $\mathbb{Z}$, por exemplo, $5x - 3 = 0$. Ampliamos o conjunto dos inteiros para o conjunto dos números racionais.

Com o objetivo de realizar a operação de radiciação, o conjunto dos números racionais precisou ser ampliado para o conjunto dos números reais. Desse modo, números irracionais tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ..., foram incluídos no nosso sistema numérico, permitindo extrair raízes n-ésimas e resolver equações tais como $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^3 - 2 = 0$, $x^3 - 5 = 0$, ..., antes sem solução em $\mathbb{Q}$.

Os hindus **Mahavira**, em 850 a.C., e **Bhaskara**, em 1150 a.C., foram os primeiros a indicar que números reais negativos não tinham raiz quadrada porque números negativos não podiam ser quadrados.

Cardan, em 1545, no trabalho *Ars Magna*, foi o primeiro a usar a raiz quadrada de números negativos e efetuar operações com números complexos.

Obtivemos os conjuntos numéricos

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.}$$

Entretanto, equações tais como $x^2+1 = 0$, $x^2+2 = 0$, $x^2+x+1 = 0$ não têm solução no conjunto dos números reais, pois não podemos extrair raízes quadradas de números reais negativos. Você, certamente, sabe dar muitos outros exemplos de equações com coeficientes reais que não têm solução em $\mathbb{R}$.

Euler, em 1748, usou a letra i, em vez de $\sqrt{-1}$, para designar o número cujo quadrado é -1.

Em 1832, **Gauss** usou pela primeira vez o nome números complexos.

Motivados pelas construções anteriores, ampliamos o conjunto dos números reais, construindo um conjunto de números que contenha os números reais e onde seja possível *extrair raízes quadradas de números reais negativos.*

Seja i um símbolo com a propriedade

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Também escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é definido por:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{\, a + bi \mid a,\, b \in \mathbb{R} \,\}}$$

Os números $1 + 4i$, $-3 + 2i$, $-1 - 2i$, $2 - \frac{7}{2}i$, $\sqrt{8} + \sqrt[3]{10}i$, $2 - 5i$, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-3 - 7i$ e $\sqrt[4]{5} + 3i$ são números complexos.

Quando $b = 0$, escrevemos $a + bi$ como a:

$$\boxed{a + 0i = a \in \mathbb{C}}$$

logo, o conjunto dos números reais é subconjunto dos números complexos,

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Quando o número $a + bi$ não é um número real, temos $b \neq 0$.

Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, dizemos que o número complexo $a + bi$ é um imaginário puro e representamos por bi:

$$\boxed{0 + bi = bi,\ b \neq 0}$$

Quando $a = 0$ e $b = 0$, escrevemos o número $0 + 0i$ como 0.

$$\boxed{0 + 0i = 0}$$

Descartes, em 1637, no trabalho *La Géométrie*, classificou os números como reais e imaginários considerando os números complexos como soluções de equações.

Para ele, os números imaginários eram os números complexos $a + bi$ com $b \neq 0$.

John Wallis, em 1685, no trabalho *Algebra*, interpretou os números com quadrado negativo como medida de áreas negativas, pois naquela época a noção de comprimentos negativos era bem aceita.

Caspar Wessel, em 1797, foi o primeiro a representar graficamente os números complexos, desenhando uma reta perpendicular à reta real, o eixo imaginário.

O tratamento rigoroso moderno dos números complexos como pares de números reais foi apresentado por **Hamilton**, em 1853. Mais tarde ele estendeu esses números ao espaço de quatro dimensões, no trabalho *Lectures on Quaternions*.

Exemplo 6

Os números reais $1 = 1 + 0i$ e $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + 0i$ são números complexos. Os números complexos $3 - 6i$, $-2i$, i, $\sqrt[5]{3}i$ e $-\frac{4}{3}i$ não são números reais, sendo os quatro últimos imaginários puros.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é visualizado num plano cartesiano, associando a cada número complexo $a + bi$ o ponto do plano representado pelo par ordenado de números reais (a, b). Reciprocamente, a cada ponto do plano representado pelo par ordenado de números reais (a, b) associamos o número complexo $a + bi$.

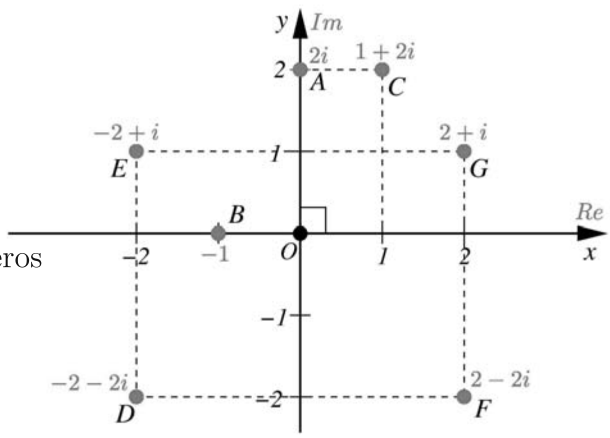


Figura 19.1: Representação dos números complexos por pontos do plano.

Nessa correspondência, os números reais a são representados pelos pontos $(a, 0)$ do eixo x, chamado eixo real, e os números imaginários puros bi são representados pelos pontos $(0, b)$ do eixo y, chamado eixo imaginário.

Exemplo 7

Na **Figura 19.1**, representamos o imaginário puro $2i$ pelo ponto $A = (0, 2)$, o número real -1 por $B = (-1, 0)$, $1 + 2i$ pelo ponto $C = (1, 2)$, $-2 - 2i$ pelo ponto $D = (-2, -2)$, $-2 + i$ pelo ponto $E = (-2, 1)$, $2 - 2i$ pelo ponto $F = (2, -2)$ e $2 + i$ pelo ponto $G = (2, 1)$.

Dado o número complexo $z = a + bi$, chamamos a de parte real e b de parte imaginária de z e indicamos pelos símbolos

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = a \quad \text{e } \mathrm{Im}(z) = b.}$$

Os números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais se, e somente se, suas partes real e imaginária são iguais. Escrevemos:

$$\boxed{a + bi = c + di \iff a = c \text{ e } b = d.}$$

Exemplo 8

a. Considerando $z = 3 - 5i$, temos $\mathrm{Re}(z) = 3$ e $\mathrm{Im}(z) = -5$.
b. No número complexo $z = -2\sqrt{3} + (1 - \sqrt{2})i$, temos $\mathrm{Re}(z) = -2\sqrt{3}$ e $\mathrm{Im}(z) = 1 - \sqrt{2}$.
c. Quais são os números reais a e b tais que $-2 + (2a - b)i = (a + b) + 3i$?

Igualando as partes reais e imaginárias dos números complexos, obtemos

$$-2 = a + b \text{ e } 2a - b = 3.$$

Para resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

somamos as equações, eliminando a incógnita b e obtemos

$$(a + b) + (2a - b) = -2 + 3\ .$$

Assim, $3a = 1$. Logo, $a = \frac{1}{3}$. Substituindo esse valor na primeira equação, calculamos $b = -2 - a = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$.

No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ estão definidas duas operações: adição e multiplicação.

Sejam $a + bi$ e $c + di$ números complexos. Definimos a adição desses números complexos por

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,}$$

O resultado da adição de dois números complexos é chamado de soma.

O resultado da multiplicação de dois números complexos é chamado de produto.

e a sua multiplicação por

$$\boxed{(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.}$$

Note que:

• A soma de dois números complexos é o número complexo que tem como parte real a soma das partes reais das parcelas e, como parte imaginária, a soma das partes imaginárias das parcelas.

• Identificando $z = a + bi \neq 0$ e $w = c + di \neq 0$, respectivamente, com os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ do plano, vemos que a soma $z+w = (a+c)+(b+d)\,i$, é o número complexo representado pelo ponto $C = (a+c, b+d)$, onde OC é a diagonal do paralelogramo com lados adjacentes OA e OB. Esta é a chamada regra do paralelogramo (**Figura 19.2**).

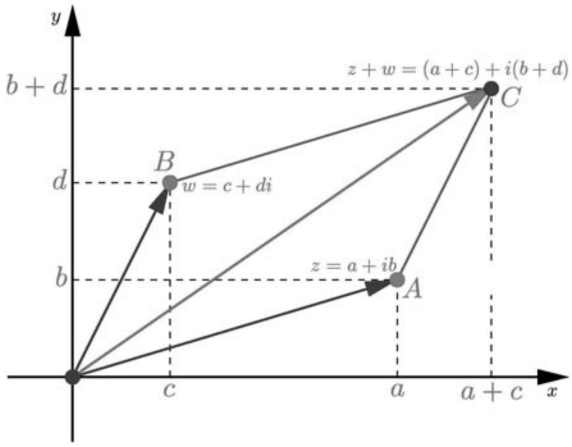


Figura 19.2: Regra do paralelogramo para a soma $z + w$.

• A multiplicação foi definida de modo a satisfazer a propriedade distributiva. Podemos calcular o produto, usando a distributividade, substituindo $i^2 = -1$ e juntando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2\\ &= ac + adi + bci - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i\,.\end{aligned}$$

Exemplo 9

Tomando $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + 3i$, temos

$$\begin{aligned} z + w &= (1-2i) + (2+3i) = (1+2) + (-2+3)i = 3 + i \quad \text{e}\\ z\cdot w &= (1-2i)\cdot(2+3i) = 1\cdot(2+3i) - 2i\cdot(2+3i)\\ &= 2 + 3i - 4i - 6i^2 = (2+6) + (3-4)i = 8 - i\,.\end{aligned}$$

Faça a representação gráfica da soma utilizando a regra do paralelogramo.

A adição e a multiplicação de números complexos satisfazem as seguintes propriedades.

Propriedades das operações:

Sejam $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ e $z_3 = e+fi$ números complexos. Então:

(A1)-(M1) Comutativa:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i = (c+a) + (d+b)i = z_2 + z_1 \qquad \text{e}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i = (ca-db) + (da+cb)i = z_2 \cdot z_1 .$$

(A2)-(M2) Associativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \text{e}$$
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) .$$

(A3) Elemento neutro aditivo: 0

O número $0 = 0 + 0i$ é tal que, $(a+bi) + (0+0i) = a+bi$.

(M3) Elemento neutro multiplicativo: 1

O número $1 = 1 + 0i$ é tal que, $(a+bi)(1+0i) = a+bi$.

(A4) Existência do simétrico:

O simétrico de $a+bi$ é $-a-bi$, pois $(a+bi)+(-a-bi) = 0+0i = 0$.

(M4) Existência do inverso:

O inverso de $z_1 = a+bi \neq 0$ é $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$, pois

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ e } (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1.$$

(AM) Distributiva:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 .$$

As propriedades de adição e multiplicação de números complexos são decorrência das propriedades de adição e multiplicação de números reais. Lembre que:

A adição e multiplicação de números reais é comutativa, associativa e distributiva.

Nos reais,
0 é elemento neutro aditivo e 1 é elemento neutro multiplicativo.

Todo real tem simétrico e todo real não-nulo tem inverso.

Exemplo 10

Consideremos os números complexos $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 1-\sqrt{2}i$, $z_3 = 1+\sqrt{2}\,i$, $z_4 = 2i$, $z_5 = 2+3i$ e $z_6 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$. Vamos usar a definição das operações e as propriedades acima, para efetuar os cálculos pedidos:

a. $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1-2i)\cdot(1-\sqrt{2}\,i) = 1(1-\sqrt{2}\,i) + (-2i)(1-\sqrt{2}\,i) \\ &= 1 - \sqrt{2}\,i - 2i + 2\sqrt{2}i^2 = (1-2\sqrt{2}) + (-2-\sqrt{2})i \,. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} z_2 \cdot z_3 &= (1-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i) = 1\cdot(1+\sqrt{2}\,i) + (-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i) \\ &= (1+\sqrt{2}\,i) - \sqrt{2}\,i - (\sqrt{2})^2 i^2 = (1+2) = 3. \end{aligned}$$

c. $\dfrac{1}{z_1}$:

Nesse caso, sendo $a = 1$ e $b = -2$, temos $a^2 + b^2 = 1 + (-2)^2 = 5$.

Logo, $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

d. $\dfrac{z_5}{z_4}$:

como todo complexo não-nulo tem inverso, escrevemos $\dfrac{z_5}{z_4} = z_5 \cdot \dfrac{1}{z_4}$.

Note que $\dfrac{1}{z_4} = \dfrac{-2i}{(-2)^2} = -\dfrac{i}{2}$. Logo,

$$\frac{z_5}{z_4} = z_5 \cdot \frac{1}{z_4} = (2+3i)\left(-\frac{i}{2}\right) = 2\left(\frac{-i}{2}\right) + 3i\left(\frac{-i}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\,.$$

e. z_6^4 :

usando a fórmula do binômio de Newton e que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, temos

$$\begin{aligned} z_6^4 &= (\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^4 \\ &= (\sqrt{2})^4 + \tbinom{4}{1}(\sqrt{2})^3\sqrt{2}\,i + \tbinom{4}{2}(\sqrt{2})^2(\sqrt{2}\,i)^2 + \tbinom{4}{3}(\sqrt{2})(\sqrt{2}\,i)^3 + (\sqrt{2}\,i)^4 \\ &= 4 + \tfrac{4!}{3!}(\sqrt{2})^4 i + \tfrac{4!}{2!2!}(\sqrt{2})^4(-1) + \tfrac{4!}{3!}(\sqrt{2})^4(-i) + 4 \\ &= 4 + 16i - 24 - 16i + 4 = -16\,. \end{aligned}$$

Dado $z = a + bi$, tomamos $x = a$ e $y = bi$ na fórmula do *binômio de Newton* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, para calcular $z^n = (a+bi)^n$.

As potências de um número complexo com expoentes inteiros são definidas de modo análogo às potências de números reais. Para cada número natural n e cada número complexo z, definimos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} z^0 = 1, \text{ se } z \neq 0, & z^1 = z \\ z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ fatores}},\ n \geq 2, & z^{-n} = \dfrac{1}{z^n},\ z \neq 0 \end{array}}$$

Exemplo 11

Vamos calcular a potência i^n, para todo expoente n inteiro.

Já sabemos que: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$.

A partir de $n = 5$, os valores começam a se repetir:

$i^5 = i^4 \cdot i = i^1$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3$, $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, \ldots$.

É claro que não vamos calcular para todos os valores inteiros. Já entendemos o que acontece: quando dois inteiros diferem de 4, o valor da potência de i é o mesmo.

Dado o número inteiro n, fazemos a divisão euclidiana de n por 4, obtendo:

$$n = 4q + r, \quad \text{onde } 0 \leq r \leq 3\,.$$

Portanto, $i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$. Concluímos então que a potência i^n está perfeitamente determinada pelo resto r que o expoente n deixa na divisão por 4.

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ i, & \text{se } r = 1 \\ -1, & \text{se } r = 2 \\ -i, & \text{se } r = 3\,. \end{cases}$$

Definição 19.1 (Conjugação e módulo)

Seja $z = a + bi$ um número complexo. O conjugado de z, denotado por $\overline{z}$, é definido por

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

e o módulo de z, denotado por $|z|$ é definido por

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lembrando da representação no plano do número complexo $z = a + bi$, podemos interpretar, geometricamente, os conceitos de conjugado e módulo. O ponto do plano com coordenadas $(a, -b)$ é o simétrico, em relação ao eixo x, do ponto (a, b). Portanto, z e $\overline{z}$ são simétricos em relação à reta real. Por outro lado, a distância do ponto (a, b) à origem $(0, 0)$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$. Logo, o módulo de z é a sua distância à origem (**Figura 19.3**).

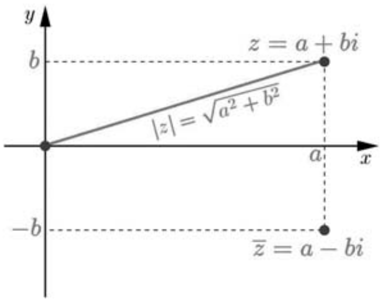


Figura 19.3: $\overline{z} = a - bi$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observe que:

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$.
- $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.
- $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

De fato, escrevendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)\,, \\ z - \overline{z} &= (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)i\,, \\ \mathrm{Re}(z) &= a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\,, \\ \mathrm{Im}(z) &= b \leq |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\,. \end{aligned}$$

O cálculo do conjugado de um número complexo é chamado de conjugação. A conjugação e o módulo satisfazem as seguintes propriedades.

Propriedades da conjugação e do módulo:

Sejam z e w números complexos.

(1) $\overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

(2) $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

(3) $\overline{\overline{z}} = z$.

(4) O conjugado da soma é a soma dos conjugados: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(5) O conjugado do produto é o produto dos conjugados: $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(6) $|z| = |\overline{z}|$.

(7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

(8) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$, se $z \neq 0$.

(9) $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$, se $z \neq 0$.

(10) o módulo do produto é o produto dos módulos: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(11) Desigualdade triangular: $|z+w| \leq |z| + |w|$.

A verificação da validade das propriedades (1) a (6) é um cálculo rotineiro, faremos (2) e (3) para ilustrar, além das propriedades (7) a (11). Para isso, sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Então,

(2) $\overline{z} = z \iff a - bi = a + bi \iff -b = b \iff 2b = 0 \iff b = 0 \iff z = a \in \mathbb{R}$.

(3) $\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$.

(7) $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = |z|^2$.

(8) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, onde a última igualdade segue de (7).

(9) Esta propriedade é conseqüência imediata da propriedade anterior.

(10) Usando as propriedades, (7) e (5) e a comutatividade da multiplicação de números complexos, temos

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) = (z \cdot w) \cdot (\overline{z} \cdot \overline{w}) \\ &= (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2 \,. \end{aligned}$$

Lembre que em $\mathbb{R}$: $x^2 = y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ se, e somente se, $x = y$.

Assim, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(11) Geometricamente, o comprimento da diagonal do paralelogramo é menor do que a soma dos comprimentos dos lados. Vamos calcular o quadrado do módulo da soma. Portanto,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} \,, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue de (7), a segunda de (4) e a última de (7).

Precisamos estimar $z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}$.

Seja $u = z \cdot \overline{w}$. De (5) e (3), obtemos $\overline{u} = \overline{z \cdot \overline{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\overline{w}} = \overline{z} \cdot w$. Assim,

$$z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}(u) \leq 2|u| = 2|z \cdot \overline{w}| = 2|z| \cdot |\overline{w}| = 2|z| \cdot |w|,$$

onde as duas últimas igualdades seguem de (10) e (6), respectivamente.

Logo, $|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = (|z| + |w|)^2$.

Portanto, $|z + w| \leq |z| + |w|$. $\square$

Terminamos a demonstração das propriedades. Você deve escrever as demonstrações das propriedades (1), (4), (5) e (6), discutir com os seus colegas e comparar as soluções. Só aprendemos a escrever Matemática, tentando fazer. Não tenha medo!

Vamos ver a primeira aplicação importante dos números complexos.

Os números reais negativos não têm raízes quadradas reais. No entanto, em $\mathbb{C}$, por exemplo, $2i$ e $-2i$ são números cujo quadrado é -4, isto é, são raízes complexas quadradas de -4.

Em geral, quando a é um número real negativo, temos $-a > 0$, logo o número $\sqrt{-a} \in \mathbb{R}$ e os números complexos $\sqrt{-a}i$ e $-\sqrt{-a}i$ têm como quadrado $(\pm\sqrt{-a}i)^2 = -ai^2 = a < 0$. Nos complexos, os números reais negativos têm raiz quadrada.

Agora, os polinômios $ax^2 + bx + c$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ e $a \neq 0$ passam a ter raízes em $\mathbb{C}$.

Escrevemos

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a}.$$

Note que $x_2 = \overline{x}_1$, sendo x_1 e x_2 números complexos não-reais.

Exemplo 12

Vamos determinar as raízes complexas de $f(x) = x^2 + x + 2$.

Nesse caso, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7$. Assim, as raízes de $f(x)$ são

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \quad \text{e} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}.$$

Resumo

Você aprendeu o que são os números complexos; sua representação gráfica por pares ordenados no plano; suas operações de adição e multiplicação e suas propriedades associativa, comutativa e distributiva; a conjugação de números complexos e suas propriedades e a resolver, no conjunto de números complexos, equações quadráticas com coeficientes reais. Agora você sabe determinar em $\mathbb{C}$ raízes para todos os polinômios do 2º grau com coeficientes reais.

Exercícios

1. Dados $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -1 + i$ e $z_3 = 2 + 3i$, calcule:

   a. $z_1 \cdot z_2$.   b. $z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3$.

   c. $2i \cdot z_1 + z_2$.   d. $3z_2 + 3i \cdot z_2$.

   e. $\dfrac{z_2}{z_3}$.

2. Calcule:

   a. $(1+i)(2-i)$.   b. $\dfrac{1+i}{2-i}$.   c. $\dfrac{1}{2+2\sqrt{2}\,i}$.   d. $\dfrac{1-i}{1+i} - \dfrac{1+i}{1-i}$.

   e. $\dfrac{1+i}{i} - \dfrac{i}{1-i}$.   f. $\dfrac{1}{3+4i}$.   g. $\dfrac{4+3i}{1+\sqrt{3}i}$.   h. $\dfrac{(1+2i)(2-i)}{(3+i)(1+3i)}$.

3. Calcule o módulo e o conjugado dos números complexos: $2-5i$, $3-2i$, $4-3i$, $1+i$, $1-\sqrt{3}i$ e $-3-3i$. Represente no plano os números complexos.

4. Calcule, usando a fórmula do binômio de Newton:

   a. $(1+i)^5$.   b. $(1+\sqrt{3}i)^6$.   c. $(2-2i)^4$.

5. Calcule os valores de $f(1+i)$ e de $f(1-i)$ e compare-os, sendo $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

6. Determine os números reais a e b, para que a propriedade se verifique:
   a. $a \cdot b + (b^2-1)i = i$.
   b. $(2a+b) + bi = (a-1) + (2b+1)i$.
   c. $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja um imaginário puro.
   d. $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja um complexo não-real.
   e. $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja real.

7. Determine o número complexo z que satisfaz a igualdade:

   a. $2(z-i) + i(z-1) = 2$.   b. $(2-i)z + 3i - 4 = 0$.

   c. $(z-2)(\overline{z}+i) = 3-4i$.   d. $\dfrac{z+2i}{z+i} = 1+i$.

8. Seja $S^1 = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$ o círculo de centro $(0,0)$ e raio 1. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. Verifique que:

a. Se $z \in S^1$, então $\overline{z} \in S^1$. **b.** Se $z \in S^1$, então $z^{-1} = \overline{z} \in S^1$.

c. Se z, $w \in S^1$ então $z \cdot w \in S^1$.

9. Determine: i^{25}, i^{2002} e i^{-327}.

10. Determine em $\mathbb{C}$ as raízes do polinômio com coeficientes reais:
a. $2x^2 + 5x + 5$. **b.** $2x^2 - 3x + 2$. **c.** $x^3 + 2x$.

11. Seja $z = a+bi \neq 0$. Mostre, usando a igualdade de números complexos, que, se o complexo $c+di$ é tal que $(a+bi)(c+di) = 1$, então $c = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ e $d = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

12. Sejam z e w números complexos. Mostre que: $z \cdot w = 0$ se, e somente se, $z = 0$ ou $w = 0$.

Auto-avaliação

Você deve prosseguir após saber o que são os números complexos, suas operações de adição e multiplicação e suas propriedades, além de saber calcular o conjugado e o módulo de um complexo. Resolvendo os Exercícios 1, 2, 3 e 4, você vai trabalhar as operações e suas propriedades, o módulo e a conjugação. Os Exercícios 6 e 7 tratam da igualdade de complexos e da solução de equações. Faça a representação no plano dos números complexos, quando estiver resolvendo o Exercício 8. Releia a aula e os exemplos, sempre que tiver alguma dúvida. Acompanhe as demonstrações e os exemplos com cuidado e retorne aos exercícios. Uma boa estratégia para melhorar a sua aprendizagem é trabalhar em grupo, discutindo os conceitos com outros colegas do curso. Isso pode ser feito no pólo. Que tal essa idéia? Faça em grupo os Exercícios 11 e 12. Você é capaz de resolvê-los!

Aula 20 – Forma polar dos números complexos

Objetivos

- Representar os números complexos não-nulos na forma polar.
- Multiplicar números complexos na forma polar e interpretar geometricamente a multiplicação.
- Extrair raízes n-ésimas de números complexos.

Conceitos:
Números complexos e Trigonometria.

Vamos fazer uma outra representação dos números complexos não-nulos, chamada forma polar ou forma trigonométrica dos números complexos. Esta representação é muito útil para multiplicar números complexos, interpretar geometricamente a multiplicação de números complexos não-nulos, extrair raízes n-ésimas de números complexos e visualizar a radiciação de números complexos no plano.

Lembre que:
O círculo trigonométrico é o círculo de raio 1.
A medida em radianos de um ângulo não-negativo é o comprimento do arco correspondente no círculo trigonométrico.
O comprimento da circunferência de raio 1 é 2π radianos.

Sejam $z = a+bi$ um número complexo não-nulo e $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ o seu módulo. O ponto $P = (a, b)$ do plano que representa $z \neq 0$, é diferente da origem $O = (0, 0)$. Portanto, o segmento de reta OP determina com o eixo x um ângulo maior ou igual a zero grau e menor do que 360 graus, cuja medida θ, em radianos, está no intervalo $[0,\ 2\pi)$.

O número real θ é o *argumento de z* e escrevemos $\arg(z) = \theta$.

O símbolo $\arg(z) = \theta$ lê-se argumento de zê igual a teta.

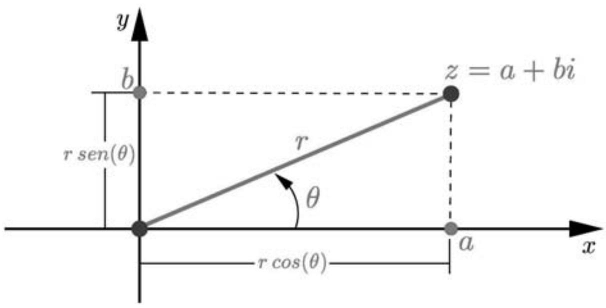


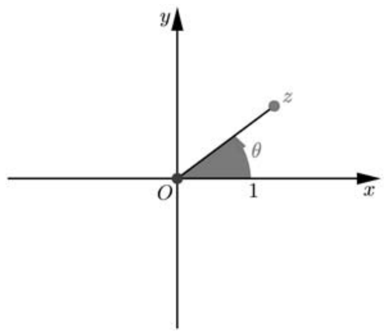
Figura 20.1: Argumento θ de $z = a + bi \neq 0$ e $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Geometricamente, o argumento de z é a medida em radianos, no círculo trigonométrico, do ângulo que devemos girar o semi-eixo positivo da reta real, no sentido anti-horário, até coincidir com o segmento OP. Observe que $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Portanto, Em Matemática, o argumento do número complexo z não-nulo é a medida do comprimento do arco correspondente no círculo trigonométrico.

Na nossa linguagem, um argumento é um raciocínio pelo qual se chega a uma conseqüência ou dedução. Consulte um dicionário, para aprender outros significados da palavra argumento nas áreas de História, Filosofia e Astronomia.

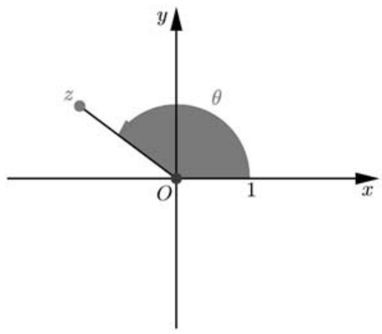
$$\boxed{\arg(z) = \theta, \quad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}}$$

Nas figuras a seguir, representamos o ponto P do plano correspondente ao número complexo $z \neq 0$ e a variação do sinal do cosseno e do seno do ângulo de θ radianos, onde $\theta = \arg(z)$, conforme o quadrante em que se encontra z.



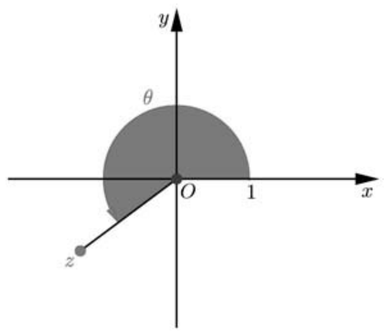
Quadrante I: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$.



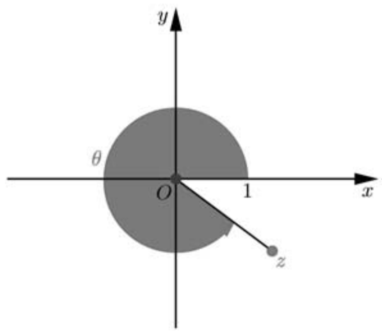
Quadrante II: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos\theta < 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$.



Quadrante III: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\cos\theta < 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$.



Quadrante IV: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\cos\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$.

Lembre que:

- Para cada $\theta \in [0, 2\pi)$, $\quad -1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad$ e $\quad -1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$.
- O cosseno e o seno de θ satisfazem a relação: $\quad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, pois, qualquer que seja $\theta \in [0, 2\pi)$, o ponto do plano $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ está no círculo de centro na origem e raio 1, representado na **Figura 20.2**.
- Na **Figura 20.3**, estão os valores do cosseno e do seno de alguns ângulos notáveis em radianos entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, representados no círculo de raio 1!

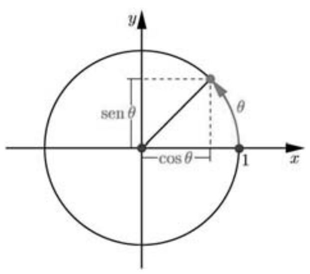


Figura 20.2: Ponto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

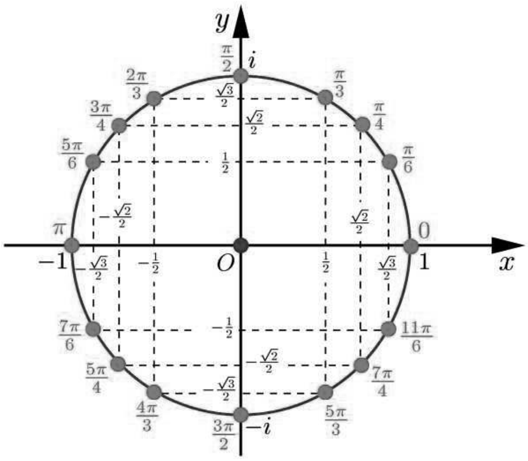


Figura 20.3: Representação de θ radianos, $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ no círculo de raio 1.

Exemplo 6

Determinemos o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a. $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2i$ e $z_4 = -2i$. Faça a representação no plano desses números complexos para visualizar os seus argumentos.

z_1 e z_2 estão situados sobre a reta real, sendo z_1 no semi-eixo positivo e z_2 no semi-eixo negativo. Logo, $\theta_1 = \arg(z_1) = 0$ e $\theta_2 = \arg(z_2) = \pi$.

z_3 e z_4 estão situados sobre o eixo imaginário, sendo z_3 no semi-eixo positivo e z_4 no semi-eixo negativo. Logo, $\theta_3 = \arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_4 = \arg(z_4) = \frac{3\pi}{2}$.

b. $z_5 = 2 - 2i$, $z_6 = -1 - \sqrt{3}i$.

Primeiramente, observe que z_5 e z_6 estão nos quadrantes IV e III, respectivamente. Como $r_5 = |z_5| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_5) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta_5) &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $\theta_5 = \arg(z_5) = \dfrac{7\pi}{4}$ (veja a **Figura 20.3**).

Como $r_6 = |z_6| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, temos que:

$$\cos(\theta_6) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta_6) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\theta_6 = \arg(z_6) = \dfrac{4\pi}{3}$ (veja a **Figura 20.3**).

A *forma polar* ou *forma trigonométrica* do número complexo não-nulo $z = a + bi$, com módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e argumento $\arg(z) = \theta$ é:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\,, \quad \text{onde} \quad \cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}\,.}$$

Curiosidade:

Costuma-se escrever $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.

Em particular, $e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$.

É devido a Euler uma das mais belas fórmulas de Matemática $e^{i\pi} + 1 = 0$, envolvendo cinco números importantes $0, 1, e, \pi, i$.

Quando expressamos um número complexo não-nulo na forma polar, explicitamos o seu módulo e o seu argumento.

Exemplo 7

Vamos expressar os números complexos do Exemplo 6 na forma polar, aproveitando os cálculos dos seus módulos e argumentos:

$z_1 = 3 = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, $\quad z_2 = -3 = 3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$,

$z_3 = 2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$, $\quad z_4 = -2i = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2})$,

$z_5 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4})$, $\quad z_6 = -1 - \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3})$.

Produto de números complexos na forma polar:

Dados os complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, temos:

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right).}$$

A relação acima dá uma interpretação geométrica para o produto de números complexos não-nulos: para calcular o produto, é suficiente calcular o produto dos módulos de z_1 e z_2 e somar os seus argumentos θ_1 e θ_2.

De fato,

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)\right) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right)\,. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos as duas identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2. \end{aligned}$$

Exemplo 8

Vamos determinar na forma polar o produto $z_1 z_2$, sendo

$$z_1 = -5 + 5\sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = 2\sqrt{3} - 2i.$$

Temos

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 25 \cdot 3} = \sqrt{100} = 10 \qquad \text{e} \\ r_2 &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, $r_1 r_2 = 40\,.$

Note que z_1 e z_2 estão nos quadrantes II e IV, respectivamente. Além disso,

$$\cos\theta_1 = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

nos dá $\theta_1 = \arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}$;

$\cos\theta_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, nos dá $\theta_2 = \arg(z_2) = \dfrac{11\pi}{6}$.

Para visualizar os argumentos, faça a representação no plano dos números complexos z_1, z_2 e $z_1 \cdot z_2$.

Assim, $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{15\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

Logo, $z_1 z_2 = 40(\cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(2\pi + \frac{\pi}{2})) = 40(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$.

Ao marcarmos sobre o círculo trigonométrico os comprimentos de θ radianos e $\theta + 2\pi$ radianos, no sentido anti-horário, começando no ponto $A = (1, 0)$, correspondente a 0 radiano, paramos no mesmo ponto P. Assim, os segmentos OA e OP, segmentos inicial e final para a determinação do ângulo em graus correspondente a θ radianos e a $\theta + 2\pi$ radianos, coincidem (**Figura 20.4**).

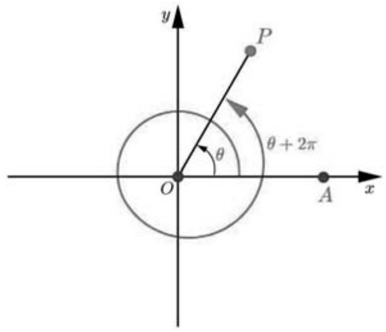


Figura 20.4: Congruência de θ e $\theta + 2\pi$ radianos.

Dizemos que θ radianos e $\theta + 2\pi$ radianos são *congruentes*.

Geometricamente, $\theta + 2\pi$ significa uma volta a mais no círculo trigonométrico, a partir de θ.

Dizemos que o cosseno e o seno são periódicas de período 2π porque satisfazem:

$$\boxed{\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi).}$$

Qual é o argumento do produto $z_1 z_2$?

Como $0 \leq \theta_1 = \arg(z_1) < 2\pi$ e $0 \leq \theta_2 = \arg(z_2) < 2\pi$, temos $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 4\pi$ e há um único θ, com $0 \leq \theta < 2\pi$ tal que

$$\cos\theta = \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2).$$

Dizemos que θ, pertencente ao intervalo $[0, 2\pi)$, é *congruente* a $\theta_1 + \theta_2$ e $\arg(z_1 z_2) = \theta$.

Assim, $z_1 \cdot z_2$ é o número complexo , tal que

$$\boxed{|z_1 z_2| = r_1 r_2 \quad \text{e} \quad \arg(z_1 z_2) = \theta \in [0, 2\pi), \text{ com } \theta \text{ congruente a } \theta_1 + \theta_2.}$$

Exemplo 9

O que significa multiplicar um número complexo $z \neq 0$ por i?

O número complexo iz tem módulo $|iz| = |z|$ e seu argumento é congruente a $\arg(z) + \frac{\pi}{2}$.

O produto de i por z corresponde a uma rotação de 90^o em torno da origem, no sentido anti-horário, do ponto do plano que representa z (**Figura 20.5**).

Jean Robert Argand, um matemático amador, nascido na Suíça em 1768, ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90^o.

A representação no plano dos números complexos é conhecida como plano de Argand-Gauss.

Para saber mais sobre Argand, consulte http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Argand.html

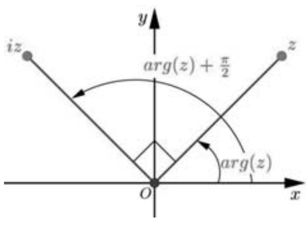


Figura 20.5: Multiplicação de $z \neq 0$ por i.

Exemplo 10

Quando multiplicamos dois complexos z_1 e z_2 de módulo 1 e argumentos θ_1 e θ_2, o produto é o número complexo do círculo de raio 1 centrado na origem definido por $\theta_1 + \theta_2$.

Para ilustrar, consideremos $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Verificamos que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ e $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$. Como $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, temos $z_1 z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$.

A multiplicação na forma polar permite determinar uma expressão para potências de expoente natural $n \geq 1$ cuja base é um número complexo não-nulo, conforme veremos na seguinte proposição.

Proposição 20.1 (Fórmula de De Moivre)
Seja $z \neq 0$ um número complexo dado na forma polar $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Então, para cada número natural $n \geq 1$,

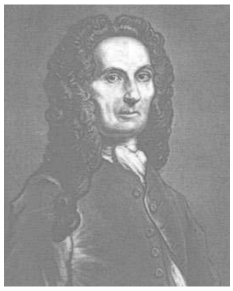
$$\boxed{z^n = r^n\,(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)).}$$

Para aprender indução, consulte o Módulo 3 de Matemática Discreta.

Demonstração: Esta demonstração será feita por indução sobre o expoente n, isto é: verificamos que a fórmula é válida para $n = 1$, supomos a fórmula verdadeira para n (hipótese de indução) e mostramos que é válida para $n+1$. Temos $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, que corresponde à substituição de $n = 1$ na expressão do enunciado. Suponhamos que a fórmula vale para n. Então,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n \\ &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot [r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))] \\ &= r^{n+1}[\cos(\theta + n\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta + n\theta)] \\ &= r^{n+1}[\cos((n+1)\theta) + i\,\mathrm{sen}((n+1)\theta)], \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução, a terceira da multiplicação de números complexos na forma polar e a última mostra a validade da fórmula do enunciado em $n+1$. Concluímos, por indução, a validade da fórmula para todo número natural $n \geq 1$. $\square$



Abraham De Moivre
Vitry, França.
1667-1754

Deu grandes contribuições para Estatística, Probabilidade e Trigonometria. Desenvolveu o conceito de *eventos estatisticamente independentes* e escreveu um tratado importante de Probabilidade. Teve uma vida simples e modesta, como tutor particular de Matemática.
Quer saber mais? Consulte:
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/De_Moivre.html`

Exemplo 11

Seja $z = -\sqrt{3} + i$. Vamos calcular z^8.

Nesse caso, $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Além disso, as relações $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$ nos dizem que $\arg(z) = \theta = \dfrac{5\pi}{6}$. Logo, $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ e

$$z^8 = 2^8\left(\cos\left(8 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(8 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 256\left(\cos\frac{40\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{40\pi}{6}\right).$$

Vamos determinar $\arg(z^8)$, isto é, $\theta \in [0, 2\pi)$ com θ congruente a $\dfrac{40\pi}{6}$.

Escrevemos $\dfrac{40\pi}{6} = \dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{18\pi + 2\pi}{3} = 6\pi + \dfrac{2\pi}{3}$ (6π corresponde a 3 voltas no círculo trigonométrico).

Portanto, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ é o argumento de z^8 e $z^8 = 256\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Curiosidade sobre De Moivre

Previu a data da sua morte: morreria no dia que dormisse por 24 horas, considerando que dormia 15 minutos a mais cada noite. Para calcular o dia da sua morte usou uma progressão aritmética!

Exemplo 12

Seja $z = -1 + i$. Vamos calcular z^6.

Nesse caso, $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Além disso, as igualdades

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

nos dizem que $\arg(z) = \theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Logo, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e

$$z^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(6 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{18\pi}{4}\right).$$

Vamos determinar $\arg(z^6)$, isto é, $\theta \in [0, 2\pi)$ com θ congruente a $\dfrac{18\pi}{4}$.

Escrevemos $\dfrac{18\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{2} = \dfrac{8\pi+\pi}{2} = 4\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (4π corresponde a 2 voltas no círculo trigonométrico).

Portanto, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ é o argumento de z^6 e $z^6 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = 8i$.

Você, certamente, já observou que no cálculo do argumento de z^n subtraímos de $n \cdot \arg(z)$ um múltiplo inteiro conveniente de 2π, de modo a obter um número real $\theta \in [0, 2\pi)$. Nesse caso, $\arg(z^n) = \theta$.

Definição 20.1 (Raízes complexas n-ésimas)

Dado um número complexo $z \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, definimos as *raízes complexas n-ésimas* de z como sendo os números complexos w tais que

$$w^n = z\,.$$

A expressão n-ésimas lê-se enésimas.

Exemplo 13

Calculando, $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ e $(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = -9$, concluímos que $3i$ e $-3i$ são raízes complexas quadradas de -9.

Exemplo 14

Tomando $z = 1$ e $n = 4$ temos que todo $w \in \{1, -1, i, -i\}$ satisfaz $w^4 = 1$ e é chamado uma raiz complexa quarta da unidade.

Exemplo 15

As raízes complexas cúbicas de $8i$ são os números $-2i, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i$.

De fato, temos $(-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = (-8)\cdot(-i) = 8i$. Para calcular o cubo dos números $\sqrt{3}+i$ e $-\sqrt{3}+i$ escrevemos primeiro a sua forma polar:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{e} \quad -\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right).$$

Usando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i\,,\\
(-\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = 2^3\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i\,.
\end{aligned}$$

Para cada número real $r \geq 0$ e para cada número natural $n \geq 2$, o símbolo $\sqrt[n]{r}$ significa o número real $\rho \geq 0$, tal que

$\rho = \sqrt[n]{r} \iff \rho^n = r, \quad \rho \geq 0.$

Lembre que: $\sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[2]{25} = 5, \quad \sqrt[6]{1} = 1.$

Proposição 20.2 (Raízes complexas n-ésimas)

Todo número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas n-ésimas de z, para cada número natural $n \geq 2$, a saber,

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,}$$

onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.

Demonstração: Seja $n \geq 2$ um número natural dado. Primeiramente, escrevemos z na forma polar $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Vamos calcular as raízes n-ésimas também na forma polar. Queremos determinar os números complexos $w = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$ tais que $z = w^n$.

Lê-se ρ como rô e ϕ, como fi.

Como $w^n = \rho^n(\cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi))$, temos $w^n = z$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\phi = \theta + 2\pi\lambda,\ \lambda \in \mathbb{N} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \rho \in \mathbb{R}\,,\ \rho > 0 \\ \phi = \dfrac{\theta + 2\pi\lambda}{n},\ \lambda \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lê-se λ como lambda.

A equivalência sobre ϕ foi obtida usando as identidades

$$\begin{aligned} \cos(n\phi) &= \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta + 4\pi) = \cdots = \cos(\theta + \lambda\cdot 2\pi)\,, \\ \mathrm{sen}(n\phi) &= \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(\theta + 2\pi) = \mathrm{sen}(\theta + 4\pi) = \cdots = \mathrm{sen}(\theta + \lambda\cdot 2\pi)\,, \end{aligned}$$

para todo número natural λ.

Fazendo a divisão euclidiana de cada $\lambda \in \mathbb{N}$ por n, obtemos

$$\lambda = q\cdot n + k, \text{ sendo } q \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 0 \leq k \leq n-1.$$

Assim, $\phi = \dfrac{\theta + 2\pi\lambda}{n} = \dfrac{\theta + 2\pi(q\cdot n + k)}{n} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n} + 2\pi q\,.$

Logo, ϕ é congruente a $\phi_k = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ há uma raiz complexa n-ésima de z, determinada pelo argumento ϕ_k, a saber:

$\phi_0 = \dfrac{\theta}{n}$, $\phi_1 = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$, $\phi_2 = \dfrac{\theta}{n} + 2\cdot\dfrac{2\pi}{n}$, $\ldots$, $\phi_{n-2} = \dfrac{\theta}{n} + (n-2)\cdot\dfrac{2\pi}{n}$,
$\phi_{n-1} = \dfrac{\theta}{n} + (n-1)\cdot\dfrac{2\pi}{n}$,

sendo as raízes complexas n-ésimas de z dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\phi_k + i\,\mathrm{sen}\,\phi_k)\,, \quad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \qquad \square$$

Observação

Quando z é um número real positivo, temos $\arg(z) = 0$ e as n raízes complexas n-ésimas de z têm argumento dado por $\phi_k = \frac{2k\pi}{n}$, onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Geometricamente, as raízes complexas n-ésimas do número real positivo $z = |z|$ são os pontos que dividem em n partes iguais o círculo de raio $\sqrt[n]{|z|}$ centrado na origem.

Exemplo 16

As 4 raízes complexas quartas de 16 são: 2, $2i$, -2, $-2i$, determinadas por $\phi_k = \dfrac{2\pi\cdot k}{4} = \dfrac{\pi\cdot k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ e $\rho = \sqrt[4]{16} = 2\,$.

Assim,

$\phi_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2\,,$

$\phi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = 2i\,,$

$\phi_2 = \pi \Rightarrow z_2 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -2\,,$

$\phi_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_3 = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}) = -2i\,.$

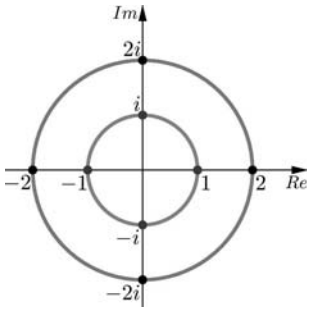


Figura 20.6: Raízes quartas de 16.

Veja na **Figura 20.6** a representação geométrica das raízes complexas quartas de 16 no círculo de raio $2 = \sqrt[4]{16}$ centrado na origem.

Veja na **Figura 20.6** a representação geométrica das raízes complexas quartas da unidade no círculo de raio 1 centrado na origem.

As raízes complexas n-ésimas de $z = 1$ são chamadas raízes n-ésimas da unidade. Nesse caso, $\theta = \arg(1) = 0$, $\phi_k = \frac{2k\pi}{n}$, onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. As raízes complexas n-ésimas da unidade são os pontos z_k, com $k = 0, 1, \ldots, n-1$ do círculo trigonométrico que o dividem em n partes iguais, sendo $z_0 = 1$.

Exemplo 17

Nas **Figuras 20.7** e **20.8**, estão representadas as raízes complexas cúbicas da unidade e as raízes complexas sextas da unidade, respectivamente.

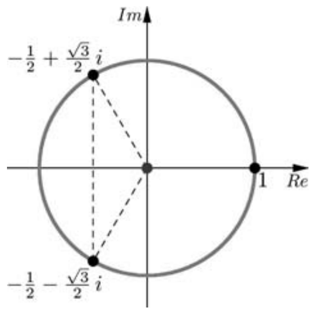


Figura 20.7: Raízes complexas cúbicas de 1.

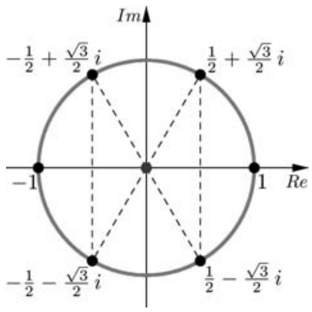


Figura 20.8: Raízes complexas sextas de 1.

Exemplo 18

Vamos determinar as raízes cúbicas de $z = -27i$.

Temos $r = 27$ e $\theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$. Então, $\frac{\theta}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\phi_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Portanto, as raízes complexas cúbicas têm como módulo o número real $\rho = \sqrt[3]{27} = 3$ e argumentos ϕ_k. Assim,

$\phi_0 = \frac{\pi}{2} \implies z_0 = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = 3i\,;$

$\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \implies z_1 = 3(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

e

$\phi_2 = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \implies z_2 = 3(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$

Exemplo 19

Vamos determinar as raízes complexas quadradas de $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Temos $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$ e $\rho = \sqrt{r} = \sqrt{4} = 2$.

Seja $\theta = \arg(z)$. Então, $\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $\phi_k = \frac{\theta}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ com $k = 0, 1$.

Logo,

$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \implies z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$ e

$\phi_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \implies z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} - i$.

Resumo

Você aprendeu a forma polar de um número complexo não-nulo, que explicita o módulo e o argumento; a fazer a multiplicação de dois números complexos escritos na forma polar; a calcular potências de expoente natural $n \geq 1$ de números complexos não-nulos escritos na forma polar. Agora você sabe a interpretação geométrica da multiplicação de números complexos e aprendeu a calcular as n raízes complexas n-ésimas de um número complexo não-nulo.

Exercícios

1. Determine o módulo, o argumento e escreva o número complexo z na forma polar. Represente z no plano, indicando o seu módulo e o seu argumento no desenho.

   a. $z = 3 - 3i$. b. $z = -1 + i$. c. $z = 4 + 4i$.
   d. $z = 5i$. e. $z = -7$. f. $z = 2 + 2i$.
   g. $z = \sqrt{3} - i$. h. $z = -2\sqrt{3} - 2i$. i. $z = \dfrac{1}{-1 - i}$.
   j. $z = 5$. k. $z = -2i$. l. $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

2. Calcule $z_1 \cdot z_2$:

   a. $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5})$ e $z_2 = 3(\cos\frac{3\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5})$.

   b. $z_1 = 3(\cos\frac{2\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6})$ e $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$.

   c. $z_1 = \frac{3}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12})$ e $z_2 = 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12})$.

   d. $z_1 = 3(\cos\frac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8})$ e $z_2 = 5(\cos\frac{7\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8})$.

3. Calcule as potências:

   a. $(2 + 2i)^5$. b. $(-1 + i)^7$. c. $(-\sqrt{3} - i)^{10}$. d. $(-1 + \sqrt{3}i)^8$.

4. Refaça o exercício 4, da Aula 19, usando a forma polar de um número complexo.

5. Dado $z = \cos\frac{\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{15}$, determine: z^5, z^{25} e as raízes complexas 4-ésimas de z^{20}.

6. Determine os valores do número natural $n \geq 2$, para os quais $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$:

a. é um número real.

b. é um imaginário puro.

7. Determine as raízes complexas n-ésimas de z:

a. $n = 2$, $z = 1 - \sqrt{3}i$.

b. $n = 4$, $z = 3$.

c. $n = 3$, $z = -16 + 16i$.

d. $n = 6$, $z = -1$.

8. Determine e represente no plano as raízes complexas n-ésimas de $z = 1$, para $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12$.

Auto-avaliação

Você sabe determinar a forma polar de um número complexo $z \neq 0$? Qual a utilidade da forma polar? Se você não sabe responder, volte ao texto, releia as definições de módulo de z, argumento de z e forma polar de z e refaça os exemplos. Os conhecimentos elementares de Trigonometria são importantes para a determinação do argumento de z. Talvez a sua dificuldade esteja na Trigonometria. Que tal uma revisão dessa matéria? As aplicações da forma polar são o cálculo de potências de expoente natural e a radiciação de números complexos. Os exercícios só requerem escrever a forma polar de um número complexo (Exercício 1), multiplicar números complexos na forma polar (Exercício 2) e saber determinar as potências naturais (Exercícios 3, 4, 5 e 6) e as n raízes complexas n-ésimas de um número complexo (Exercícios 5, 7 e 8).

Aula 21 – Fatoração em $\mathbb{R}[x]$

Objetivos

- Compreender o Teorema Fundamental da Álgebra.
- Relacionar uma raiz β complexa não-real de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ com a sua divisibilidade por $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}[x]$.
- Decompor polinômios em $\mathbb{R}[x]$ de grau $n \geq 1$ em produto de potências de fatores dos tipos $x - a$ e $x^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4c < 0$.

Conceitos:

Números reais e operações, polinômios com coeficientes reais, números complexos e operações.

Combinando as fórmulas de Bhaskara, com o método de resolução em $\mathbb{C}$ das equações do 2º grau com discriminante negativo, podemos determinar, no conjunto dos números complexos, todas as raízes para os polinômios do segundo grau com coeficientes reais $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. A saber:

$$\begin{aligned}
\Delta = 0 &\iff x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}\\
\Delta > 0 &\iff x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\\
\Delta < 0 &\iff x_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a},\ \text{onde}\, x_2 = \overline{x}_1
\end{aligned}$$

são números complexos não-reais.

Antes de apresentarmos o Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado por Gauss e conhecido hoje na França como Teorema de D'Alembert, vamos aprender mais propriedades de polinômios com coeficientes reais.

Na França, o Teorema Fundamental da Álgebra é conhecido como Teorema de D'Alembert, pois ele dispendeu muito tempo e esforço tentando demonstrá-lo.

A seguir, algumas das importantes contribuições de Jean Le Rond D'Alembert à Matemática.

Definição 21.1

Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Dado $\beta \in \mathbb{C}$, definimos a *avaliação* de f em β como sendo o número complexo

$$\boxed{f(\beta) = a_n\beta^n + \cdots + a_1\beta + a_0\,.}$$

No Exercício 5, da Aula 19, você fez a avaliação do polinômio $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ nos números complexos $\beta = 1 + i$ e $\overline{\beta} = 1 - i$. Comparando os resultados obtidos, qual a relação entre os números complexos $f(\beta)$ e $f(\overline{\beta})$?

Note que $f(\overline{\beta}) = 3\overline{\beta}^2 + 2\overline{\beta} - 1 = \overline{3\beta^2 + 2\beta - 1} = \overline{f(\beta)}$, sendo a segunda igualdade conseqüência das propriedades da conjugação (2), (5) e (4) vistas na Aula 19. Assim, $f(\overline{\beta}) = \overline{f(\beta)}$ para todo $\beta \in \mathbb{C}$.

O que você observou, nesse caso particular, é uma propriedade geral que vale para todos os polinômios com coeficientes reais e números complexos β e $\overline{\beta}$, conforme veremos na seguinte proposição.

Jean Le Rond D'Alembert
1717 - 1783,
França.

D'Alembert tinha instrução nas áreas de Direito, Medicina, Ciência e Matemática. Com apenas 24 anos, foi eleito para a *Académie de Sciences* da França. Entre 1751 e 1772, colaborou com Diderot na edição da primeira enciclopédia: *Encyclopédie raisonné des sciences, des arts et des métiers*, onde publicou diversos trabalhos de Matemática. Em 1744, publicou *Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides* e, em 1747, seu trabalho em vibração de cordas, onde aparece pela primeira vez a equação da onda. Deu importantes contribuições à Matemática: foi o primeiro a entender a importância das funções e da teoria dos limites; a definir a derivada como o limite de um quociente de incrementos; e pioneiro no estudo de equações diferenciais parciais.

Para ter mais informações sobre D'Alembert, consulte: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/D'Alembert.html`

Proposição 21.1

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios com coeficientes reais e β um número complexo. Valem as seguintes propriedades:

(i) $f(\overline{\beta}) = \overline{f(\beta)}$. Em particular, $f(\beta) = 0 \Longleftrightarrow f(\overline{\beta}) = 0$.

(ii) Se $s(x) = f(x) + g(x)$, então $s(\beta) = f(\beta) + g(\beta)$.

(iii) Se $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, então $p(\beta) = f(\beta) \cdot g(\beta)$.

(iv) Seja β um número complexo não-real, isto é, $\beta \neq \overline{\beta}$, e seja $f(x)$ um polinômio de grau maior ou igual a 1. Então,

$$f(\beta) = 0 \text{ se, e somente se, } x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}[x] \text{ divide } f(x).$$

Demonstração: Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Das propriedades (2) e (5) da conjugação, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, temos $a_j \overline{\beta}^j = \overline{a}_j \overline{\beta}^j = \overline{a}_j \overline{\beta^j} = \overline{a_j \beta^j}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(\overline{\beta}) &= a_n \overline{\beta}^n + \cdots + a_1 \overline{\beta} + a_0 \\ &= \overline{a_n \beta^n} + \cdots + \overline{a_1 \beta} + \overline{a}_0 \\ &= \overline{a_n \beta^n + \cdots + a_1 \beta + a_0} \\ &= \overline{f(\beta)}\,, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é conseqüência do conjugado da soma ser igual à soma dos conjugados (propriedade (4) da conjugação).

Em particular, como $0 = \overline{0}$ e $\overline{\overline{f(\beta)}} = f(\beta)$, temos que:

$$f(\beta) = 0 \Longleftrightarrow \overline{f(\beta)} = 0 \Longleftrightarrow f(\overline{\beta}) = 0.$$

(ii) Seja $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Usando a definição da adição de polinômios, temos que

$$s(x) = f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} s(\beta) &= (a_n + b_n)\beta^n + \cdots + (a_1 + b_1)\beta + (a_0 + b_0) \\ &= (a_n\beta^n + b_n\beta^n) + \cdots + (a_1\beta + b_1\beta) + (a_0 + b_0) \\ &= (a_n\beta^n + \cdots + a_1\beta + a_0) + (b_n\beta^n + \cdots + b_1\beta + b_0) \\ &= f(\beta) + g(\beta)\,, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da distributividade da adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ e a terceira, da comutatividade e associatividade da adição em $\mathbb{C}$.

(iii) Seja $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$. Usando a definição da multiplicação de polinômios, temos que $p(x) = f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, sendo $c_k = \sum_{\lambda+\mu=k} a_\lambda b_\mu$.

Logo,

$$\begin{aligned} p(\beta) &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k \beta^k = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\lambda+\mu=k} a_\lambda b_\mu \right) \beta^k \\ &= a_n b_m \beta^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}) \beta^{n+m-1} + \cdots + \\ &+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \beta^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) \beta + a_0 b_0 \,. \end{aligned}$$

Usando as propriedades distributiva e comutativa da adição e multiplicação de números complexos, calculamos o produto

$$f(\beta) g(\beta) = (a_n \beta^n + \cdots + a_1 \beta + a_0)(b_m \beta^m + \cdots + b_1 \beta + b_0)$$

e verificamos a igualdade desejada.

(iv) Seja $\beta \in \mathbb{C}$, tal que $\beta \neq \overline{\beta}$. Primeiramente, lembre que

$$\beta + \overline{\beta} = 2\,\mathrm{Re}(\beta) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta\overline{\beta} = |\beta|^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}[x]$.

$\Longrightarrow$: Seja agora $f(x)$, um polinômio com coeficientes reais, tal que $f(\beta) = 0$. Pelo item (i), temos também que $f(\overline{\beta}) = 0$. Fazendo a divisão euclidiana de $f(x)$ por $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$, obtemos $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $r(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x) = (x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}) q(x) + ax + b\,.$$

Pelos itens (ii) e (iii) já demonstrados, avaliando $f(x)$ em β e $\overline{\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\beta) = (\beta^2 - (\beta + \overline{\beta})\beta + \beta\overline{\beta}) \cdot q(\beta) + a\beta + b = 0 \cdot q(\beta) + a\beta + b = a\beta + b \\ 0 &= f(\overline{\beta}) = (\overline{\beta}^2 - (\beta + \overline{\beta})\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}) \cdot q(\overline{\beta}) + a\overline{\beta} + b = 0 \cdot q(\overline{\beta}) + a\overline{\beta} + b = a\overline{\beta} + b\,. \end{aligned}$$

Portanto, para calcular o resto da divisão, devemos resolver em $\mathbb{C}$ o sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} a\beta + b &= 0 \\ a\overline{\beta} + b &= 0\,. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, eliminamos b, obtendo:

$$(a\beta + b) - (a\overline{\beta} + b) = 0\,, \quad \text{que é equivalente a,} \quad a(\beta - \overline{\beta}) = 0.$$

Como $\beta \neq \overline{\beta}$, temos $\beta - \overline{\beta} \neq 0$. Sendo o produto de dois números complexos igual a 0 se, e somente se, um dos fatores é 0, obtemos $a = 0$. Substituindo esse valor na primeira equação do sistema, concluímos que $b = 0$ e, portanto, $r(x) \equiv \mathbf{0}$. Isto é, $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$ divide $f(x)$.

$\Longleftarrow$: Reciprocamente, se $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$ divide $f(x)$, então existe $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que

$$f(x) = (x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}) q(x) \quad \text{e}$$

$$f(\beta) = (\beta^2 - (\beta + \overline{\beta})\beta + \beta\overline{\beta}) q(\beta) = 0 \cdot q(\beta) = 0\,. \qquad \square$$

Não esqueça:

Para demonstrar que as propriedades $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são equivalentes, isto é,

$$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q},$$

devemos demonstrar que:

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}.$$

Você fez o Exercício 12, da Aula 19?
Ainda está em tempo.

Note que:

• O item (iv) da proposição anterior diz que *as raízes complexas não-reais de um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, quando existem, ocorrem aos pares*. Nesse caso, tanto β quanto $\overline{\beta}$, com $\beta \neq \overline{\beta}$, são raízes de $f(x)$.

• Quando $\beta \in \mathbb{C}$ é um número complexo não-real, temos $\text{Im}(\beta) \neq 0$ e o discriminante do polinômio $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$ é

$$\begin{aligned}\Delta &= (\beta+\overline{\beta})^2 - 4\beta\overline{\beta} = \beta^2 + 2\beta\overline{\beta} + \overline{\beta}^2 - 4\beta\overline{\beta} = \beta^2 - 2\beta\overline{\beta} + \overline{\beta}^2 = (\beta - \overline{\beta})^2 \\ &= (2i\,\text{Im}(\beta))^2 = -4(\text{Im}(\beta))^2 < 0\,.\end{aligned}$$

Como uma motivação para enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra e sua relação com a decomposição de polinômios em $\mathbb{R}[x]$ num produto de potências de fatores dos tipos $x - a$ e $x^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\Delta = b^2 - 4c < 0$, vamos analisar, nos exemplos a seguir, alguns polinômios em $\mathbb{R}[x]$, determinando suas raízes reais (relacionadas com seus fatores do tipo $x - a$) e verificando se são divisíveis por fatores mônicos do 2º grau com discriminante negativo.

Lembre que:
um polinômio é dito mônico se o coeficiente do seu termo de mais alto grau é igual a 1.

Exemplo 6

Seja $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{R}[x]$.

Observamos que só há dois números reais cuja quarta potência é 2: $\sqrt[4]{2}$ e $-\sqrt[4]{2}$. Esses números reais são raízes de $f(x)$, o que é equivalente a $(x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})$ dividir $f(x)$. Fazendo a divisão, obtemos:

$$f(x) = x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2}).$$

Entretanto, no conjunto dos números complexos há quatro números cuja quarta potência é 2: $-\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}i$ e $\sqrt[4]{2}i$, que são as raízes complexas quartas de 2.

Trace o círculo de raio $\sqrt[4]{2}$ e visualize as raízes complexas quartas de 2.

Lembre que ...
Geometricamente, as raízes complexas $n-$ésimas de um número real $r > 0$ dividem o círculo de raio $\sqrt[n]{r}$ em n partes iguais.

Para determiná-los, tomamos os argumentos $\phi_k = \frac{2\pi \cdot k}{4}, k = 0, 1, 2, 3,$ obtendo

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = \tfrac{\pi}{2}, \quad \phi_2 = \pi \quad \text{e} \quad \phi_3 = \tfrac{3\pi}{2}.$$

Escrevendo o módulo $\rho = \sqrt[4]{2}$ das raízes complexas quartas de 2, temos as quatro raízes complexas quartas de 2 dadas por:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}i, \quad z_2 = -\sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad z_3 = -\sqrt[4]{2}i.$$

Os números complexos conjugados $\sqrt[4]{2}i$ e $-\sqrt[4]{2}i$ são as raízes em $\mathbb{C}$ do polinômio do 2º grau $x^2 + \sqrt{2}$ com coeficientes reais.

Em $\mathbb{C}$ a equação $x^4 - 2 = 0$ tem quatro soluções, enquanto em $\mathbb{R}$ há apenas duas soluções.

Exemplo 7

Seja $f(x) = -2x^9 + 32x^6 - 128x^3$. Quais são as raízes de $f(x)$?

Colocando -2 em evidência, temos $f(x) = -2(x^9 - 16x^6 + 64x^3)$ e vemos que $f(x)$ é divisível por x^3. Portanto,

$$f(x) = -2x^3(x^6 - 16x^3 + 64).$$

O número $a = 0$ é uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade 3. As outras raízes de $f(x)$, forçosamente, são raízes de $x^6 - 16x^3 + 64$, pois

$$f(\alpha) = -2\alpha^3(\alpha^6 - 16\alpha^3 + 64) = 0 \iff \alpha^3 = 0 \text{ ou } \alpha^6 - 16\alpha^3 + 64 = 0$$

$$\iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha^6 - 16\alpha^3 + 64 = 0\,.$$

Não esqueça que:
Se $a, b \in \mathbb{R}$, então
$a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.
Se $z, w \in \mathbb{C}$, então
$z \cdot w = 0 \iff z = 0$ ou $w = 0$.

Para continuar a pesquisa das raízes de $f(x)$, devemos buscar agora as raízes do fator $x^6 - 16x^3 + 64$. Observando as potências de x e os coeficientes, lembramos de um produto notável e escrevemos

$$x^6 - 16x^3 + 64 = (x^3 - 8)^2.$$

Lembre dos produtos notáveis:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Portanto, as raízes de $x^6 - 16x^3 + 64$ são as raízes de $(x^3 - 8)^2$. Assim, basta determinar as raízes de $x^3 - 8$, sem esquecer que a multiplicidade delas no polinômio $x^6 - 16x^3 + 64$ é 2.

O polinômio $x^3 - 8$ tem três raízes em $\mathbb{C}$, as raízes complexas cúbicas de 8. Apenas uma delas é um número real e as outras duas são números complexos não-reais. Para determiná-las, calculamos o módulo $\rho = \sqrt[3]{8} = 2$ e os argumentos $\phi_k = \frac{2\pi k}{3}$, com $k = 0, 1, 2$. Obtemos, $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $\phi_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_0 = 2$, $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - \sqrt{3}i$.

Note que

$$z_2 = \overline{z}_1\,,\ z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z}_1 = -2 \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 = |z_1|^2 = 4\,.$$

Logo, z_1 e z_2 são raízes do polinômio do 2º grau $x^2 + 2x + 4 \in \mathbb{R}[x]$.

Lembre que:
$(x - a)(x - b) =$
$x^2 - (a + b)x + ab$.

Fazendo a divisão euclidiana de $x^3 - 8$ por $x - 2$, temos

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \quad \text{e} \quad (x^3 - 8)^2 = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)^2.$$

Portanto,

$$-2x^9 + 32x^6 - 128x^3 = -2x^3(x^3 - 8)^2 = -2x^3(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)^2.$$

Esse polinômio de grau 9 tem duas raízes reais: a raiz 0 com multiplicidade 3 e a raiz 2 com multiplicidade 2. No conjunto dos números complexos temos, além dessas, as raízes $-1+\sqrt{3}i$ e $-1-\sqrt{3}i$, ambas com multiplicidade 2, porque $(x^2+2x+4)^2$ divide $f(x)$, mas $(x^2+2x+4)^3$ não divide $f(x)$. Contando as raízes com as suas multiplicidades, temos $3+2+2+2 = 9 = gr(f(x))$ raízes complexas.

De modo totalmente análogo ao conjunto $\mathbb{R}[x]$ dos polinômios com coeficientes reais, definimos o conjunto $\mathbb{C}[x]$ dos polinômios com coeficientes complexos:

$$\boxed{\mathbb{C}[x] = \{\, f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,|\, n \in \mathbb{N},\ a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}\,\}.}$$

Em $\mathbb{C}[x]$ estão definidas também duas operações: adição e multiplicação de polinômios.

Operamos com os polinômios de coeficientes complexos de modo similar às operações de polinômios com coeficientes reais.

Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, temos que $\boxed{\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x].}$

Agora, estamos prontos para apresentar o Teorema Fundamental da Álgebra, ou o Teorema de D'Alembert, demonstrado por Gauss de quatro maneiras diferentes.

Curiosidades sobre a vida e trabalhos de Jean le Rond D'Alembert:

era filho ilegítimo de uma aristocrata e foi abandonado por ela nos degraus da Igreja St. Jean Le Rond (daí a origem de seu nome), mas seu pai conseguiu que uma família humilde o acolhesse, deu apoio à sua educação e deixou, com a sua morte em 1726, dinheiro suficiente para a sua instrução.

D'Alembert e Euler trocaram correspondência sobre tópicos de interesse mútuo, entre 1750 e 1760, e D'Alembert publicava seus trabalhos na Academia de Berlim. Foi convidado para ser presidente da Academia e recusou, em respeito a Euler. De 1761 a 1780, época em que esteve estremecido com Euler, publicou seus trabalhos em 8 volumes como *Opuscules Mathématiques.*

Em linguagem matemática, a expressão *a menos de* é largamente utilizada. Exprime a idéia de: salvo ou excetuada.

Teorema 21.1 (Teorema Fundamental da Álgebra)
Todo polinômio $f(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como:

$$\boxed{f(x) = a(x-\beta_1)^{r_1} \cdots (x-\beta_t)^{r_t},\ \text{onde}\, r_1 + \cdots + r_t = n,}$$

com $a, \beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e $\beta_j \neq \beta_k$, se $j \neq k$.

As raízes distintas de $f(x)$ são $\beta_1, \ldots \beta_t$, e o natural r_j, $j = 1, \ldots, t$ é a multiplicidade da raiz β_j.

Como $gr(f(x)) = r_1 + \cdots + r_t$, segue que todo polinômio $f(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos tem exatamente n raízes em $\mathbb{C}$, contadas com as suas multiplicidades.

Note que a é o coeficiente líder de $f(x)$.

Exemplo 8

Para ilustrar esse resultado, considere os polinômios dos Exemplos 6 e 7.

Em $\mathbb{C}[x]$, temos que:

$$x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2}i)(x + \sqrt[4]{2}i),$$

sendo todas as suas raízes simples, e

$$-2x^9 + 32x^6 - 128x^3 = -2x^3(x-2)^2\Big(x - (-1 + \sqrt{3}i)\Big)^2\Big(x - (-1 - \sqrt{3}i)\Big)^2,$$

sendo uma raiz tripla e as outras três duplas.

Vejamos algumas conseqüências do Teorema 21.1.

Corolário 21.2

Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e β é uma raiz complexa não-real de $f(x)$, então $\overline{\beta}$ também é raiz de $f(x)$. Além disso, as raízes β e $\overline{\beta}$ têm a mesma multiplicidade.

Demonstração: Pela Proposição 21.1, itens (i) e (iv), β e $\overline{\beta}$ são raízes de $f(x)$, $\beta \neq \overline{\beta}$ e $s(x) = x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$ divide $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$.

Seja $r \geq 1$ o maior natural, tal que $s(x)^r$ divide $f(x)$, mas $s(x)^{r+1}$ não divide $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$. Então, existe $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$f(x) = s(x)^r q(x) \text{ e } s(x) \text{ não divide } q(x) \text{ em } \mathbb{R}[x].$$

Como $s(x) = (x - \beta)(x - \overline{\beta})$ e $s(x)$ não divide $q(x)$ em $\mathbb{R}[x]$, então $q(\beta) \neq 0$ e $q(\overline{\beta}) \neq 0$. Assim,

$$f(x) = (x - \beta)^r (x - \overline{\beta})^r q(x)$$

e r é a multiplicidade de β e de $\overline{\beta}$ em $f(x)$. □

Corolário 21.3

Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem uma raiz real.

Demonstração: As raízes complexas não-reais ocorrem aos pares com a mesma multiplicidade, como o polinômio tem grau ímpar, tem de existir, pelo menos, uma raiz real. □

Estamos interessados apenas nos polinômios com coeficientes reais. Vamos enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra para os polinômios com coeficientes reais.

Teorema 21.2 (Teorema Fundamental da Álgebra em $\mathbb{R}[x]$)

Todo polinômio $f(x)$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como:

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_t)^{r_t}(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{n_s},}$$

onde $a \neq 0$ é o coeficiente líder de $f(x)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ são as raízes reais distintas de $f(x)$; $x^2 + b_1 x + c_1, \ldots, x^2 + b_s x + c_s$ são polinômios distintos com ${b_j}^2 - 4c_j < 0$, para todo $j = 1, \ldots, s$, e $r_1 + \cdots + r_t + 2n_1 + \cdots + 2n_s = n$.

Os polinômios com coeficientes reais da forma $x - a$ ou $x^2 + bx + c$ com $\Delta = b^2 - 4c < 0$ são chamados de *polinômios mônicos irredutíveis de* $\mathbb{R}[x]$, pois seus únicos divisores mônicos em $\mathbb{R}[x]$ são 1 e o próprio polinômio. Esses polinômios em $\mathbb{R}[x]$ desempenham o mesmo papel que os números naturais

Quer saber mais sobre Gauss?

A habilidade de Gauss com a Matemática foi percebida por seu professor quando ele tinha sete anos. Ao ser perguntado qual a soma dos números naturais de 1 a 100, Gauss imediatamente respondeu: são 50 pares de números somando 101!

Gauss publicou, dois anos após a obtenção do seu doutorado, um dos clássicos da literatura matemática, *Disquisitiones Arithmeticae* e contribuiu em diversas áreas: Geometria Diferencial (no estudo das superfícies com suas idéias sobre curvatura e seu interesse sobre as geodésicas); Teoria dos Números; Análise Matemática (apresentou critérios de convergência de séries) e Astronomia.

Por que o *Disquisitiones Arithmeticae* é um dos clássicos da literatura matemática?
Nessa obra aparecem: os conceitos de congruência de inteiros e classe de restos; uma demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética e números da forma

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\},$$

hoje conhecidos como os inteiros de Gauss.

primos têm em $\mathbb{Z}$. A decomposição de um polinômio não-constante na forma do teorema anterior é dita a *decomposição em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$.

Exemplo 9

Vamos determinar a decomposição de $f(x) = 3x^8 - 3$ em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$.

Lembrando do produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, temos

$$x^8 - 1 = (x^4-1)(x^4+1),\ x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$$

e

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Combinando essas decomposições, obtemos:

$$f(x) = 3(x^8-1) = 3(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

Não esqueça:

Se $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e seu grau é maior ou igual a 2, então $f(x)$ é divisível por algum polinômio do tipo $x-a$ ou x^2+bx+c com $b^2-4c<0$.

Agora devemos fatorar x^4+1 (Veja a observação na margem).

As raízes em $\mathbb{C}$ desse polinômio são as raízes complexas quartas de -1. Vamos determiná-las. O argumento de -1 é π. Assim, as raízes complexas quartas de -1 têm argumentos $\phi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4} = \frac{\pi(2k+1)}{4}$, $k = 0,1,2,3$ e módulo $\rho = \sqrt[4]{|-1|} = \sqrt[4]{1} = 1$. Logo,

$$\begin{array}{lcl}
\phi_0 = \dfrac{\pi}{4} & \Longrightarrow & z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\
\phi_1 = \dfrac{3\pi}{4} & \Longrightarrow & z_1 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\
\phi_2 = \dfrac{5\pi}{4} & \Longrightarrow & z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\
\phi_3 = \dfrac{7\pi}{4} & \Longrightarrow & z_3 = \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i
\end{array}$$

Note que $\overline{z_0} = z_3$ e $\overline{z_1} = z_2$. Portanto, z_0 e z_3 são raízes do polinômio $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ e z_1 e z_2 são raízes do polinômio $x^2 + \sqrt{2}x + 1$. Logo,

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \quad \text{e}$$
$$3x^8 - 3 = 3(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Observação:

Como você deve ter notado, uma estratégia para decompor polinômios $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ é obter as raízes complexas não-reais β e combiná-las com a sua conjugada $\overline{\beta}$, de modo a determinar os divisores de $f(x)$ do tipo x^2+bx+c com $b^2-4c<0$.

Resumo

Você aprendeu o Teorema Fundamental da Álgebra; a relacionar uma raiz β complexa não-real de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ com a sua divisibilidade pelo polinômio $x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}[x]$ e a fatorar polinômios em $\mathbb{R}[x]$ de grau $n \geq 1$ em produto de potências de fatores dos tipos $x - a$ e $x^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4c < 0$.

Exercícios

1. Faça o que se pede:

a. Determine o polinômio $f(x)$ de grau 3 com coeficientes reais e coeficiente líder 2, tal que -1 e $1 + i$ são raízes de $f(x)$.

b. Determine o polinômio $g(x)$ de grau 4 com coeficientes reais e coeficiente líder -1, tal que i e $3 - 4i$ são raízes de $f(x)$.

c. Determine a decomposição do polinômio $f(x)$ do item **a** em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$.

d. Determine a decomposição do polinômio $g(x)$ do item **b** em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$.

e. Determine todas as raízes complexas de $h(x)$ e dê a sua decomposição em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$, onde

$$h(x) = 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 10x^3 - 4x^2 + 5x - 3.$$

2. Determine todas as raízes reais e complexas não-reais, suas multiplicidades e dê a decomposição do polinômio em produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$:

a. $-x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 18x$.

b. $-2x^6 + 2$.

c. $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

d. $3x^{12} - 3$.

e. $6x^4 + 9x^3 + 9x - 6$.

f. $x^5 + x^4 + 5x^2 - x - 6$.

g. $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 36x - 18$.

h. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10$.

i. $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 10x + 30$.

j. $2x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 4$.

k. $x^5 - 9x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 36x - 10$.

l. $-x^3 + 28x + 48$.

m. $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18$.

Auto-avaliação

Nesta aula, combinamos a divisão sucessiva por potências de $x-\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, e a divisibilidade por potências de fatores do tipo $x^2 + bx + c$, onde $b, c \in \mathbb{R}$ e $\Delta = b^2 - 4c < 0$, para obter a decomposição de polinômios com coeficientes reais num produto de potências de fatores mônicos irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$.

Agora, duas perguntas importantes:

- Você sabe que as raízes complexas não-reais ocorrem aos pares?
- Além disso, sempre que β é raiz, com $\beta \neq \overline{\beta}$, $\overline{\beta}$ também é raiz e essas raízes dão origem aos fatores quadráticos mônicos com discriminante negativo?

Pode então prosseguir.

Terminamos o Módulo 3 e é hora de você refletir sobre todos os conceitos apresentados, além de procurar os tutores para esclarecer quaisquer dúvidas sobre polinômios com coeficientes reais. Não deixe para depois!
Os conhecimentos não aprendidos prejudicam o entendimento de outros tópicos.

Vamos agora estudar funções, usadas para modelar matematicamente os problemas cotidianos.

Módulo 4

Funções reais de variável real

> A natureza era para ele um livro aberto,
>
> cujas letras podia ler sem esforço ...
>
> Albert Einstein, falando sobre Isaac Newton

Chegamos ao módulo final do Pré-Cálculo. Aqui unificamos as noções e conceitos aprendidos nos módulos anteriores e apresentamos os fundamentos da teoria das funções reais de variável real.

Neste módulo abordamos as funções por vários pontos de vista complementares: a sua descrição como conceito matemático, o seu estudo analítico e a sua representação gráfica. No entanto, desde já devemos prestar atenção para o fato de que as funções são relações entre conjuntos, com propriedades bem determinadas. Seus gráficos são apenas representações visuais dessas relações. Em princípio, estudaremos as funções sob o ponto de vista mais geral possível, o das relações entre conjuntos. A nossa abordagem está baseada em situações do cotidiano que você certamente já experimentou. Posteriormente, voltamos a nossa atenção para as funções reais de variável real.
O estudo dessa classe de funções e as suas propriedades é um dos principais objetivos da Teoria do Cálculo.

Contudo, o enfoque moderno do conceito de função foi concebido graças ao desenvolvimento da Teoria de Conjuntos por *Cantor* e *Frege*, no final do século XIX. Porém, segundo registros de papiros egípcios, as funções estão intimamente ligadas às origens da Matemática e têm aparecido direta ou indiretamente nos grandes passos do desenvolvimento da Ciência.

Ao finalizar este módulo você terá familiaridade com as funções reais de variável real, será capaz de fazer uma primeira análise gráfica e estará apto para aprimorar o estudo dessa classe de funções nas disciplinas de Cálculo.

Referências

1. Pré-Cálculo Módulos 1 e 2.

2. Anton, H., *Cálculo*. Ed. Bookman, 6^a edição, 2000.

3. Spivak, M., *Calculus*. Ed. Reverté, 1970.

As funções

As funções são fundamentais em todas as áreas da Matemática. Dependendo do contexto em estudo, a função pode receber diversos nomes: homomorfismo, morfismo, transformação, operador, aplicação, homeomorfismo, homotopia, imersão, mergulho, movimento rígido etc. A nossa natureza é mesmo descrita e modelada matematicamente segundo Sistemas Dinâmicos envolvendo uma ou mais funções que descrevem trajetórias quando se trata de movimento, ou evolução quando se trata de interação entre processos. Isto é, as funções também têm vida e são os tijolos fundamentais com os quais os matemáticos vêm construindo e modelando o nosso mundo fisico.

§3. Funções

Nesta seção, apresentamos os conceitos fundamentais da *teoria das funções reais de variável real*.

A seção é dividida em quatro aulas. Na primeira aula (Aula 22), apresentamos os princípios para estabelecer uma relação funcional, motivando a nossa explanação com situações do nosso cotidiano.

Na segunda aula (Aula 23), abordamos a noção de função real de variável real e a sua representação gráfica, acompanhada de uma série de exemplos interessantes. Além disso, tratamos da importante questão de determinar quando um gráfico no plano representa uma função ou não.

Na Aula 24, aprenderemos a construir funções, a partir de funções conhecidas, usando as operações de adição e multiplicação definidas no conjunto dos números reais. Daremos ênfase às funções definidas por polinômios com coeficientes reais.

Finalmente, na Aula 25, aprenderemos a analisar funções definidas por fórmulas matemáticas.

Aula 22 – Princípios para construir uma função

Objetivos

- Entender a noção de função.
- Modelar situações do cotidiano com funções.
- Compreender os elementos necessários para definir uma função.
- Definir a noção de função real de variável real e definir o seu gráfico.

Se você parar e prestar atenção no mundo que o cerca irá descobrir muitas relações de associação e correspondência. Também poderá perceber que muitas situações, fatos e acontecimentos dependem, ou são conseqüência, de outros.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 6

Se você viajar de ônibus da cidade de Campos para o Rio de Janeiro, comprará um bilhete na rodoviária para embarcar num determinado ônibus. Eis a primeira associação: a você, como viajante, foi designado um ônibus, dentre todos aqueles que compõem a frota da companhia escolhida para realizar a viagem. O bilhete que você comprará possui um determinado código, indicando exatamente qual o lugar que você deverá ocupar dentro do ônibus. Eis outra associação: a você, como passageiro, foi designada uma dentre as várias poltronas do ônibus. Qualquer outro passageiro terá de ocupar outra poltrona, que também lhe será designada no momento de comprar o bilhete.

Exemplo 7

Por falar em ônibus, sabe-se que cada veículo automotor, seja ônibus, automóvel etc., possui um determinado código que o identifica e diferencia de outros similares a ele. Esse código, formado, em geral, por letras e números, é gravado numa placa metálica colocada na frente e na traseira dos veículos.

Aliás...
Use os seus conhecimentos sobre a Teoria da Contagem para determinar o número de possibilidades que uma placa pode ter, sabendo que o seu código é formado por 3 letras e 4 algarismos.

Exemplo 8

O que significa contar os elementos de um conjunto finito?

A contagem é também uma associação, que a cada conjunto finito faz corresponder *um único* número natural. Veja que um conjunto com cinco laranjas e um outro com cinco peras têm associado o mesmo número natural, o número cinco.

Além disso, observe que um conjunto finito dado não pode ser associado a dois números naturais distintos!

Exemplo 9

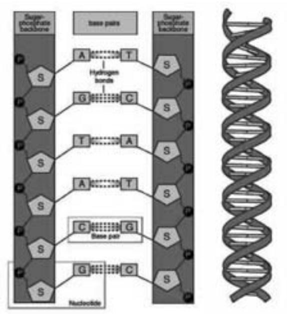


Figura 22.1: Formação do DNA.

Você é um ser único! De fato, a natureza, para distingui-lo dentre todos os outros seres humanos, associou-lhe um código genético, descrito pela cadeia de DNA (ácido desoxirribonucléico) do seu organismo. Assim, a natureza faz uma associação que a cada um dos seres humanos faz corresponder um único código genético. Observe que existem códigos genéticos que ainda não estão associados a ser humano algum. Contudo, as últimas descobertas da Engenharia Genética indicam que, num futuro não muito distante, poderemos ter dois seres humanos compartilhando o mesmo código genético.

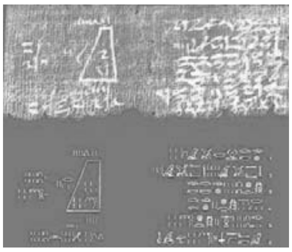


Figura 22.2: Papiro de Moscou.

Trecho do papiro de Moscou, traduzido em hieróglifos, onde se mostra o cálculo do volume do tronco de pirâmide. Este papiro data de 1850 a.C. e encontra-se em exibição no Museu de Moscou de Finas Artes. Veja mais sobre a Matemática contida nos papiros egípcios em `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian_papyri.html`

Exemplo 10

Os antigos egípcios desenvolveram métodos e tabelas para determinar o quadrado de uma quantidade numérica, a área de regiões retangulares e de seções circulares e volumes de paralelepípedos e cilindros.

Falemos agora de outro papiro que data da mesma época que o papiro de Ahmes, o papiro de Moscou. Este papiro descreve o procedimento usado pelos egípcios para calcular o volume de um tronco de pirâmide de base quadrangular. Esse procedimento faz corresponder a um tronco de pirâmide exatamente um número real não-negativo, o seu volume.

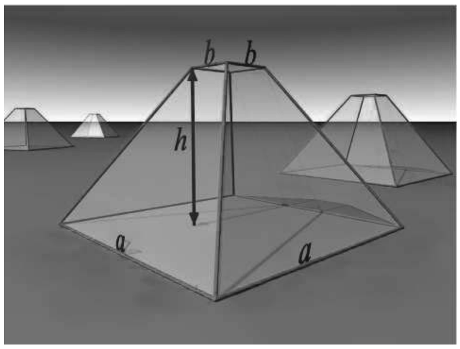


Figura 22.3: Volume de um tronco de pirâmide.

Mais precisamente, dadas as medidas

$a =$ lado da base inferior, $\quad b =$ lado da base superior $\quad$ e $\quad h =$ altura,

os egípcios descreveram o volume da pirâmide pela relação:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2).$$

Dessa maneira, os egípcios estabeleceram uma relação funcional que, a cada terna de números reais positivos (a, b, h) faz corresponder o número $V(a, b, h)$, exprimindo o volume da pirâmide de medidas a, b e h.

Exemplo 11

Quando você vai ao cinema, compra a entrada na bilheteria e a entrega ao fiscal para poder assistir à sessão. Entrando na sala do cinema, você estará perante um grave problema. Escolher um lugar para sentar!

Você certamente conseguirá uma poltrona vazia. No entanto, em geral, não há uma regra de associação específica que diga em qual poltrona você deverá sentar. Isto é, você não tem associada exatamente uma poltrona dentre todas as existentes na sala do cinema.

Dos exemplos acima, apenas o último não expressa uma *relação funcional*. Veja a definição que usamos atualmente para este conceito:

Definição 22.1 (Função)
Se A e B são dois conjuntos não-vazios, uma *função* f de A em B é uma associação, que a cada elemento x do conjunto A faz corresponder exatamente um elemento do conjunto B designado por $f(x)$ e chamado a *imagem* de x pela função f. Nessas condições, o conjunto A é chamado o *domínio* da função f (denotado por $\text{Dom}(f)$) e o conjunto B é chamado o *contradomínio* da função f.

A expresão $f(x)$ lê-se *f de x.*

A escrita

$$\boxed{f \,:\, A \longrightarrow B}$$

significa que f é uma função de A em B, ficando entendido que o conjunto A é o domínio e o conjunto B é o contradomínio da função f.

$f : A \longrightarrow B$ lê-se *f de A em B.*

Às vezes é necessário explicitar o processo da relação funcional. Para isto, escrevemos a imagem $f(x)$ de um elemento genérico x do domínio:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
lê-se
f é a função de A em B que a cada $x \in A$ associa (ou faz corresponder) $f(x) \in B$, ou que *leva x em $f(x)$*.

Segundo a definição anterior, se $y = f(x)$ é o elemento de B que é imagem do elemento x de A pela função $f : A \to B$, costumamos dizer que *y é função de x*. Dizemos também que y é a *variável dependente* e x é a *variável independente*, pois o valor (ou estado) de $y \in B$ é obtido mediante a correspondência dada pela função f a partir do elemento escolhido $x \in A$. Também na escrita $f(x)$ dizemos que x é o *argumento* da função f.

Outro conceito importante envolvido na noção de função é *o conjunto imagem da função* ou, abreviadamente, *a imagem da função*. Se $f : A \to B$ é uma função com domínio A e contradomínio B, a imagem de f é o conjunto

$$\boxed{f(A) = \{f(a) \,|\, a \in A\} \quad \text{e} \quad f(A) \subset B}$$

Note que a imagem $f(A)$ da função f é um subconjunto do contradomínio B. Isto é, a imagem da função f é o subconjunto do contradomínio cujos elementos são imagens de elementos do domínio.

Não confunda $f(a)$ com $f(A)$

Se $f : A \to B$ é uma função, devemos ter cuidado para não confundir a imagem por f de um elemento a do domínio A, que denotamos por $f(a)$, com a imagem da função f, que denotamos $f(A)$. Observe que, de fato, $f(a)$ é um elemento do conjunto $f(A)$.

No Exemplo 6, temos duas funções. Na primeira, o domínio é o conjunto formado por todos os passageiros que viajam da cidade de Campos para o Rio de Janeiro e o contradomínio é formado por todos os ônibus da companhia de transporte rodoviário que fazem o trajeto de Campos para o Rio de Janeiro. A função, nesse caso, é a associação que a cada passageiro faz corresponder um determinado ônibus.

Ainda no Exemplo 6, temos outra função, cujo domínio é formado pelo conjunto dos passageiros que irão embarcar num determinado ônibus e cujo contradomínio é o conjunto formado pelas poltronas daquele ônibus. Nesse caso, a função associa a cada passageiro uma determinada poltrona. O domínio dessa função é o conjunto formado pelos passageiros do ônibus, o contradomínio é o conjunto das poltronas do ônibus e a imagem da função consiste das poltronas ocupadas por algum passageiro (lembre-se que um ônibus pode fazer o trajeto mesmo sem ter todas as suas poltronas ocupadas).

No Exemplo 7, temos a função que a cada veículo automotor faz corresponder um código de identificação gravado numa placa metálica. O domínio desta função consiste de todos os veículos a motor. O contradomínio consiste de todos os possíveis códigos de identificação (números de placas) e a imagem consiste exatamente daqueles códigos usados em algum veículo (veículos emplacados).

Olhando para o Exemplo 8 vemos outra função. O domínio desta função é o conjunto cujos *elementos* são os conjuntos finitos e cujo contradomínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. A correspondência que define essa função associa a cada conjunto finito exatamente um número natural, a saber, a *cardinalidade do conjunto*, isto é, o número de elementos do conjunto. Nesse caso, o domínio consiste de todos os possíveis conjuntos finitos, o contradomínio consiste de todos os números naturais e a imagem é exatamente igual ao contradomínio pois, para cada número natural n, há (pelo menos) um conjunto com n elementos.

No Exemplo 9, vemos outra função cujo domínio é formado por todos os seres vivos e cujo contradomínio é formado por todos os possíveis códigos do ácido desoxirribonucléico (DNA). A correspondência que caracteriza a função consiste em associar a cada ser vivo o código do seu DNA.

Tente descobrir, neste caso, qual é o domínio da função, qual é o contradomínio e qual é a imagem.

Finalmente, no Exemplo 10 vemos como a noção de função estava já presente nas primeiras manifestações da Matemática. Embora os egípcios e babilônios não tratassem das funções como é feito hoje em dia, eles tinham a noção intuitiva de correspondência. Logo, as funções existem há, pelo menos, 4.000 anos.

O conceito de função só teve a sua apresentação na forma atual graças ao desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, no final do século XIX. Esta Teoria também permite uma melhor visualização do conceito de função por meio de diagramas de conjuntos.

René Descartes, por volta de 1637, usou, pela primeira vez e por escrito, o termo *função* para se referir a *qualquer potência da variável x*. Posteriormente, *Gottfried W. Leibniz*, por volta de 1692, concebe uma função como qualquer quantidade associada a uma curva (podendo ser as coordenadas de um ponto pertencente à curva, o seu comprimento, a própria curva como um todo etc.).
Ao longo do tempo, outros matemáticos adaptaram e modificaram o conceito de função segundo as necessidades da sua pesquisa. Dentre estes matemáticos, *Leonhard Euler* difundiu a notação $f(x)$ para designar uma função no seu tratado *Introductio in Analysin Infinitorum*, em 1748.

Teoria de Conjuntos
Volte e revise no Módulo 1 de Matemática Discreta, os fundamentos da Teoria de Conjuntos.

Para representar uma função $f : A \to B$, usando esquemas de conjuntos, idealizamos o domínio A e o contradomínio B de f em esquemas gráficos de conjuntos. Os elementos de A são *levados* em elementos de B, por meio de flechas que representam a correspondência definida pela função. No esquema da **Figura 22.4** vemos como os elementos do conjunto A são associados a exatamente um elemento do conjunto B, conforme a definição de função.

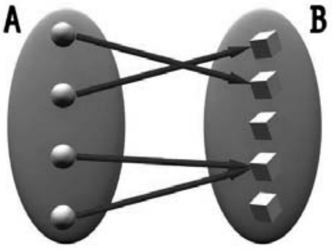


Figura 22.4: $f : A \to B$ é uma função.

Observe que, pela definição de função, mais de um elemento do conjunto A pode ser associado ao mesmo elemento do conjunto B.

Para ter uma idéia de como isto acontece regularmente, pense no Exemplo 6, onde A é o conjunto formado por todos os passageiros que viajam da cidade de Campos para o Rio de Janeiro, e B é o conjunto dos ônibus da frota da companhia que faz o trajeto. Em geral, mais de um passageiro deverá embarcar no mesmo ônibus.

De fato, se o conjunto A dos passageiros tiver menos de trinta pessoas desejando fazer a viagem num mesmo horário, não tem sentido a companhia disponibilizar mais de um ônibus, pois todos os passageiros podem viajar num mesmo ônibus.

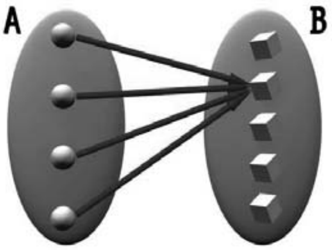


Figura 22.5: Função constante.

Na **Figura 22.5** representamos uma função f de A em B, que leva todos os elementos do domínio A no mesmo elemento do contradomínio B. Uma função com esta propriedade é chamada *função constante*.

Mais precisamente, se $b \in B$ é um elemento fixo, a função

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & b \end{array}}$$

é chamada a *função constante de valor b*. Esta função é dada por $f(x) = b$, qualquer que seja o elemento x de A,

Atenção!

Nem todo diagrama de conjuntos e flechas representa uma função.

No diagrama da **Figura 22.6** existe um elemento do conjunto A associado a *dois elementos distintos* do conjunto B. Esta associação **não é uma função**.

Isto acontece no Exemplo 11: existe ambigüidade na escolha dos elementos de B associados aos elementos de A.

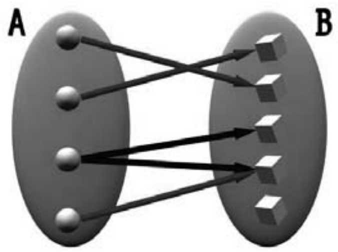


Figura 22.6: Relação que **não** é função.

No Módulo 2, você viu muitos exemplos de relações que não são funções. Na próxima aula voltaremos a eles.

Antes de continuarmos com outros exemplos, é importante você observar que para definir uma função são indispensáveis os seguintes ingredientes:

> Conceitos necessários para definir uma função
>
> • Dois conjuntos não-vazios: o domínio e o contradomínio da função.
>
> • Uma relação de correspondência f que a cada elemento do domínio associa exatamente um elemento do contradomínio.

Ao longo do tempo, as funções vêm sendo uma ferramenta fundamental para modelar matematicamente o universo que nos rodeia. Isto é feito, na maior parte das vezes, associando quantidades numéricas a fenômenos que desejamos estudar.

Exemplo 12

Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a partir de 1940 a população urbana do Brasil começou a crescer. Vários foram os fatores que levaram os habitantes das áreas rurais para as grandes cidades, dentre esses destacam-se o enorme desenvolvimento industrial nas cidades e a mecanização da agricultura.

Dessa forma, os habitantes da zona rural passam a procurar nas cidades melhores condições de vida, empregos melhor remunerados, uma melhor assistência médica e educacional. No entanto, isso também traz diversos problemas. As cidades crescem sem o devido planejamento, faltam serviços básicos, aumentam os índices de desemprego, os problemas ambientais e a violência.

Vamos aos números! Na tabela a seguir, fazemos uma relação da fração da população brasileira que corresponde aos habitantes das zonas rurais e urbanas no país desde 1940:

Ano	1940	1950	1960	1970	1980	1991
Pop. Rural	$0,69$	$0,64$	$0,55$	$0,44$	$0,32$	$0,24$
Pop. Urbana	$0,31$	$0,36$	$0,45$	$0,56$	$0,68$	$0,76$

Assim, em 1950, de cada 100 habitantes no Brasil, 64 viviam na zona rural e 36 na zona urbana. Observe o contraste com 1991, ano em que de cada 100 brasileiros, apenas 24 moravam na zona rural e 76 na zona urbana. Os números hoje em dia somente podem ser piores.

A partir da tabela de dados acima, podemos definir várias funções.

Por exemplo, a função f cujo domínio A é o conjunto formado pelos anos dados na tabela, cujo contradomínio B é o conjunto dos números reais não-negativos e a cada ano faz corresponder a fração que representa a porcentagem da população rural do Brasil nesse ano.

Nesta função, temos que $f(1940) = 0,69$, $f(1960) = 0,55$ etc.

Podemos fazer o mesmo definindo uma função g de iguais domínio e contradomínio que a função f, mas a cada ano fazendo corresponder a fração da população brasileira que habita na zona urbana.

Por exemplo, $g(1950) = 0,36$ e $g(1991) = 0,76$.

As imagens destas duas funções são os subconjuntos de números reais dados por

$$f(A) = \{0,69\,,0,64\,,0,55\,,0,44\,,0,32\,,0,24\}$$
$$g(A) = \{0,31\,,0,36\,,0,45\,,0,56\,,0,68\,,0,76\}.$$

Este é o nosso primeiro exemplo de funções cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Esta classe de funções ocupará a nossa energia pelo resto do Módulo e nas disciplinas de Cálculo.

Exercício

Escreva as funções f e g descritas ao lado nas formas

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} g: & A & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

Definição 22.2 (Funções reais de variável real)
Uma função real de variável real é uma função, tal que o seu domínio e o seu contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Nos exemplos que apresentamos até agora, vimos que é possível descrever uma relação funcional com a linguagem do nosso cotidiano, através de expressões matemáticas ou pela observação de dados obtidos por medições de fenômenos naturais.

Vejamos agora como descrever as funções por meio de informação gráfica.

Exemplo 13

Num dos dias mais quentes do verão carioca, foi feito um registro da temperatura em um termômetro de rua a cada hora. A leitura foi feita começando às 7h e terminando às 22h. Os dados foram colocados numa tabela, confrontando a hora, designada pela variável t, e a temperatura (medida em graus centígrados), designada pela variável T.

t	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	31	34	37	39	40	41	42	41	40	39	38	38	36	33	30	30

Temos definida uma função, com domínio $\{7, 8, 9, 10, 11, \ldots, 22\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que a cada hora t entre 7 e 22 faz corresponder a temperatura $T(t)$ que marca o termômetro nesse instante.

$$\begin{array}{rccl} T: & \{t \in \mathbb{N} \,|\, 7 \leq t \leq 22\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & T(t) \end{array} .$$

A imagem desta função é o conjunto

$T(\{t \in \mathbb{N} \,|\, 7 \leq t \leq 22\}) = \{30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$.

Assim, durante o período da observação, a maior temperatura foi registrada às 13h ($T(13) = 42$ graus centígrados) e a menor temperatura foi registrada às 21h e às 22h ($T(21) = T(22) = 30$ graus centígrados).

Para elaborar a representação gráfica, consideramos um sistema de coordenadas cartesianas. Representamos a variável independente no eixo horizontal e a variável dependente no eixo vertical. As unidades nos eixos coordenados são ajustadas de modo a permitir uma visualização melhor dos dados. Compare nas **Figuras 22.7** e **22.8** duas representações da nossa tabela de temperaturas.

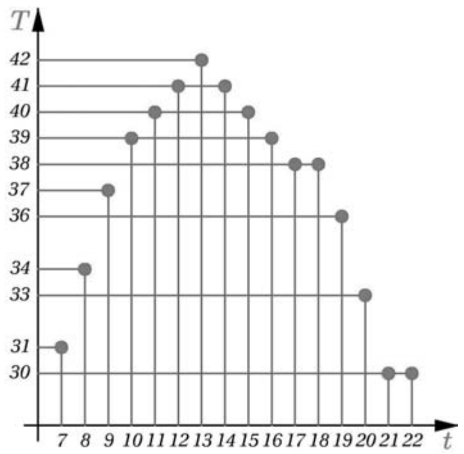


Figura 22.7: Gráfico de temperaturas em pontos.

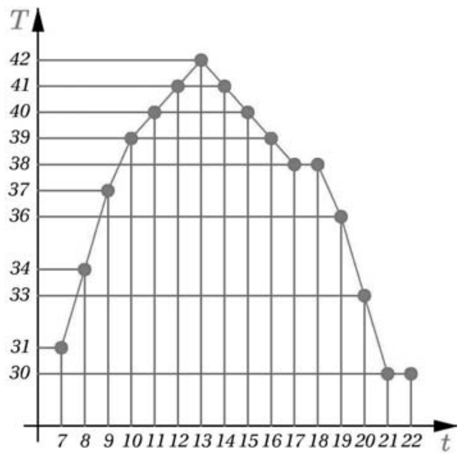


Figura 22.8: Gráfico poligonal de temperaturas.

Na **Figura 22.7** temos uma representação fiel da nossa tabela de temperaturas, na qual ilustram-se as temperaturas exatas nas horas em que aconteceram. Na **Figura 22.8** temos a mesma representação, no entanto, os pontos que ilustram os pares ordenados $(t, T(t))$ foram ligados por segmentos de reta. Este é chamado um gráfico poligonal. A informação da **Figura 22.7** foi aumentada pelos segmentos de reta, fazendo pensar que no espaço de tempo de uma hora, a variação de temperatura ocorreu segundo os pontos do segmento correspondente.

Este tipo de gráfico é fictício e enganoso pois, no registro de temperaturas feito na tabela, em nenhum momento aparece a temperatura que aconteceu, por exemplo, às 13h 20min, ou às 9h 45min. Mais ainda, não podemos afirmar que a maior temperatura do dia tenha sido 42 graus centígrados, esta é apenas a maior temperatura observada no registro e nada garante que pouco antes ou pouco depois das 13h a temperatura tenha sido de fato maior do que 42 graus!

Outra representação que é muito praticada em jornais e revistas, é o gráfico de barras da **Figura 22.9**. Nesta figura, temos a impressão de que a temperatura se mantém constante pelo espaço de uma hora para então pular repentinamente, aumentando ou diminuindo o seu valor, o que, bem sabemos, não acontece.

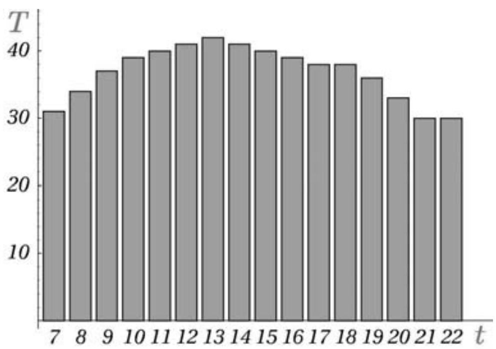


Figura 22.9: Gráfico de barras de temperaturas.

Observe que
Uma representação gráfica exata da temperatura num intervalo de tempo qualquer precisaria de um registro contínuo da temperatura, o que é fisicamente impraticável.
Mesmo assim, esses tipos de representações são bastante úteis e delas podemos fazer uma análise qualitativa satisfatória da nossa realidade.

Nicole d'Oresme
1323 - 1382, França
Inventou as coordenadas na Geometria antes que Descartes, encontrando a equivalência lógica entre a tabela de valores de uma relação funcional e o gráfico. Foi o primeiro a usar expoentes fracionários, fez enorme rejeição à Teoria Estacionária da Terra, proposta por Aristóteles e, 200 anos antes de Copérnico, sugeriu uma teoria em que a Terra estivesse em constante movimento.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Oresme.html`

As idéias iniciais sobre essa forma de representar as funções por meio de **gráficos** apareceram pela primeira vez no século XIV, quando *Nicole d'Oresme* concebeu a visualização de certas leis naturais colocando num gráfico a variável dependente em função da independente. Oresme certamente influenciou as idéias de Descartes sobre a criação dos sistemas de coordenadas, que ele mesmo usara.

De modo geral, temos a seguinte definição:

Definição 22.3 (Gráfico de uma função real de variável real)
Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real, então o gráfico de f é o subconjunto do plano formado por todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, onde $x \in A$. Isto é,

$$\boxed{\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}}$$

A representação gráfica de uma função é muito importante, pois é a partir dela que obtemos informações qualitativas sobre a função que, nas aplicações, nos permite prever resultados, tomar decisões, estimar comportamentos etc. A próxima aula será dedicada ao estudo e representação gráfica de algumas funções elementares e ao problema de determinar quando um gráfico no plano representa de fato o gráfico de uma função real de variável real.

Resumo

Nesta aula estabelecemos o conceito de função e mostramos as condições básicas para a construção de uma relação funcional. Vimos também que existem relações que não são funções. Ilustramos como o conceito de função está presente no nosso cotidiano e definimos a noção de função real de variável real e a sua representação gráfica.

Exercícios

1. Sabe-se que a Terra dá uma volta completa ao redor do Sol em 365 dias e 6 horas, isto é, em 8.766 horas. Durante o ano, a Terra, seguindo uma órbita elíptica, tendo o Sol num dos focos, se afasta e se aproxima dele, dando origem às estações do ano. Devido à inclinação do eixo de rotação, as estações acontecem de maneira inversa nos hemisférios norte e sul. Assim, quando a Terra está mais longe do Sol, acontece o verão no hemisfério norte e o inverno no hemisfério sul. Quando a

Terra está mais próxima do Sol, acontece o verão no hemisfério sul e o inverno no hemisfério norte.

No dia 21 de dezembro é quando a Terra está mais próxima do Sol e acontece o solstício de verão do hemisfério sul, ou *solstício de verão austral*. A distância da Terra ao Sol é de aproximadamente $147,06$ milhões de quilômetros. Este ponto é também chamado de solstício de inverno do hemisfério norte, ou *solstício de inverno boreal*.

Equinócio
Procure saber o significado do termo *equinócio*, relacione a sua pesquisa com o Exercício **1**.

O dia 21 de junho é quando a Terra está mais distante do Sol. Acontece o solstício de verão do hemisfério norte e a distância entre estes corpos celestes é de $152,211$ milhões de quilômetros.

Descreva como poderia ser usada uma função para modelar a distância. Diga qual seria o domínio, o contradomínio e a imagem da sua função, assim como os valores mínimo e máximo atingidos na imagem.

2. Descreva, usando uma função, como estão relacionados os signos do Zodíaco com o tempo ao longo do ano. Consulte um jornal se achar necessário.

3. Estabeleça uma linha do tempo em anos com os acontecimentos mais importantes na sua vida. Construa uma relação que a cada ano faz corresponder um determinado acontecimento. Você obteve uma função?

Proceda agora de maneira inversa. Construa uma relação que a cada acontecimento faz corresponder o ano em que ele ocorreu. Você obteve uma função?

Justifique as suas respostas.

4. Volte aos gráficos de temperaturas (**Figuras 22.7** e **22.8**) do Exemplo 13 para responder às seguintes perguntas:

a. A que horas a temperatura foi de 40 graus centígrados?

b. A que horas a temperatura foi a menor do período de observação?

c. Quando a temperatura se manteve acima dos 37 graus centígrados?

d. Entre que horas a temperatura só aumentou?

e. Entre que horas a temperatura só diminuiu?

f. Qual foi a diferença entre a maior e a menor temperaturas registradas durante o período?

g. Segundo as observações realizadas, a temperatura atingiu em algum momento 43 graus centígrados? Atingiu menos de 30 graus centígrados?

5. Se você já fez alguma vez uma análise completa do seu estado de saúde, ou seja um *check up*, é provável que, dentre os exames realizados tenha sido feito um *eletrocardiograma*. Um eletrocardiograma é apenas um registro gráfico das correntes elétricas produzidas pela atividade do músculo cardíaco (coração) com respeito ao tempo.

Figura 22.10: Eletrocardiograma: pessoa saudável.

Figura 22.11: Eletrocardiograma: pessoa doente.

a. Um eletrocardiograma é o gráfico de uma função? Caso a sua resposta seja afirmativa, diga qual o domínio e qual o contradomínio.

b. Quando um médico analisa um eletrocardiograma, ele procura

( ) números e valores no gráfico?

( ) uma fórmula que indique exatamente como fazer o gráfico?

( ) um padrão de repetição cíclica no gráfico?

( ) uma desculpa para elevar o preço da consulta?

6. Faça os gráficos de pontos, poligonal e de barras das funções f e g do Exemplo 7.

Auto-avaliação

Você entendeu bem o conceito de função? Sabe quais são os elementos necessários para a construção de uma função? Fez sem dificuldade todos os exercícios da aula? Compreendeu bem o que é uma função real de variável real e a sua representação gráfica? Se ainda estiver com dúvidas, releia a aula e procure os tutores. Nas próximas aulas, você conhecerá mais exemplos de funções reais de variável real.

Aula 23 – Gráficos de funções reais de variável real

Objetivos

- Compreender analiticamente as funções reais de variável real.
- Entender a representação gráfica das funções reais de variável real.
- Apreender as condições para que o gráfico de uma curva seja o gráfico de uma função numérica.

Conceitos:
Números reais, curvas planas e a definição de função.

Como você viu nos exemplos da aula anterior, para fazermos modelos matemáticos da nossa realidade associamos quantidades numéricas aos acontecimentos, fatos e objetos que desejamos estudar ou analisar. Esta maneira de proceder é seguida desde a época dos egípcios e babilônios motivados pelas necessidades de medir, estimar e calcular.

Nesta aula e no resto do módulo, abordaremos exclusivamente o aspecto matemático das funções reais de variável real, com ênfase nas suas representações analítica e gráfica.

> Nota importante
> Daqui em diante, usaremos o termo *função* em vez de *função real de variável real*.

Começamos o nosso estudo com uma classe muito importante de funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Essas funções são chamadas *seqüências numéricas*.

Definição 23.1 (Seqüências numéricas)
Uma *seqüência numérica* é uma função que tem por domínio o conjunto $\mathbb{N}$ e por contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, toda seqüência numérica é uma função real de variável real,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n) \end{array}}$$

Costumamos escrever a imagem $f(n)$ de um número natural $n \in \mathbb{N}$ como f_n, $\{f_n\}$ ou $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em vez de $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

O termo geral f_n de uma seqüência $\{f_n\}$ pode ser dado por meio de fórmulas e relações (ou expressões matemáticas) envolvendo n, que dizem exatamente como calcular f_n para cada número natural n.

A representação gráfica das seqüências numéricas é feita marcando, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos cujas abscissas são os números naturais n e cujas ordenadas correspondem ao valor f_n associado a cada n. Deste modo, o gráfico da seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\boxed{\mathrm{Graf}(f) = \{(n, f_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}\,.}$$

Exemplo 6

Seqüência de termo geral $a_n = 3$.

A seqüência cujo termo geral é $a_n = 3$ é a função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, a cada $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder o número $a(n) = 3$. Temos assim uma função constante de valor 3.

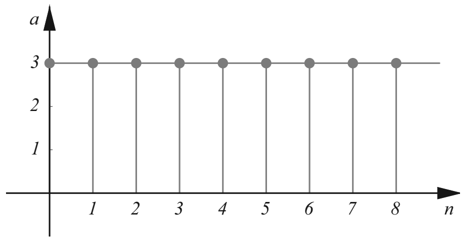


Figura 23.1: Seqüência constante $a_n = 3\,,\ n \in \mathbb{N}$.

A imagem da função a é o conjunto unitário $a(\mathbb{N}) = \{a(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{3\}$ e a sua representação gráfica é mostrada na **Figura 23.1**.

Exemplo 7

Seqüência de termo geral $b_n = n^2$.

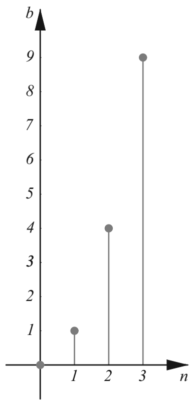


Figura 23.2: Seqüência b_n.

A seqüência de termo geral $b_n = n^2$ é a função $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, a cada $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder o seu quadrado. Podemos construir uma tabela, como faziam os babilônios, confrontando os valores n com $b(n) = b_n = n^2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
b_n	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...

A imagem desta função é o conjunto infinito

$$b(\mathbb{N}) = \{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\} \subset \mathbb{N}.$$

A tabela acima está incompleta, faltando uma infinidade de termos. No entanto, conhecemos a lei de formação dos valores b_n, o que é suficiente para conhecer a seqüência.

Exemplo 8

Seqüência de termo geral $c_n = \sqrt{n}$.

Esta seqüência é a função $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, a cada $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder a sua raiz quadrada, $\sqrt{n}$.

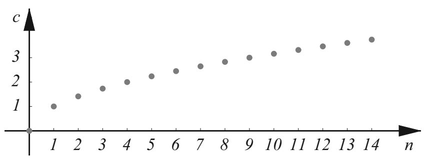


Figura 23.3: Gráfico da seqüência $\{c_n\}$

Exemplo 9

Seqüência de termo geral $d_n = \begin{cases} \pi \,, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot d_{n-1} + \pi \,, & \text{se } n > 0 \,. \end{cases}$

Esta seqüência é a função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que faz corresponder o número π ao natural $n = 0$ e o número $\frac{1}{2} \cdot d_{n-1} + \pi$ ao natural $n > 0$. Vejamos como são determinadas as imagens dos naturais pela função d na seguinte tabela:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
d_n	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{8}\pi$	$\frac{31}{16}\pi$	$\frac{63}{32}\pi$	$\frac{127}{64}\pi$	$\frac{255}{128}\pi$	$\frac{511}{256}\pi$	$\frac{1023}{512}\pi$	$\frac{2047}{1024}\pi$	...

Uma relação como esta é chamada recursiva, pois os valores da função para $n > 0$ são determinados a partir dos valores dados aos naturais menores do que n. Dessa forma, a função descreve um processo que evolui conforme n aumenta, sendo impossível determinar de maneira imediata o valor d_n, para $n > 0$, sem antes ter determinado o valor anterior d_{n-1}.

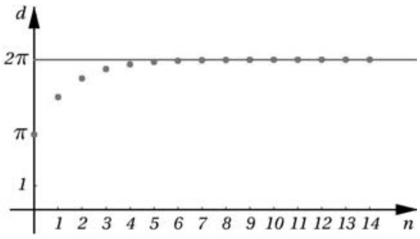


Figura 23.4: Gráfico da seqüência $\{d_n\}$.

Veja na **Figura 23.4** os pontos (n, d_n) do gráfico da seqüência d_n para $n = 0, 1, \ldots, 14$. Observe como os valores d_n vão ficando cada vez mais próximos de 2π conforme n aumenta.

Mais ainda, verifica-se que $d_n < d_{n+1} < 2\pi$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, a distância de d_n a 2π (lembre que esta distância é igual a $|d_n - 2\pi|$) vai diminuindo e fica muito próxima de zero conforme n aumenta. Veja o **Exercício 2**.

Para saber mais

Relações recursivas como a mostrada pela seqüência d_n são de grande importância para modelar matematicamente processos evolutivos. Pense por exemplo que n é uma variável que representa o tempo (medido em segundos, ou minutos, ou anos etc) e que d_n mede uma característica de estado de um processo no instante n. A relação recursiva indica que o estado do processo no instante n depende de como o processo se encontra no tempo $n-1$. Este tipo de processo é chamado *sistema com retardo 1*, pois o estado no tempo n depende apenas de *um* estado anterior. Os sistemas com retardo são usados para modelar situações biológicas, de comportamento econômico etc., e são base de modernas teorias de aplicação tecnológica imediata, como a *Teoria de Autômatos Celulares*.

O gráfico de uma função

Como sabemos, o gráfico de uma função $f : A \to \mathbb{R}$ consiste de todos os pontos do plano de coordenadas $(x, f(x))$, onde x varia no domínio A de f. Acabamos de ver que quando o domínio A é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, e portanto a função é uma seqüência, esboçar o gráfico é uma tarefa mecânica e ordenada. Marcamos os pontos de abscissa n e ordenada $f(n)$ começando com $n = 0$, depois com $n = 1$, $n = 2$ e assim sucessivamente.

No entanto, se o domínio A da nossa função não é $\mathbb{N}$ e sim um intervalo de $\mathbb{R}$, esse procedimento não pode ser realizado, pois é impossível percorrer "todos" os números reais x de um intervalo da reta para calcular $f(x)$. O que é feito na prática, para contornar essa dificuldade, é determinar o valor $f(x)$ para alguns valores x do domínio da função, localizar os pontos $(x, f(x))$ no sistema de coordenadas e traçar curvas ligando esses pontos. É claro que, quantos mais pontos sejam determinados, melhor será a nossa idéia sobre a forma do gráfico da função.

Observe que, a partir da definição do gráfico de uma função, a reta vertical que passa por um ponto qualquer do domínio da função deverá ter exatamente um ponto em comum com o gráfico da função. Este é o chamado critério da vertical:

> Critério da vertical
> No plano de coordenadas cartesianas, uma curva é o gráfico de uma função se, e somente se, toda reta vertical intersecta a curva em nenhum ou em exatamente um ponto.

Exemplo 10

A equação do círculo $\mathcal{C}$ de centro na origem e raio 1 é $x^2+y^2=1$, onde (x,y) são as coordenadas de um ponto do círculo. A relação que a cada $x \in [-1,1]$ associa um número y de modo que (x,y) pertença ao círculo $\mathcal{C}$, não define uma função.

De fato, segundo o critério da vertical, o círculo não pode ser o gráfico de uma função, pois existem retas verticais que intersectam a curva em mais de um ponto (**Figura 23.5**).

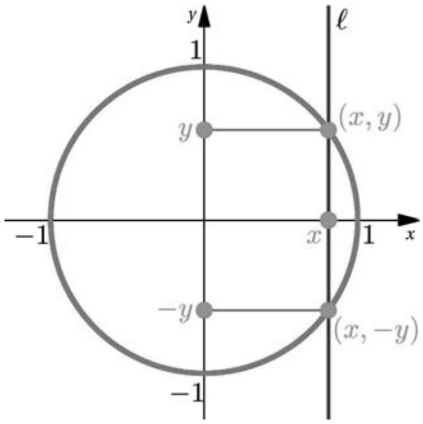


Figura 23.5: Curva que ***não*** é gráfico de função.

Mais ainda, se $x \in (-1,1)$ e $y \in \mathbb{R}$ é um número real tal que $(x,y) \in \mathcal{C}$, então também $(x,-y) \in \mathcal{C}$ e $y \neq -y$. Assim, a relação que definimos associa a cada x entre -1 e 1 dois números reais distintos, a saber y e $-y$. Na **Figura 23.5**, observe que se $y \geq 0$ e $x \in [-1,1]$, então $y=\sqrt{1-x^2}$ e $-y=-\sqrt{1-x^2}$.

> Lembre que ...
> A raiz quadrada de um número real não-negativo é, também, um número real não-negativo.

Vamos modificar a propriedade que determina o valor y com respeito a x, de modo a obter uma função:

Consideremos a relação f que, a cada x pertencente a $[-1,1]$, faz corresponder o único número real y, tal que o ponto de coordenadas (x,y) pertence à parte do círculo $\mathcal{C}$ que fica no semiplano superior $y \geq 0$.

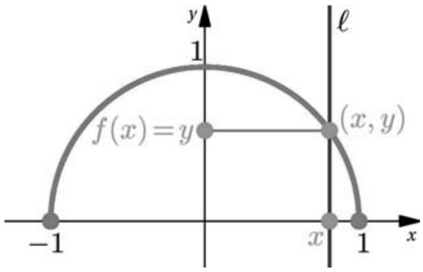


Figura 23.6: Função $x \mapsto y = \sqrt{1-x^2}$.

Desta maneira definimos a função:

$$\begin{array}{rcl} f: \ [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}\,. \end{array}$$

Isto é, $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Observe que o domínio da função f é o intervalo fechado $[-1,1]$ e que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

Para determinar a imagem de f observe que:

$$x \in [-1,1] \Longrightarrow x^2 \in [0,1] \Longrightarrow 1-x^2 \in [0,1] \Longrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \in [0,1].$$

Logo, a imagem de f é o conjunto:

$$f([-1,1]) = \left\{y \in \mathbb{R} \,|\, y = \sqrt{1-x^2}\right\} = [0,1]\,.$$

Observe que ...
$y = \sqrt{1-x^2}$
se, e somente se,
$y \geq 0$ e $y^2 = 1-x^2$,
se, e somente se,
$y \geq 0$ e $x^2+y^2 = 1$.

Usando o critério da vertical, sem efetuar cálculo algum, podemos ver que a curva da **Figura 23.7** não é o gráfico de uma função, pois há verticais que intersectam as curvas em mais de um ponto. Enquanto que a curva da **Figura 23.8** é o gráfico de uma função.

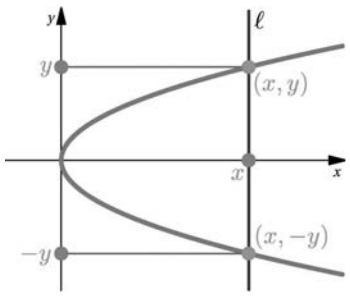


Figura 23.7: Curva que não é o gráfico de uma função.

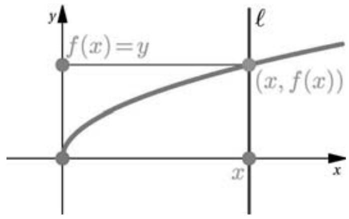


Figura 23.8: Gráfico de uma função.

Na verdade, a **Figura 23.7** é o gráfico da parábola $x = 2y^2$ e a **Figura 23.8** é o gráfico da função $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$, onde $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ é a curva cujo gráfico é parte da parábola contida no quadrante I do plano.

Faça o gráfico da função $g(x) = -\sqrt{\frac{x}{2}}$, usando que $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ se, e somente se, $y \leq 0$ e $x = 2y^2$.

Exemplo 11

Nas Aulas 10 e 11, você viu que $y = mx + b$, onde $m, b \in \mathbb{R}$, é a equação de uma reta não-vertical no plano. A saber, a reta que tem inclinação m e passa pelo ponto de coordenadas $(0, b)$. Sabemos também que quando $m = 0$ a reta é horizontal e que quando $b = 0$ a reta passa pela origem. Observe que a correspondência $x \longmapsto mx + b$ define uma função real de variável real. Essas funções são chamadas *funções afins*.

Lembre que
Escrever $x \longmapsto f(x)$ significa que a função *leva* o número x no número $f(x)$, ou seja, a relação que define a função associa o número $f(x)$ a cada número x do domínio de f.

Uma função afim $x \longmapsto mx+b$ é chamada *função linear* quando $b=0$. Isto é, uma função linear é da forma $x \longmapsto mx$.

Uma função afim $x \longmapsto mx+b$ com $m=0$, adquire a forma $x \longmapsto b$ sendo, portanto, a *função constante de valor* b.

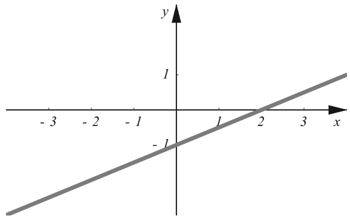


Figura 23.9: Gráfico da função afim $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$.

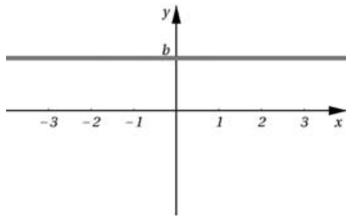


Figura 23.10: Gráfico da função constante $x \mapsto b$.

Observe que o domínio e o contradomínio da função afim $x \longmapsto mx+b$ é todo o conjunto $\mathbb{R}$. Quando a função afim não é constante, a sua imagem é todo o $\mathbb{R}$. No entanto, a função constante de valor b tem por imagem o conjunto unitário $\{b\}$.

A função linear $x \longmapsto x$ que, a cada número real x faz corresponder ele próprio, é de particular importância na Matemática, ela é chamada *função identidade*.

O gráfico da função identidade você já conhece desde o Módulo 2: é a reta diagonal do plano cartesiano. Veja a **Figura 23.11**.

Vejamos agora como construir funções, "cortando pedaços" de funções conhecidas.

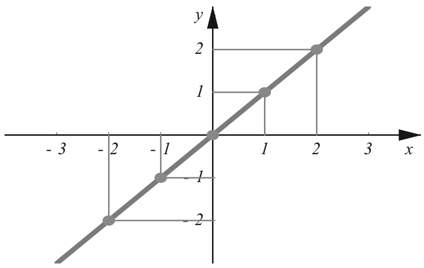


Figura 23.11: Gráfico da função identidade.

Na próxima aula veremos como construir novas funções a partir de funções já conhecidas usando as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{R}$.

Exemplo 12

No exemplo anterior você conheceu as funções constantes. Dado um intervalo de extremidades $a < b$, por exemplo, o intervalo $(a, b]$, podemos considerar a função constante $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto c$.

Observe que o domínio desta função constante é apenas o intervalo $(a, b]$, enquanto que o domínio da função constante do exemplo anterior é toda a reta real.

Considerando várias funções constantes sobre intervalos disjuntos, podemos construir novas funções.

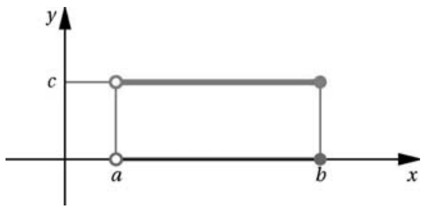


Figura 23.12: Função constante de valor c sobre $(a, b]$.

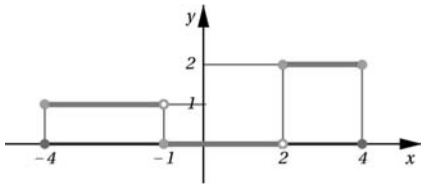


Figura 23.13: Gráfico da função $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$.

Por exemplo, seja $f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por (**Figura 23.13**):

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } -4 \leq x < -1 \\ 0\,, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 2\,, & \text{se } 2 \leq x \leq 4\,. \end{cases}$$

Esta função, cujo gráfico é mostrado na **Figura 23.13**, é constituída por três funções constantes: a função constante de valor 1 no intervalo $[-4, -1)$, a função constante de valor 0 no intervalo $[-1, 2)$ e a função constante de valor 2 no intervalo $[2, 4]$.

Observe que a imagem da função f é o conjunto $f([-4, 4]) = \{0, 1, 2\}$.

Exemplo 13

Já estudamos o módulo de um número real e suas propriedades. Consideremos agora a função $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o seu módulo $|x|$:

$$x \longmapsto M(x) = |x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Esta função é chamada *função módulo* ou *função valor absoluto*.

Observe que, embora o domínio e o contradomínio da função módulo seja o conjunto $\mathbb{R}$, a sua imagem consiste apenas dos números reais não-negativos. Isto é, $M(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Note também que, no intervalo $[0, +\infty)$, a função módulo é definida da mesma forma que a função linear de inclinação 1, e no intervalo $(-\infty, 0)$, a definição da função módulo coincide com a da função linear de inclinação -1. Assim, o gráfico da função módulo é composto de duas partes: no intervalo $[0, +\infty)$, o gráfico é a diagonal do primeiro quadrante do plano; e no intervalo $(-\infty, 0)$, é a diagonal do segundo quadrante do plano

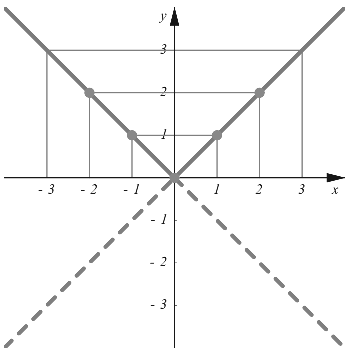


Figura 23.14: Função módulo $x \longmapsto |x|$.

Inclinação.
Na literatura matemática, a palavra *inclinação* tem o mesmo significado do que *coeficiente angular*.

(veja a **Figura 23.14**).

A idéia para elaborar a representação gráfica de uma função consiste em localizar, no plano cartesiano, uma quantidade suficientemente grande de pontos pertencentes ao gráfico da função. Lembre que, muitas vezes, um bom gráfico diz mais que mil palavras!

Exemplo 14

Consideremos a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que, a cada número real $x \in [-1, 1]$, faz corresponder o número real $f(x) = x^2$.

Com argumentos geométricos podemos verificar que o gráfico da equação $y = x^2$ é uma parábola contida no semiplano superior, com eixo de simetria sendo o eixo y. Suponha que não sabemos deste fato e tentemos desenhar o gráfico de f, determinando os valores $f(x)$ para alguns $x \in [-1, 1]$.

Escolhendo apenas os valores -1 e 1 para nossa variável independente x, elaboramos a tabela:

x	-1	1
$f(x)$	1	1

Desta tabela, vemos que os pontos $(x, f(x))$ de coordenadas $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ pertencem ao gráfico de f. A idéia é ligar os pontos determinados com uma curva. Mas qual é esta curva?

Na **Figura 23.15** mostramos algumas, dentre a infinidade de curvas que podem ser usadas para ligar $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. Qual delas é a correta?

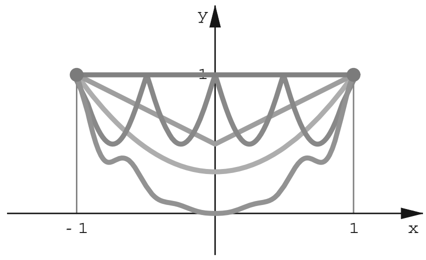


Figura 23.15: Curvas ligando $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

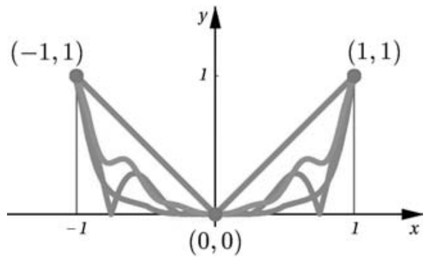


Figura 23.16: Curvas ligando $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Vamos escolher mais valores para a nossa variável independente. Começamos acrescentando $x = 0$ à nossa lista. Como $f(0) = 0$, obtemos a tabela:

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

Assim, além dos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ já determinados, o ponto $(0, 0)$ deverá também pertencer ao gráfico de f. Procuramos então ligar os três pontos com uma curva de modo que, $(-1,1)$ seja ligado com $(0,0)$ e este ponto, por sua vez, ligado com $(1,1)$. Na **Figura 23.16** apresentamos algumas dessas curvas. Lembre que o gráfico de uma função intersecta cada reta $x = x_0$ com $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, exatamente em um ponto.

x	$f(x)$
-1	1
$-0,9$	$0,81$
$-0,8$	$0,64$
$-0,7$	$0,49$
$-0,6$	$0,36$
$-0,5$	$0,25$
$-0,4$	$0,16$
$-0,3$	$0,09$
$-0,2$	$0,04$
$-0,1$	$0,01$
0	0
$0,1$	$0,01$
$0,2$	$0,04$
$0,3$	$0,09$
$0,4$	$0,16$
$0,5$	$0,25$
$0,6$	$0,36$
$0,7$	$0,49$
$0,8$	$0,64$
$0,9$	$0,81$
1	1

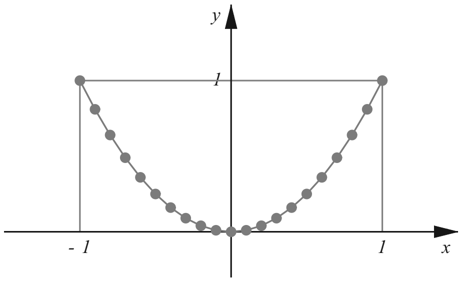


Figura 23.17: Gráfico de $f(x)$ com 21 pontos e segmentos.

Podemos continuar com este raciocínio, calculando a imagem de mais números do domínio da nossa função, e ligando os pontos obtidos do gráfico por meio de pequenas curvas. Veja a tabela ao lado, elaborada com vinte e um números do domínio de f e, na **Figura 23.17**, a curva poligonal obtida ligando com segmentos retilíneos os pontos $(x, f(x))$ do gráfico de f, a partir da tabela à esquerda.

Veja nas **Figuras 23.18** e **23.19** como a percepção do gráfico melhora quando consideramos mais e mais pontos do domínio de f.

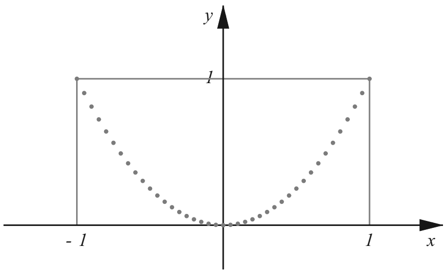


Figura 23.18: Quarenta e um pontos do gráfico de f.

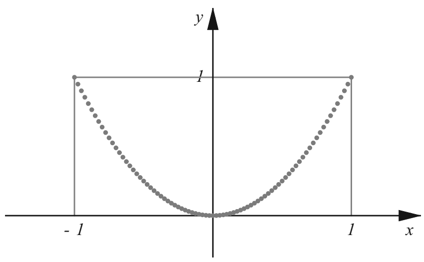


Figura 23.19: Oitenta e um pontos do gráfico de f.

Na **Figura 23.20** mostramos os oitenta segmentos retilíneos que ligam os oitenta e um pontos do gráfico de f, mostrados na **Figura 23.19**.

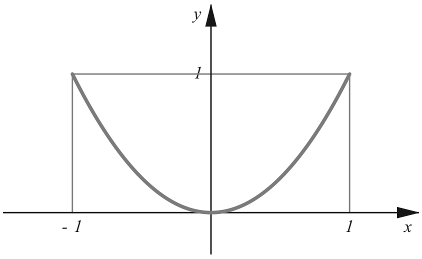


Figura 23.20: Oitenta segmentos aproximando o gráfico de f.

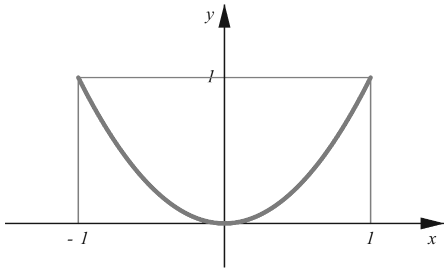


Figura 23.21: Gráfico de f gerado no computador.

Veja a **Figura 23.21**, onde mostramos o gráfico final gerado no computador. Os computadores fazem as contas exatamente como nós fizemos aqui, só que calculam com muitíssimos mais pontos e bem mais rápido do que nós. Contudo, as máquinas calculam apenas com uma quantidade limitada de números racionais e os cálculos são representados sempre em termos de aproximações usando números racionais!

Comparando os gráficos das duas últimas figuras acima, vemos que, para efeito de percepção visual, não são necessários tantos cálculos.

Resumo

Nesta aula você ampliou os seus conhecimentos sobre funções reais de variável real e fizemos uma breve introdução às seqüências numéricas. Começamos a fazer uma análise da representação gráfica dessas funções. Vimos o critério da vertical para determinar quando uma curva representa o gráfico de uma função real de variável real.

Exercícios

1. Compare a seqüência de termo geral d_n do Exemplo 9 com a seqüência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de termo geral $x(n) = x_n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2^n}\pi$.
Considerando valores cada vez maiores para a variável independente n, pode-se observar que os valores $x(n)$ ficam cada vez mais próximos de um número fixo. Você pode dizer que número é esse?

2. Considerando a seqüência d_n, do Exemplo 9, faça o que se pede:

• Substitua $d_{n-1} = \frac{1}{2}d_{n-2} + \pi$ em $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \pi$, depois substitua $d_{n-2} = \frac{1}{2}d_{n-3} + \pi$ na expressão que resulta, e continue substituindo até perceber a regra geral e obter

$$d_n = \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^n}\right)\pi \ .$$

Some a PG finita obtida para verificar que $d_n = 2\pi - \frac{1}{2^n}\pi$. Conclua que $d_n < d_{n+1} < 2\pi$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

• Calcule agora $|d_n - 2\pi|$. Este número mede a distância de d_n a 2π. Se esta distância diminuir conforme n aumenta, então d_n aproxima-se de 2π quando n aumenta. Assim, veja o que acontece para alguns valores grandes de n.

3. Faça uma análise da seqüência de termo geral $e_n = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{n}\,, & \text{se } n \neq 0\,. \end{cases}$

Desenhe o gráfico para alguns valores de n e diga o que acontece quando n é muito grande. Os valores de e_n aumentam ou diminuem conforme n aumenta? Explique a sua resposta.

4. Verifique que não é uma função, a relação que, a cada número $x \in [0, +\infty)$, faz corresponder um número $y \in \mathbb{R}$, tal que (x, y) pertence à parábola $\mathcal{P}$ de equação $x = y^2$.

Procedendo como no Exemplo 10, determine duas funções, usando as partes de $\mathcal{P}$ contidas nos semiplanos superior $(y \geq 0)$ e inferior $(y \leq 0)$.

5. Por que uma reta vertical não pode ser o gráfico de uma função real de variável real?

6. Para cada uma das funções dadas abaixo, elabore uma tabela com pelo menos 20 valores para a variável independente x e as suas imagens $f(x)$, como foi feito no Exemplo 14. Coloque os pontos $(x, f(x))$ obtidos num sistema de coordenadas cartesianas e ligue-os, usando segmentos de reta.

Repita o processo com 40 pontos. Pode usar uma máquina de calcular, se achar necessário.

a. $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x^2}$. Compare com o gráfico de $x \to |x|$.

b. $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - \sqrt{|x|}$.

c. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

d. $f : (-2, 2] \cup (3, 4] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \begin{cases} |x|\,, & \text{se } x \in (-2, 2] \\ 1\,, & \text{se } x \in (3, 4]. \end{cases}$

7. Considere a função dada pela relação

$$x \longmapsto \begin{cases} n\,, & \text{se } x \in [2n-1, 2n]\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{se } x \in (2n, 2n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem desta função. Faça o esboço do gráfico.

8. Considere as seguintes curvas.

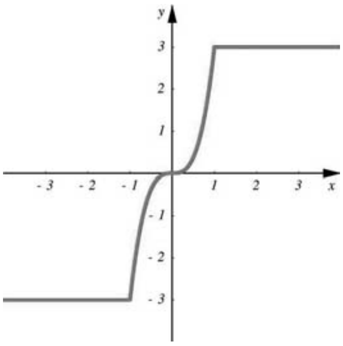


Figura 23.22: Curva A.

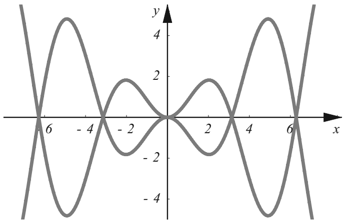


Figura 23.23: Curva B.

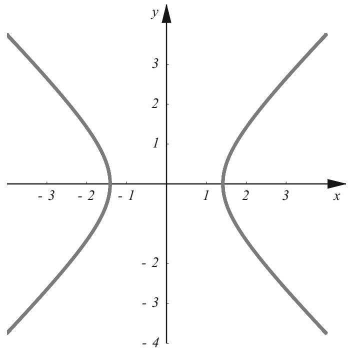


Figura 23.24: Curva C.

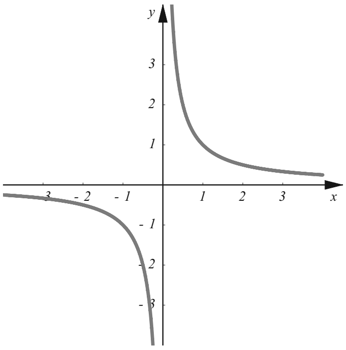


Figura 23.25: Curva D.

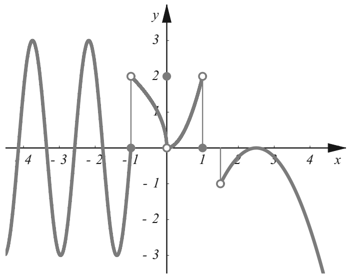


Figura 23.26: Curva E.

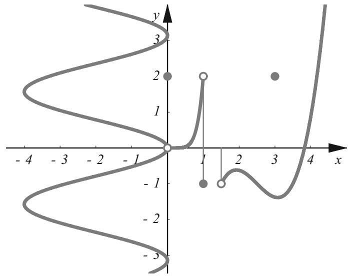


Figura 23.27: Curva F.

a. Determine quais curvas são gráficos de funções reais de variável real. Explique suas conclusões.

b. Para aquelas curvas que sejam gráficos de funções reais de variável real, ache o domínio e a imagem da função.

9. (Função maior inteiro e função parte inteira)

Uma função muito importante na Matemática é a função $\mathcal{I} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, a cada número real x, faz corresponder o *maior inteiro* menor ou igual a x. O maior inteiro menor ou igual a x se designa por $\lfloor x \rfloor$.

Por exemplo, $\lfloor 3.4 \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ etc.

Outra função que pode até ser confundida com a função maior inteiro é a função $\mathcal{J} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, a cada número real x, associa a sua *parte inteira*. A parte inteira $\mathcal{J}(x)$ do número $x \in \mathbb{R}$ é designada por $[x]$.

Por exemplo, $[3,4] = 3\,,\ [2] = 2\,,\ [-2,3] = -2\,,\ [\pi] = 3\,,\ [-\pi] = -3$ etc.

Dentre os gráficos A e B, identifique qual corresponde à função maior inteiro e qual à função parte inteira.

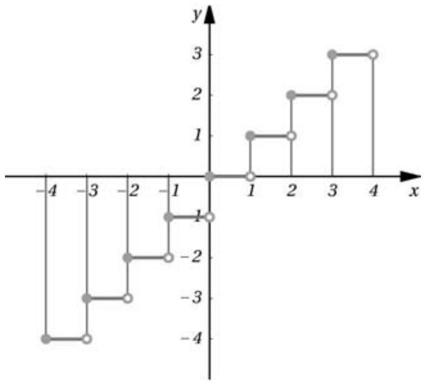


Figura 23.28: Gráfico A.

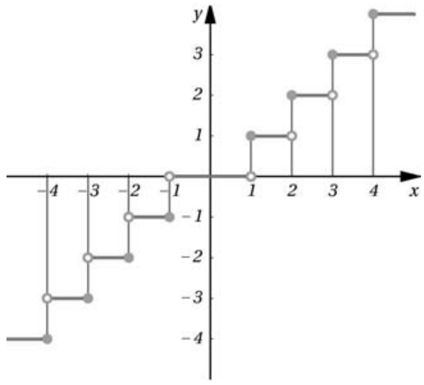


Figura 23.29: Gráfico B.

Primeiramente, observe que $\lfloor x \rfloor = [x]$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Compare as funções $\mathcal{I}(x) = \lfloor x \rfloor$ e $\mathcal{J}(x) = [x]$ para verificar que

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= [x], &\text{para todo } x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor &= [x] - 1, &\text{para todo } x < 0,\ x \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

10. Desenhe o gráfico da função $\mathcal{E} : [0, 30] \to \mathbb{R}$ que, a cada $x \in [0, 30]$, associa a quantidade de números primos menores ou iguais a $\lfloor x \rfloor$.

11. Desenhe o gráfico da função $\mathcal{G} : [2, 30] \to \mathbb{R}$ que, a cada $x \in [2, 30]$, faz corresponder o maior número primo menor ou igual a x. Determine a imagem de $\mathcal{G}$.

Auto-avaliação

Você entendeu bem o conceito de seqüências e fez os Exercícios de 1 a 3? Assimilou o critério da vertical, já sabe determinar quando uma curva no plano representa o gráfico de uma função real de variável real e conseguiu fazer os Exercícios 5, 8 e 9? Entendeu bem o processo de visualização do gráfico de uma função? Se respondeu afirmativamente a essas perguntas, pode continuar com a próxima aula. Caso ainda tenha dúvidas, não pense duas vezes, procure ajuda com os tutores.

Para saber mais

As funções parte inteira e maior inteiro desempenham um papel muito importante na Teoria dos Números e na Álgebra. Por exemplo, um fato importante é que o expoente com que o número primo p aparece na fatoração do produto $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ é $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots$ Note que as parcelas desta soma são zero quando a potência de p que aparece nos denominadores ultrapassa o numerador n. Por exemplo, se $n = 5$ e $p = 2$, então $5! = 120$ e perguntamos qual o expoente da maior potência de 2 que divide 120. A resposta é $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor + \lfloor \frac{5}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{5}{2^3} \rfloor = 2 + 1 + 0 = 3$. Assim, $2^3 = 8$ é a maior potência de 2 que divide 5!.

Aula 24 – Domínios e operações com funções

Objetivos

- Entender o domínio de funções definidas por fórmulas.
- Compreender as operações de adição e multiplicação de funções.
- Analisar as funções polinomiais a partir da soma e multiplicação de funções.
- Aprender os conceitos de função par e função ímpar.
- Interpretar graficamente as operações de adição e multiplicação de funções.

Conceitos:
Funções, domínio, imagem e operações com números reais.

Quando fazemos um experimento ou observamos um fenômeno a partir da variação de quantidades a ele associadas, é comum obtermos relações expressas em termos de fórmulas ou expressões matemáticas. No entanto, muitas vezes as expressões obtidas nem sempre dão origem a um número real para todos os possíveis valores da variável. Nesta situação é importante determinarmos o conjunto dos valores da variável independente para os quais a fórmula matemática define uma função. Vejamos como isto acontece no seguinte exemplo.

Exemplo 6

Determinemos os valores $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão $f(x) = \frac{8}{x} + 4\sqrt{\pi x}$ é um número real.

Observamos que $f(x) \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\frac{8}{x} \in \mathbb{R}$ e $4\sqrt{\pi x} \in \mathbb{R}$. Isto é, se, e somente se, $x \neq 0$ e $\pi x \geq 0$. Portanto, para $f(x)$ ser um número real, x deve variar no intervalo $(0, +\infty)$.

Exemplo 7

Um fabricante de latas de alumínio deve construir latas cilíndricas com capacidade de 4 centímetros cúbicos. Para isso, ele deseja determinar a área da superfície de material utilizado, sabendo que a altura da lata é variável e que o diâmetro das tampas deve ser de, pelo menos, 5 centímetros.

Lembre que a área A e o volume V do cilindro são determinados pelas fórmulas:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h\,, \tag{24.1}$$

$$V = \pi r^2 h\,. \tag{24.2}$$

Sabendo que $V = 4$ centímetros cúbicos e que $r \geq \frac{5}{2}$ centímetros (pois o diâmetro $2r$ deve ser de pelo menos 5 centímetros), devemos determinar como varia A com respeito a h.

De (24.2), obtemos $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{4}{\pi h}} = \frac{2}{\sqrt{\pi h}}$. Substituindo r na equação (24.1):

$$A = 2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi h}}\right)^2 + 2\pi \frac{2}{\sqrt{\pi h}} h = \frac{8\pi}{\pi h} + \frac{4\pi h}{\sqrt{\pi h}}.$$

Esta relação define A em função da variável h (lembre que h é uma *medida*, sendo, portanto, uma quantidade não-negativa):

$$A(h) = \frac{8}{h} + 4\sqrt{\pi h},$$

Pelo exemplo anterior, h varia no intervalo $(0, +\infty)$.

Mesmo assim, há outra condição sobre a variação de h. Essa condição, surge do fato de que $\frac{5}{2} \leq r = \frac{2}{\sqrt{\pi h}}$. Ou seja $\sqrt{\pi h} \leq \frac{4}{5}$, isto é, $\pi h \leq \frac{16}{25}$, que equivale a $h \leq \frac{16}{25\pi}$.

Dessa forma, em nosso problema, h varia apenas no intervalo $(0, \frac{16}{25\pi}]$. Concluímos, então, que a função área do nosso problema é dada, em termos de h, por:

$$A(h) = \frac{8}{h} + 4\sqrt{\pi h}, \quad h \in \left(0, \frac{16}{25\pi}\right]. \qquad (24.3)$$

Isto é, $\mathrm{Dom}(A) = (0, \frac{16}{25\pi}]$.

A raiz quadrada: Lembre que a *raiz quadrada* de um número real não-negativo r, é o número real não-negativo, que designamos por $\sqrt{r}$, cujo quadrado é igual a r. Isto é, a raiz quadrada está definida apenas para os números r do intervalo $[0, +\infty)$.

Esses exemplos ilustram duas situações.

Primeiramente, é comum escrevermos uma função real de variável real, pela sua expressão (ou fórmula) matemática com respeito à variável em questão. Nestas condições, o *domínio* da função f é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

Restrições e problemas: Na Aula 32, você verá outros exemplos de situações do cotidiano modeladas por expressões matemáticas, sujeitas a restrições impostas pelas condições do problema proposto, como no Exemplo 7.

No Exemplo 6, o domínio da função $f(x)$ é o intervalo $(0, +\infty)$, pois, para todo x pertencente a esse intervalo, $f(x) \in \mathbb{R}$.

Porém, em diversas situações, como a que mostramos no Exemplo 7, estaremos interessados em funções definidas num conjunto menor do que o domínio da expressão. Para deixar claro este fato escrevemos, de forma explícita, a *restrição* feita sobre o domínio da expressão, como fizemos na fórmula (24.3).

> Nota importante
> *Daqui em diante, as funções consideradas têm por contradomínio o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.*

Exemplo 8

a. O domínio da função definida pela fórmula $f(x) = 2x + 1$ é todo o $\mathbb{R}$. De fato, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, o número $2x + 1$ é um número real.

No entanto, a função $g(x) = 2x + 1\,,\ x \in [2, 10]$, é diferente da função f, pois, embora seja definida pela mesma fórmula que f, o seu domínio fica restrito apenas ao intervalo $[2, 10]$.

b. O domínio da função $r(x) = \sqrt{x}$ consiste dos números reais não-negativos: $\text{Dom}(r) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, r(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

A função $s(x) = \sqrt{x}\,,\ x \in (5, +\infty)$, embora definida pela mesma fórmula que r, tem domínio $\text{Dom}(s) = (5, +\infty) \neq [0, +\infty)$. Portanto, $r \neq s$.

Exemplo 9

Consideremos as funções:
$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$; $g(x) = \sqrt{x-3}$; $h(x) = 2x + 3$; $r(x) = \sqrt[4]{x^2 + x - 2}$.

Determinemos $\text{Dom}(f)$, $\text{Dom}(g)$, $\text{Dom}(h)$ e $\text{Dom}(r)$.

$$\begin{aligned}
\text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = \tfrac{2x}{x^2-1} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dom}(g) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = \sqrt{x-3} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 3 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 3\} = [3, +\infty)\,,
\end{aligned}$$

$$\text{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, h(x) = 2x + 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,,$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Dom}(r) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, r(x) = \sqrt[4]{x^2 + x - 2} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x - 2 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-1)(x+2) \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

Na aula anterior você estudou algumas funções elementares, como as funções constantes e a função identidade. Vejamos agora como obter outras funções a partir destas duas, usando as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$.

Exemplo 10

Considere a função identidade $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, e a função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Observe que $f(x) = x^2 = x \cdot x = I(x) \cdot I(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, a função f associa a cada $x \in \mathbb{R}$, o número real obtido multiplicando $I(x) = x$ por si próprio. Isto é, a função f é obtida a partir da função I e a operação de multiplicação em $\mathbb{R}$.

Exemplo 11

Sejam $m, b \in \mathbb{R}$ números fixos. Consideremos a função identidade $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ e as funções constantes $C_m(x) = m$ e $C_b(x) = b$, $x \in \mathbb{R}$.

A função afim $g(x) = mx + b$ associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, o número real obtido multiplicando as imagens de x pelas funções I e C_m, e somando o resultado à imagem de x pela função C_b. Assim,

$$g(x) = mx + b = C_m(x) \cdot I(x) + C_b(x).$$

Isto é, a função afim g é obtida a partir das funções I, C_m e C_b usando as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$.

Esses exemplos motivam a seguinte definição.

Definição 24.1 (Adição e multiplicação de funções)
Sejam f e g duas funções reais de variável real. Definimos a função *soma de f e g*, que designamos por $f+g$, e a função *produto de f e g*, que designamos por fg ou $f \cdot g$, como sendo as funções:

$$\boxed{\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\,, \quad x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,, \quad x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\end{aligned}}$$

É importante observar:

$$\boxed{\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)}$$

Exemplo 12

Dadas as funções:
$f(x) = 2x\,,\ x \in \mathbb{R}\,;\qquad g(x) = |x|\,,\ x \in [-1,1]\,;\qquad h(x) = x^2\,,\ x \in (-3,0).$

Temos $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [-1,1]$, e:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = 2x + |x|\,, \quad x \in [-1,1]\,,\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = 2x|x|\,, \quad x \in [-1,1]\,.\end{aligned}$$

Similarmente, o domínio da soma e do produto das funções g e h é o conjunto $\text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h) = [-1,1] \cap (-3,0) = [-1,0)$. Logo:

$$\begin{aligned} (g+h)(x) &= g(x) + h(x) = |x| + x^2\,, \quad x \in [-1,0)\,, \\ (g \cdot h)(x) &= g(x) \cdot h(x) = |x|x^2\,, \quad x \in [-1,0)\,. \end{aligned}$$

Raízes n−ésimas
No Exemplo 13, ao lado, estamos usando o fato de que:
Se n é par, $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x \geq 0$.
Lembre que, se n é ímpar, $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.
Na Aula 25, analisaremos outros exemplos de funções da forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$, onde $h(x)$ é uma função.

Exemplo 13

Consideremos as funções:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \;\; ; \quad g(x) = \sqrt{x-3} \;\; ; \quad r(x) = \sqrt[4]{x^2+x-2}.$$

No Exemplo 9, achamos os domínios dessas funções. Agora, determinemos os domínios $\text{Dom}(f+g)$, $\text{Dom}(f \cdot r)$ e $\text{Dom}(g+r)$.

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f+g) &= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = ((-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)) \cap [3,+\infty) \\ &= [3,+\infty) = \text{Dom}(g)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \cdot r) &= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(r) \\ &= ((-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)) \cap ((-\infty,-2] \cup [1,+\infty)) \\ &= (-\infty,-2] \cup (1,+\infty)\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Dom}(g+r) &= \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(r) = [3,+\infty) \cap ((-\infty,-2] \cup [1,+\infty)) \\ &= [3,+\infty) = \text{Dom}(g)\,. \end{aligned}$$

Exemplo 14

No Módulo 3, você estudou os polinômios com coeficientes reais sob o ponto de vista algébrico (operações, raízes, fatoração etc.). Vejamos, neste exemplo, o aspecto funcional dos polinômios com coeficientes reais.

Seja f a função definida por $f = I \cdot I \cdot I + C_2 \cdot I \cdot I + C_{-1}$, onde I é a função identidade e, para cada $k \in \mathbb{R}$, designamos por C_k a função constante de valor k.

Que função é f?

Vejamos... A função f leva cada $a \in \mathbb{R}$ no número real

$$\begin{aligned}
f(a) &= (I \cdot I \cdot I + C_2 \cdot I \cdot I + C_{-1})(a) \\
&= (I \cdot I \cdot I)(a) + (C_2 \cdot I \cdot I)(a) + (C_{-1})(a) && \text{definição da adição} \\
&= I(a) \cdot I(a) \cdot I(a) + C_2(a) \cdot I(a) \cdot I(a) + C_{-1}(a) && \text{definição da multiplicação} \\
&= a \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + (-1) && \text{avaliando as funções em } a \\
&= a^3 + 2a^2 - 1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a função f associa a cada número $a \in \mathbb{R}$ o número real obtido *avaliando* o polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ em $x = a$.

Em geral, se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio com coeficientes reais, a função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada $a \in \mathbb{R}$ associa o número real que resulta da avaliação de $p(x)$ em $x = a$, é chamada uma *função polinomial*. Portanto,

Reveja na Aula 16 a definição de polinômios com coeficientes reais.

> *Toda função polinomial é obtida a partir da função identidade e das funções constantes, por meio das operações de adição e multiplicação de funções. O domínio de uma função polinomial é $\mathbb{R}$.*

Lembre que ...
os polinômios de *grau zero* são da forma $p(x) = ax^0 = a$, com $a \neq 0$.

De fato, o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ define a função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$p = C_{a_n} \cdot \underbrace{I \cdot I \cdot \ldots \cdot I}_{n \text{ fatores}} + C_{a_{n-1}} \cdot \underbrace{I \cdot \ldots \cdot I}_{n-1 \text{ fatores}} + \ldots + C_{a_2} \cdot I \cdot I + C_{a_1} \cdot I + C_{a_0}$$

Convenção.

• Se g é uma função, escrevemos g^m para denotar a função obtida multiplicando g por si própria m vezes. Isto é,

$$\boxed{g^m(x) = \underbrace{g(x) \cdot g(x) \cdot \ldots \cdot g(x)}_{m \text{ fatores}}, \quad x \in \mathrm{Dom}(g)}$$

• Se $k \in \mathbb{R}$, convencionamos em designar apenas por k a função constante C_k de valor k.

Seguindo esta convenção, a função polinomial descrita no parágrafo acima se escreve na forma:

$$\boxed{p = a_n \cdot I^n + a_{n-1} \cdot I^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot I^2 + a_1 \cdot I + a_0}$$

e em cada $x \in \mathbb{R}$, o seu valor é:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Vejamos, agora, como desenhar os gráficos das funções polinomiais.

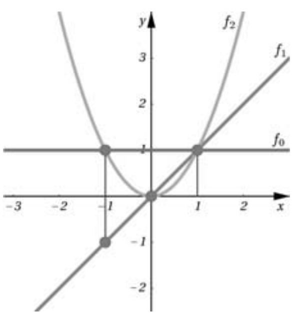


Figura 24.1: Gráficos de f_0, f_1 e f_2.

Já esboçamos o gráfico de uma função polinomial associada a um polinômio constante (função constante) ou a um polinômio de primeiro grau (função afim). Para ampliar as nossas idéias, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função polinomial $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dentre essas funções, conhecemos os gráficos de f_0 (função constante de valor 1, pois $f_0(x) = x^0 = 1$), de f_1 (função identidade, ou seja $f_1(x) = x^1 = x$) e de f_2, que é a função dada por $f_2(x) = x^2$, cujo gráfico é uma parábola. Verifiquemos que a disposição desses gráficos é a mostrada na **Figura 24.1**. Para isto, devemos analisar os valores das funções em vários intervalos:

Atenção!
Você deve estar se perguntando: como podemos garantir que os gráficos dos monômios $f_n(x) = x^n$ são exatamente os mostrados nas figuras anteriores? A resposta fica fora do nosso alcance, sendo abordada com mais detalhe no Cálculo Diferencial. No entanto, podemos conseguir boas aproximações dos gráficos procedendo como na Aula 23, escolhendo uma quantidade suficiente de valores para a variável x, calculando as imagens $f_n(x)$ desses valores e ligando os pontos de coordenadas $(x, f_n(x))$ com pequenos segmentos.

Caso $x \in (0, 1)$: Para $0 < x < 1$, temos $0 < f_1(x) = x < f_0(x) = 1$. Multiplicando a desigualdade $0 < x < 1$ por x, obtemos $0 < x^2 < x$. Portanto $0 < f_2(x) = x^2 < f_1(x) = x < f_0(x) = 1$. Por isso, no intervalo $(0, 1)$:

• a parábola (gráfico de f_2) tem ordenadas maiores do que a reta horizontal $y = 0$,

• a diagonal (gráfico de f_1) tem ordenadas maiores do que a parábola,

• a reta horizontal $y = 1$ (gráfico de f_0) tem ordenadas maiores do que a diagonal.

Caso $x \in [1, +\infty)$: Observamos agora que $f_0(1) = f_1(1) = f_2(1) = 1$. Por isso é que a horizontal $y = 1$, a diagonal e a parábola se intersectam no ponto $(1, 1)$. Mas, para $x \in (1, +\infty)$, temos $f_0(x) = 1 < x = f_1(x)$ e, multiplicando esta desigualdade por x, obtemos $f_1(x) = x < x^2 = f_2(x)$. Logo, no intervalo $(1, +\infty)$, a parábola fica por cima da diagonal, que fica por cima da horizontal $y = 1$ (gráfico de f_0, isto é, da função constante de valor 1).

Caso $x \in (-\infty, 0)$: Neste caso, temos $x < 0 < x^2$, isto é $f_1(x) < 0 < f_2(x)$ e, por isso é que, neste intervalo, a diagonal (gráfico de f_1) fica por baixo da horizontal $y = 0$, que fica por baixo da parábola (gráfico de f_2).

Podemos continuar com o mesmo raciocínio para verificar que a disposição dos gráficos de f_n, com $n \in \mathbb{N}$, é a mostrada na **Figura 24.2**. Observe que, se n é par e positivo, o gráfico de $f_n(x) = x^n$ passa pelos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e, se n é ímpar, o gráfico de $f_n(x) = x^n$ passa pelos pontos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Veja as **Figuras 24.3** e **24.4**.

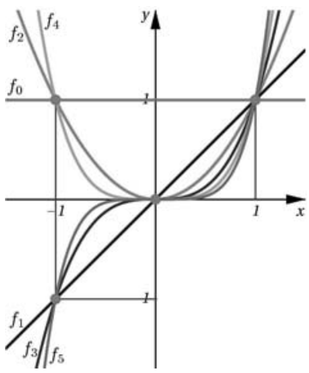


Figura 24.2: $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$.

Note também que os gráficos de f_n, com n par, são *simétricos com respeito ao eixo y*, isto é,

$$\boxed{\text{Se } n \text{ é par, então:} (x, y) \in \text{Graf}(f_n) \iff (-x, y) \in \text{Graf}(f_n)}$$

Esta qualidade facilita a construção dos gráficos dessas funções, pois basta desenhar o gráfico para $x \geq 0$ e depois, refletir a curva obtida, como se fosse a imagem vista num espelho, com respeito ao eixo y. Para isto, basta mudar o sinal da abscissa dos pontos do gráfico já obtidos.

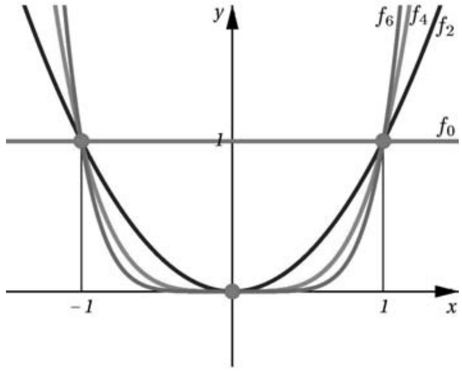


Figura 24.3: Gráficos de f_n, n par.

Similarmente, observe que os gráficos das funções f_n, com n ímpar, são *simétricos com respeito à origem do sistema de coordenadas*. Isto significa, que

$$\boxed{\text{Se } n \text{ é ímpar, então: } (x,y) \in \text{Graf}(f_n) \Longleftrightarrow (-x,-y) \in \text{Graf}(f_n)}$$

Portanto, para elaborar o gráfico de f_n, com n ímpar, basta desenhar a parte do gráfico que consiste dos pontos da forma $(x, f_n(x))$, com $x \geq 0$. A outra parte é obtida fazendo a reflexão dos pontos já determinados, com respeito à origem, tomando os pontos $(-x, -f_n(x))$. Note que, para determinar o ponto simétrico ao ponto $(x, f_n(x))$, basta considerar a reta que passa pela origem e pelo ponto $(x, f_n(x))$ e, nela, localizar o ponto cuja distância à origem é a mesma que a distância do ponto $(x, f_n(x))$ à origem.

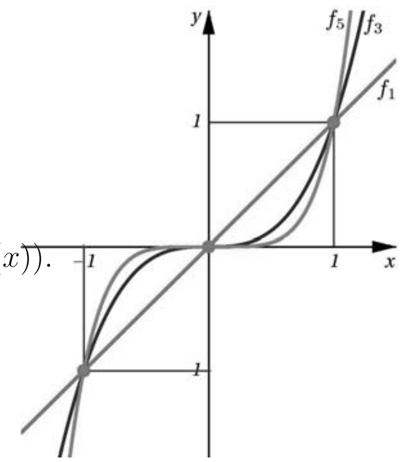


Figura 24.4: Gráficos de f_n, n ímpar.

Por exemplo, consideremos a função $f_5(x) = x^5$. Para $x = 2$, temos $f_5(2) = 2^5 = 32$ e para $x = -2$, temos $f_5(-2) = (-2)^5 = -32$. Logo, $A = (2, 32)$ e $B = (-2, -32)$ pertencem ao gráfico de f_5.

A reta $y = 16(x-2)+32$ que contém A e B, passa pela origem O (faça $x = 0$). Além disso, $d(A,O) = \sqrt{2^2 + 32^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-32)^2} = d(B,O)$.

Essas propriedades de simetria dos gráficos das funções f_n motivam a seguinte definição.

Definição 24.2 (Função par e função ímpar)
Seja $f(x)$ uma função cujo domínio, $\text{Dom}(f)$, é um conjunto simétrico com respeito à origem. Isto é, $x \in \text{Dom}(f)$ se, e somente se, $-x \in \text{Dom}(f)$.

A função $f(x)$ é chamada

- *par*, se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$ (veja a **Figura 24.5**).
- *ímpar*, se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$ (veja a **Figura 24.6**).

Assim, as funções $f_n(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ par, são exemplos de funções pares e, as funções $f_n(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ ímpar, são funções ímpares.

Funções pares
O gráfico de uma função par é simétrico com respeito ao eixo y.

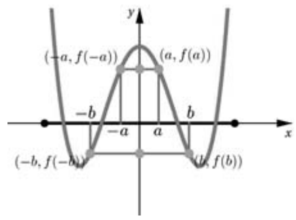


Figura 24.5: Função par.

Funções ímpares
O gráfico de uma função ímpar é simétrico com respeito à origem.

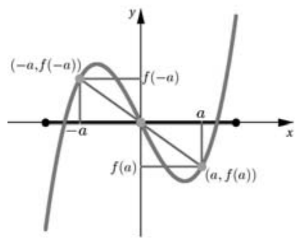


Figura 24.6: Função ímpar.

Exemplo 15

a. A função polinomial $f(x) = -5x^4 + 2x^2 + 3\,,\ x \in \mathbb{R}$, é par.

De fato, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ é simétrico com respeito a 0 e

$$f(-x) = -5(-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = -5x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)\,.$$

b. A função $g(x) = x^3 + x\,,\ x \in [-1, 2]$, não é par nem ímpar.

Com efeito, $\text{Dom}(g) = [-1, 2]$ não é simétrico com respeito a 0.

No entanto, observe que a função $h(x) = x^3 + x\,,\ x \in [-1, 1]$, é uma função ímpar. De fato, $\text{Dom}(h) = [-1, 1]$ é simétrico com respeito a 0 e

$$h(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -h(x)\,.$$

c. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função ímpar.

De fato, observe que $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é um conjunto simétrico com respeito a 0. Além disso:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)\,.$$

De maneira geral, conhecendo os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, $x \in A$, podemos esboçar o gráfico das funções $(f + g)(x)$ e $(f \cdot g)(x)$. Para isto, escolhemos uma quantidade suficiente de valores de $x \in A$ e calculamos, para cada x, o valor das imagens $f(x)$ e $g(x)$.

Como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, o ponto de abscissa x pertencente ao gráfico de $f + g$ deverá ser $(x, f(x) + g(x))$. Ligando os pontos obtidos com pequenos segmentos construímos um esboço do gráfico de $f + g$.

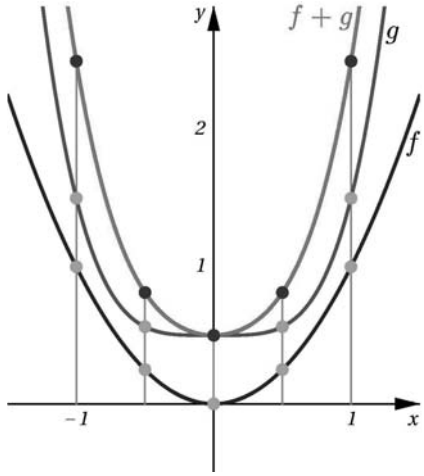


Figura 24.7: Adição de funções.

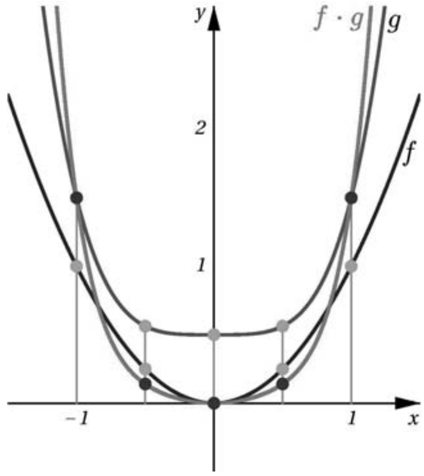


Figura 24.8: Multiplicação de funções.

Similarmente, o ponto de abscissa x do gráfico de $f \cdot g$ é $(x, f(x) \cdot g(x))$. Ligando os pontos $(x, f(x) \cdot g(x))$ com pequenos segmentos, obtemos o gráfico de $f \cdot g$. Nas **Figuras 24.7** e **24.8** mostramos os gráficos de $f + g$ e de $f \cdot g$.

Uma situação particularmente importante acontece quando uma das funções consideradas é uma função constante.

De fato, consideremos uma função $f(x)$, $x \in A$, e uma função constante $C_k(x) = k$, $x \in A$, de valor k.

Observe que, para cada $x \in A$,
$(f + k)(x) = (f + C_k)(x) = f(x) + k$.

Logo, os pontos do gráfico de $f + k$ são da forma $(x, f(x) + k)$, onde $x \in A$.

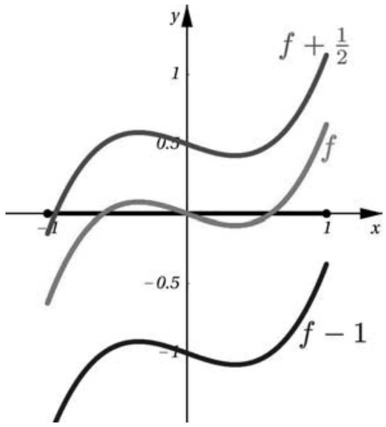


Figura 24.9: Gráficos das funções $f + k$, $k \in \mathbb{R}$.

> Gráfico da função $f + k$, onde $k \in \mathbb{R}$ (veja a **Figura 24.9**).
> O gráfico de $f + k$ é obtido *deslocando $|k|$ unidades o gráfico de f na direção vertical*.
> O deslocamento é para cima, se $k > 0$ e, para baixo, se $k < 0$.

Similarmente, o gráfico do produto $kf(x)$, de uma função $f(x)$ por uma função constante $C_k(x) = k$ é obtido, salvo uma reflexão com respeito ao eixo x (quando $k < 0$), alongando ou comprimindo o gráfico de f por um fator k.

Na **Figura 24.10**, mostramos os gráficos de kf, para alguns valores de $k \neq 0$, obtidos alongando ou comprimindo o gráfico de $f(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}$. Observe que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(kf) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + (x-1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$. No entanto, na figura mostramos os gráficos de $f(x)$ e $kf(x)$ com $x \in A$, onde $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

De modo geral, temos o seguinte procedimento para construir o gráfico das funções $kf(x)$:

Gráfico da função kf, onde $k \in \mathbb{R}$ (veja a **Figura 24.10**)
- $\mathrm{Dom}(kf) = \mathrm{Dom}(f)$.
- Se $k = 0$, a função kf é nula e o seu gráfico coincide com o eixo x.
- Se $k = 1$, o gráfico de kf coincide com o gráfico de f.
- Se $k > 1$, o gráfico de kf é obtido alongando o gráfico de f por um fator de k unidades.
- Se $0 < k < 1$, o gráfico de kf é obtido comprimindo o gráfico de f por um fator de k unidades.
- Se $k < 0$, temos $kf = -|k|f$, com $|k| > 0$, e o gráfico de kf é obtido refletindo o gráfico de $|k|f$ com respeito ao eixo x.

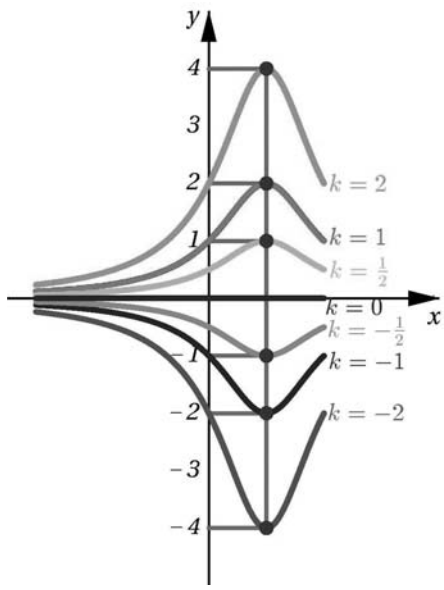


Figura 24.10: Gráficos das funções kf, $k \in \mathbb{R}$, onde $f(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}$.

Encerramos esta aula com algumas dicas para traçar de gráficos de funções.

Dicas para traçar o gráfico de uma função f

- Comece determinando o domínio $A = \mathrm{Dom}(f)$ no eixo x, e lembre que cada reta vertical deverá intersectar o gráfico de f em não mais de um ponto.
- Verifique se f é uma função par ou ímpar pois, nesse caso, basta fazer o gráfico de f em $A \cap [0, +\infty)$. A parte do gráfico de f em $A \cap (-\infty, 0)$ é obtida fazendo a reflexão com respeito ao eixo y (caso f seja par) ou com

respeito à origem (caso f seja ímpar). Lembre que, para f ser par ou ímpar, o seu domínio deve ser simétrico com respeito à origem.

• Tente determinar os *zeros* de f, isto é, os valores $x \in A$, tais que $f(x) = 0$. Note que, se $x_0 \in A$ é um zero de f, então o ponto $(x_0, 0)$ pertence ao gráfico de f. Estude o sinal de $f(x)$, para os valores de x diferentes dos zeros de $f(x)$.

• Escolha uma quantidade suficiente de valores $x \in A$ e determine os pontos $(x, f(x))$ do gráfico de f, avaliando f nos valores escolhidos. Faça uma tabela, caso ache necessário, confrontando os valores escolhidos para a variável x com as suas imagens $f(x)$.

• Ligue os pontos $(x, f(x))$, obtidos anteriormente por meio de pequenos segmentos ou curvas. Caso a função seja uma função afim, basta determinar dois pontos do gráfico e traçar a reta que os contém, respeitando as margens impostas pelo domínio.

• Note que a técnica utilizada para traçar o gráfico depende diretamente da função em questão, quando não se tem idéia da forma do gráfico, é necessário calcular uma quantidade muito grande de valores $f(x)$. Esse processo é feito, geralmente, com ajuda de uma máquina de calcular ou de um computador.

Resumo

Nesta aula, construímos funções a partir de funções dadas, usando as operações de adição e multiplicação do conjunto dos números reais. Demos ênfase ao fato de que as funções polinomiais (definidas a partir dos polinômios estudados no Módulo 3) são obtidas a partir das funções constantes e da função identidade. Além disso, estudamos os conceitos de função par e função ímpar, e vimos que as funções da forma $f(x) = x^n$ são pares, quando n é par, e ímpares, quando n é ímpar. Finalmente, aprendemos a interpretar graficamente as operações de adição e multiplicação.

Exercícios

1. Desenhe os gráficos das funções abaixo.

a. $f : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - 3$.

b. $g : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2(x - 3)$.

c. $h : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x - 3$.

d. $\alpha : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 3$.

e. $\beta : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - 3$.

f. $\gamma : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 3$.

g. $\delta : (-5,5) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2(2x-1) - 3$.

2. Considere as funções do exercício anterior. Determine e dê o domínio:

a. $\alpha + \beta$,	b. $g + \delta$,
c. $3h + \beta$,	d. $2f - g$,
e. $\alpha + \delta$,	f. $h \cdot \alpha$.

3. Determine quais das funções abaixo são pares, quais são ímpares e quais não são nem pares nem ímpares. Justifique as suas respostas.

a. $f : (-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$.

b. $g : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^2 - 3$.

c. $h : (-3,3) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^3 - x$.

d. $\ell : (-3,3) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^5 - 2x^3 - x$.

e. $\alpha : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4 + x^2 - 3$.

f. $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - 3$.

g. $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1$.

h. $\delta : (-5,5) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^7 - x^3 - x$.

4. Determine o domínio de f, os zeros de f e estude o sinal de f:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

b. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-8x}$.

c. $f(x) = |x-2| - |2x^2 - 4|$.

d. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$.

e. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x-4}}$.

5. Dê um exemplo de uma função que seja simultaneamente par e ímpar.

6. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que, $x \in A \iff -x \in A$ e consideremos duas funções $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Responda as seguintes perguntas com justificativas claras.

• Se f e g são pares, então $f + g$ é par? E $f \cdot g$ é par?

• Se f e g são ímpares, então $f + g$ é ímpar? E $f \cdot g$ é ímpar?

• O que você pode dizer quando f é par e g é ímpar? Antes de responder pense um pouco na função constante de valor zero.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que, $x \in A \Longleftrightarrow -x \in A$. Neste exercício demonstraremos que, se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então existem funções $f_p, f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisfazem as seguintes duas condições:

- f_p é par e f_i é ímpar.
- $f = f_p + f_i$.

f_p é chamada a *parte par de* f, e f_i é chamada a *parte ímpar de* f.

Para conseguir essa decomposição, desenvolva o seguinte roteiro:

a. Observe que o gráfico da função $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $x \longmapsto f(-x)$, é obtido fazendo a reflexão do gráfico de f com respeito ao eixo y. Note que, podemos escrever $g(x) = f(-x)$.

b. Desejamos achar uma função par f_p e uma função ímpar f_i, tais que $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$, para todo $x \in A$. Verifique que essas funções devem satisfazer $g(x) = f_p(x) - f_i(x)$.

c. Verifique que $f_p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e que $f_i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo $x \in A$.

d. Mais ainda, verifique que as funções f_p e f_i são únicas. Isto significa, que se $f = \mathcal{P} + \mathcal{I}$, onde $\mathcal{P}$ é uma função par e $\mathcal{I}$ é uma função ímpar, então, necessariamente, $\mathcal{P} = f_p$ e $\mathcal{I} = f_i$.

8. Ache funções f_p par e f_i ímpar, tais que $f = f_p + f_i$, para cada uma das seguintes funções. Em cada caso, esboce os gráficos de f, f_p e f_i:

a. $f : (-5, 5) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 3$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - 3x$.

c. $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x^3-1}{x}$.

d. $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

e. $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto [x]$.

9. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada

- positiva, se $f(x) > 0$ para todo $x \in A$,
- negativa, se $f(x) < 0$ para todo $x \in A$,
- não-negativa, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$,
- não-positiva, se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in A$,

a. Mostre exemplos de: uma função positiva; uma função negativa; uma função não-negativa; uma função não-positiva e de uma função que não seja desses tipos.

b. Descreva as características que deve possuir o gráfico de uma função de cada um dos tipos listados acima.

c. Existem funções que são simultaneamente positivas e negativas? Caso afirmativo, quantas são essas funções?

d. Existem funções que são simultaneamente não-positivas e não-negativas? Caso afirmativo, quantas são essas funções?

e. É verdade que toda função positiva é não-negativa? E o contrário é também verdade? Isto é, toda função não-negativa é positiva?

f. É verdade que toda função negativa é não-positiva? E o contrário é também verdade? Isto é, toda função não-positiva é negativa?

10. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. A *função módulo de f* é a função $|f| : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela relação $|f|(x) = |f(x)|$.

a. Para cada uma das funções f dadas, determine a função $|f|$ e desenhe o seu gráfico:

(i) $f(x) = x^3$, **(iii)** $f(x) = x^2 - 2$,

(ii) $f(x) = 1 - 2x$, **(iv)** $f(x) = 1 + (x-1)^2$,

b. Em geral, descreva as características gráficas da função $|f|$, verifique que $|f|$ é uma função não-negativa.

Auto-avaliação

Você entendeu bem como construir funções usando as operações de adição e multiplicação? Compreendeu a forma dos gráficos das funções $f_n(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$? Assimilou as noções de função par e função ímpar? Fez todos os exercícios desta aula? As noções aqui apresentadas são muito importantes. Se você ficou com alguma dúvida, procure os tutores. Faça muitos desenhos de gráficos de funções.

Aula 25 – Domínios e operações com funções - continuação

Objetivos

- Analisar o domínio de funções definidas em termos de expressões ou fórmulas matemáticas.
- Compreender as funções racionais e as funções algébricas.
- Definir funções, deslocando horizontal e verticalmente funções conhecidas.

Conceitos:
Funções e suas operações, polinômios e fatoração, curvas planas.

Na Aula 24, fizemos uma análise comparativa dos gráficos das funções $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Nesta aula continuaremos a nossa análise das funções reais de variável real, conhecendo outros tipos de funções e estudando as suas propriedades. Começamos analisando duas classes importantes de funções:

- As funções $g_n(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, onde $n \geq 1$.
- As funções $r_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, onde $n \geq 2$.

Para isso, é importante ter presentes as seguintes propriedades:

Se $f(x)$ é uma função da variável x, então:
A. o domínio da função $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ é:

$$\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ e } f(x) \neq 0\}\,.$$

B. se n é ímpar, o domínio da função $r(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ é $\mathrm{Dom}(f)$.
Por outro lado, se n é par, o domínio da função $r(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ é:

$$\mathrm{Dom}(r) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ e } f(x) \geq 0\}\,.$$

A propriedade A segue do fato de que o quociente de dois números reais é um número real se, e somente se, o denominador (divisor) é diferente de zero. E a propriedade B é conseqüência da definição da raiz $n-$ésima de um número real: se n é par, a raiz $n-$ésima de um número $a \in \mathbb{R}$ é um número real apenas quando $a \geq 0$.

Exemplo 6

No Exemplo 10 c, da Aula 24, vimos que a função $g(x) = \dfrac{1}{x}$ é ímpar e que o seu domínio é $\text{Dom}(g) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Para visualizar o gráfico de g, observamos que:

- $g(1) = \frac{1}{1} = 1$. Portanto, $(1, 1) \in \text{Graf}(g)$.
- se $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ e $x_2 > x_1 > 1$, então $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < 1$. Em particular, os valores de $g(x)$ vão diminuindo e se aproximando de zero conforme x aumenta.
- se $x_1, x_2 \in (0, 1)$ e $0 < x_1 < x_2 < 1$, então $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > \frac{1}{1} = 1$. Isto é, os valores de $g(x)$ são cada vez maiores conforme $x > 0$ esteja mais perto de 0.
- como $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$, a função g é ímpar e, portanto, o seu gráfico é simétrico com respeito à origem. Logo, não é necessário fazer uma análise do comportamento dos valores de g no intervalo $(-\infty, 0)$.

Na **Figura 25.1**... Note que a reta vertical $x = 0$ e a reta horizontal $y = 0$ não intersectam $\text{Graf}(g)$, pois $0 \notin \text{Dom}(g)$ e 0 não pertence à imagem de g.

Na **Figura 25.2**... Pela simetria do gráfico com respeito ao eixo y, vemos que a função g_2 é uma função par. Essa propriedade é válida para todas as funções g_n, onde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, par.

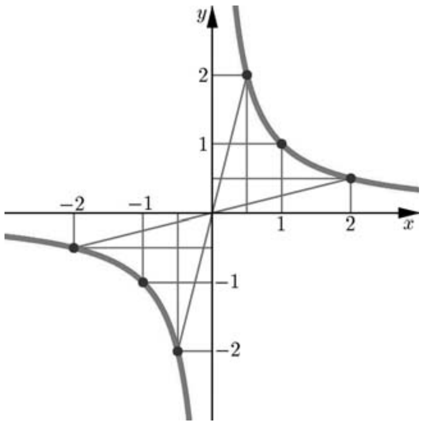


Figura 25.1: Gráfico de $g(x) = \frac{1}{x}$.

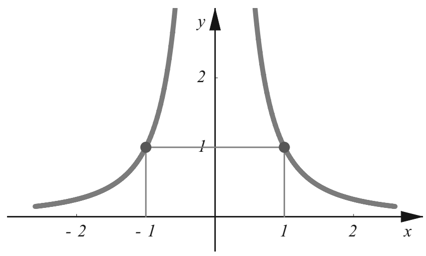


Figura 25.2: $g_2(x) = \frac{1}{x^2}$.

Na **Figura 25.1** mostramos o gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Observe a simetria desse gráfico com respeito à origem. O gráfico é constituído de duas partes disjuntas.

Exemplo 7

Generalizando o exemplo anterior, sejam as funções $g_n(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Em virtude da propriedade A, temos: $\text{Dom}(g_n) = \mathbb{R} - \{0\}$, para todo $n \geq 1$. Além disso,

- Se n é par, então $g_n(x)$ é uma função par.

De fato, se $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, então $g_{2k}(-x) = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = g_{2k}(x)$.

• Se n é ímpar, então $g_n(x)$ é uma função ímpar.

Com efeito, se $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $g_{2k+1}(-x) = \frac{1}{(-x)^{2k+1}} = \frac{1}{-x^{2k+1}} = -\frac{1}{x^{2k+1}} = -g_{2k+1}(x)$.

• Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, temos $g_n(1) = 1$, e $g_n(-1) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

• Se $x \in (0,1)$, então $1 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3} < \ldots < \frac{1}{x^n} < \ldots$

• Se $x \in (1,+\infty)$, então $1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^3} > \ldots > \frac{1}{x^n} > \ldots$

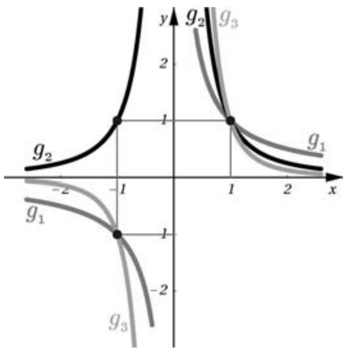


Figura 25.3: Gráficos de g_1, g_2 e g_3.

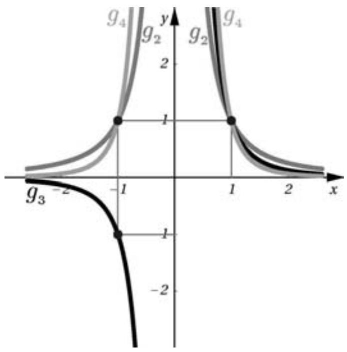


Figura 25.4: Gráficos de g_2, g_3 e g_4.

Nas **Figuras 25.3** e **25.4**, estão os gráficos de $g_n(x)$ para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$.

Observação

• Nos gráficos das funções g_n do exemplo anterior, observamos que os valores de $|g_n(x)|$ aumentam indefinidamente conforme os valores de x vão se aproximando de zero. Dizemos então que a reta $x = 0$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de g_n.

• Similarmente, observamos que conforme os valores de $|x|$ aumentam, os valores de $g_n(x)$ vão ficando cada vez mais próximos de zero. Isto é, o gráfico dessas funções se aproxima do eixo x (reta $y = 0$), quando $|x|$ é grande. Nesse caso dizemos que a reta horizontal $y = 0$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de g_n.

• Em geral, se f é uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que os valores de $|f(x)|$ aumentam indefinidamente conforme x se aproxima de x_0 e $x \neq x_0$, dizemos que $x = x_0$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de f. Isso significa que os pontos do gráfico da função vão ficando cada vez mais próximos da reta $x = x_0$ conforme x se aproxima de x_0 e $x \neq x_0$.

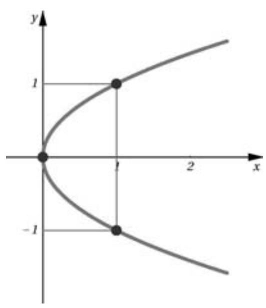


Figura 25.5: Parábola $x = y^2$.

Exemplo 8

Consideremos agora as funções $r_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

No Exemplo 3 b, da Aula 24, vimos que o domínio da função $r_2(x) = \sqrt{x}$ é $\text{Dom}(r_2) = [0, +\infty)$. Observe que:

$y = r_2(x) = \sqrt{x}$ se, e somente se, $y \geq 0$ e $y^2 = x$.

Portanto, o gráfico de $r_2(x)$ (**Figura 25.6**) consiste dos pontos do gráfico da parábola $x = y^2$ (**Figura 25.5**) que têm ordenada y não-negativa.

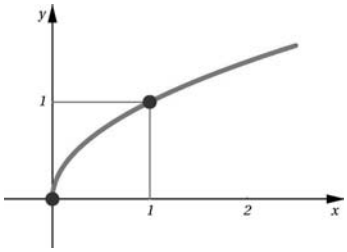


Figura 25.6: Gráfico de $r_2(x) = \sqrt{x}$.

Em geral, dado um número natural par $n > 0$, temos: $y = r_n(x) = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $y^n = x$ e $x \geq 0$. Além disso, $y \geq 0$ pois, se $n \in \mathbb{N}$ é par, a raiz $n-$ésima é um número não-negativo.

No caso em que $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, $y = r_n(x) \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x \in \mathbb{R}$, neste caso, $y < 0$ quando $x < 0$ e $y \geq 0$ quando $x \geq 0$. Logo:

$$\begin{cases} \text{Dom}(r_n) = [0, +\infty)\,, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é par e } n > 0, \\ \text{Dom}(r_n) = \mathbb{R}\,, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é ímpar}\,. \end{cases}$$

Reveja, na Aula 24, como foram feitos os gráficos das funções $f_n(x) = x^n$ (**Figuras 24.2**, **24.3** e **24.4**). Os gráficos das curvas planas definidas por $x = y^n$ são obtidos a partir dos gráficos das funções f_n *permutando as coordenadas dos pontos*. Isto é,

$$\text{Graf}(x = y^n) = \{(x, y) \,|\, x = y^n\} = \{(x, y) \,|\, (y, x) \in \text{Graf}(f_n)\}\,.$$

Reunindo essas informações, vemos que, quando n é par e positivo, o gráfico de r_n é formado pelos pontos (x, y) que pertencem à curva definida pela equação $x = y^n$, tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Veja, na **Figura 25.7**, os gráficos de $r_2(x) = \sqrt{x}$, $r_4(x) = \sqrt[4]{x}$ e $r_6(x) = \sqrt[6]{x}$.

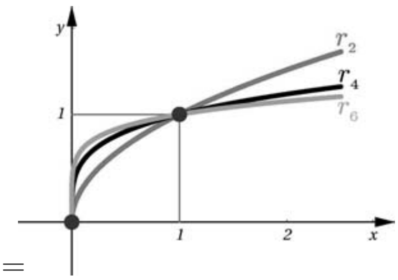


Figura 25.7: Gráficos de r_n, $n = 2, 4, 6$.

Note que a imagem das funções r_n, com n par e positivo, é o intervalo $[0, +\infty)$. No entanto, quando $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, o gráfico de r_n é exatamente o gráfico da curva $x = y^n$. Neste caso, a imagem de r_n é todo o $\mathbb{R}$. Na **Figura 25.8** mostramos os gráficos das funções $r_1(x) = x = I(x)$, $r_3(x) = \sqrt[3]{x}$ e $r_5(x) = \sqrt[5]{x}$.

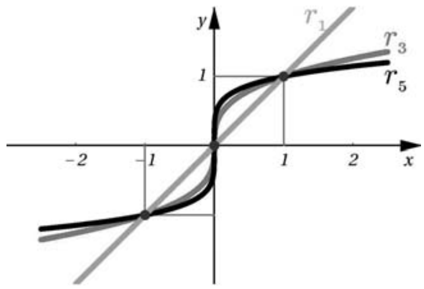


Figura 25.8: Gráficos de r_n, $n = 1, 3, 5$.

Nos seguintes exemplos, usaremos as funções $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$ e $r_n = \sqrt[n]{x}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, para analisar outras funções.

Exemplo 9

Determinemos o domínio e o gráfico da função $f(x) = -\sqrt{2x-4}$.

Sendo que $-\sqrt{2x-4} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $2x - 4 \geq 0$, ou seja, se, e somente se, $x \geq 2$, concluímos que $\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$.

O gráfico da função f é o gráfico da curva $y = -\sqrt{2x-4}$. Isto é, da curva $y^2 = 2x - 4$, com a restrição adicional $y \leq 0$.

Lembre que
A equação
$$x - h = a(y-k)^2$$
é representada graficamente pela parábola com vértice no ponto (h, k), foco $(h + \frac{1}{4a}, k)$, diretriz $x = h - \frac{1}{4a}$ e eixo de simetria $y = k$.

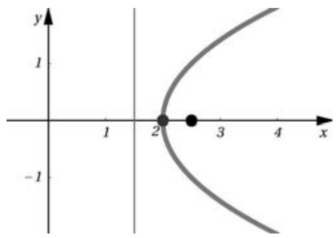


Figura 25.9: Gráfico de $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$.

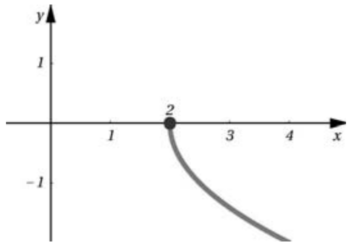


Figura 25.10: Gráfico de $f(x) = -\sqrt{2x-4}$.

Sabemos que o gráfico da curva $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$ é a parábola com vértice no ponto $(2, 0)$, foco no ponto $(\frac{5}{2}, 0)$ e eixo de simetria $y = 0$ (**Figura 25.9**). O gráfico de $f(x)$ consiste dos pontos (x, y) dessa parábola, tais que $y \leq 0$ (**Figura 25.10**).

Exemplo 10

Determinemos o domínio e o gráfico da função $f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$.

Sendo que $\sqrt{-x^2 - 3x + 4} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$, temos:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 - 3x + 4 \geq 0\}.$$

O discriminante do trinômio $-x^2 - 3x + 4$ (onde $a = -1$, $b = -3$ e $c = 4$) é

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25 > 0\,.$$

Logo, as raízes de $-x^2 - 3x + 4 = 0$ são $x_1 = \frac{3-5}{2(-1)} = 1$ e $x_2 = \frac{3+5}{2(-1)} = -4$.

Além disso, como $a = -1 < 0$, o trinômio é não-negativo para $x \in [-4, 1]$. Portanto, $\text{Dom}(f) = [-4, 1]$.

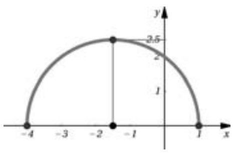


Figura 25.11: Exemplo 10.

O gráfico de $f(x)$ é o gráfico da curva $y = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$ no plano. Note que:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{-x^2 - 3x + 4} &\iff y^2 = -x^2 - 3x + 4\,, \quad y \geq 0 \\ &\iff y^2 = -(x^2 + 3x) + 4\,, \quad y \geq 0 \\ &\iff y^2 = -(x^2 + 3x + (\tfrac{3}{2})^2) + (\tfrac{3}{2})^2 + 4\,, \quad y \geq 0 \\ &\iff y^2 = -(x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{9}{4} + 4\,, \quad y \geq 0 \\ &\iff y^2 + (x + \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{25}{4}\,, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico de f é a parte do círculo centrado no ponto de coordenadas $(-\frac{3}{2}, 0)$ e de raio $\frac{5}{2}$, contida no semiplano $y \geq 0$ (**Figura 25.11**).

Em geral, as funções definidas a partir da adição, multiplicação, divisão, potenciação e módulo são chamadas *funções algébricas*. Todas as funções analisadas até agora, são funções algébricas.

Dentre as funções algébricas, destaca-se a seguinte classe:

Definição 25.1 (Função racional)

Uma *função racional* é o quociente de duas funções polinomiais. Isto é, se $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais, então $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional.

Exemplo 11

a. São funções racionais:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\,, \quad f_2(x) = x^2 + 2x - 1\,, \quad f_3(x) = \frac{3x - 4}{x^3 - x + 1}\,, \quad f_4(x) = \frac{x^4 - x^3 + \pi x}{x(x+1)}\,.$$

b. **Não são** funções racionais:

$$f_1(x) = \frac{1}{|x|}\,, \quad f_2(x) = x^2 + 2\sqrt{x} - 1\,, \quad f_3(x) = \frac{\sqrt[4]{x-4}}{x^3 - x + 1}\,, \quad f_4(x) = \sqrt{\frac{x^4 - \pi}{x - \pi}}\,.$$

c. As funções

$$f_1(x) = \left(\sqrt{\tfrac{x-1}{x+1}}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \tfrac{x-1}{x+1}\,,$$

são diferentes, pois f_1 **não** é uma função racional e f_2 é uma função racional.

Observação

- Toda função polinomial $g(x)$ é uma função racional, pois $g(x) = \dfrac{g(x)}{1}$.
- Se $g(x)$ e $h(x)$ são funções polinomiais, então o domínio da função racional $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ é $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(\frac{g}{h}) = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$.
- Se duas ou mais funções racionais são combinadas pelas operações de adição, multiplicação ou divisão, a função resultante é também uma função racional.
- Quando $h(x)$ não tem raízes reais, o domínio da função racional $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ é todo $\mathbb{R}$ e, quando $h(x)$ tem raízes reais, o domínio de f é união de intervalos abertos cujas extremidades são as raízes reais do denominador $h(x)$.

Volte e determine os domínios das funções racionais do Exemplo 11 a.

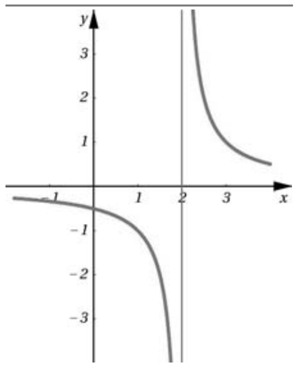


Figura 25.12: $g(x) = \frac{1}{x-2}$.
Observe que $g(x) = h(x-2)$, onde $h(x) = \frac{1}{x}$. Mais ainda, o gráfico de $g(x)$ é obtido deslocando duas unidades para a direita o gráfico de $h(x) = \frac{1}{x}$ (veja a **Figura 25.1**).

Definição 25.2

Um número $x_0 \in \text{Dom}(f)$ é *um zero* de $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, se $f(x_0) = 0$. Assim, um número x_0 pertencente ao domínio f é um zero da função racional $f(x)$ se, e somente se, $x_0 \in \text{Dom}(f)$ e é uma raiz real do numerador: $g(x_0) = 0$.

Exemplo 12

Determinemos o domínio da função racional $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

Temos $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$. Sendo que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$ se, e somente se, $x = 1$ ou $x = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\,,\, x \neq 2\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)\,. \end{aligned}$$

Calculando $f(x)$ numa quantidade suficientemente grande de valores $x \in \text{Dom}(f)$ (usando um computador ou uma máquina de calcular), podemos ver que o gráfico de f é o mostrado na **Figura 25.13**. Observe que o gráfico não intersecta as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$, pois 1 e 2 não pertencem ao domínio de f.

Contudo, você deve estar intrigado pelo fato de que, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$ e, obviamente, estar ansioso para cancelar o fator $x-1$ de modo a ficar apenas com $\frac{1}{x-2}$. No entanto, a função $g(x) = \frac{1}{x-2}$ **é diferente** da função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$. De fato,

$$\begin{aligned} \text{Dom}(g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \neq 0\} \\ &= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \neq \text{Dom}(f). \end{aligned}$$

A função f não está definida para $x = 1$, mas $g(1) = -1$, veja a **Figura 25.12**.

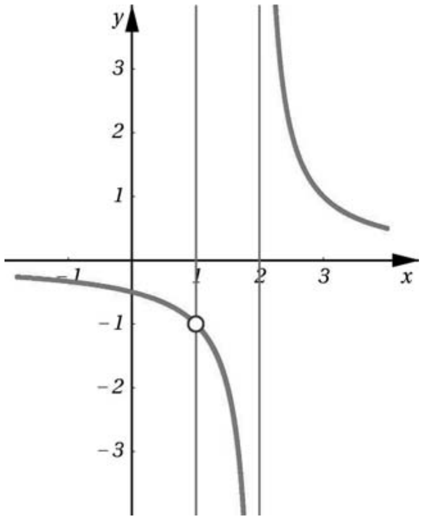


Figura 25.13: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

Mais ainda, note que o cancelamento do fator $x-1$ na expressão $\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$ não é feito de graça. O preço que devemos pagar é o de garantir que $x-1 \neq 0$, pois o cancelamento equivale a dividir o numerador e o denominador da expressão por $x-1$ e, como bem sabemos, não é permitido dividir por zero.

Portanto, a função $f(x)$ pode ser definida pela mesma expressão que define a função g, **acrescentando a condição** $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 1\,,\ x \neq 2.$$

Observação

• A análise feita no exemplo anterior, descreve um fato que é válido em geral: Se $f(x) = \dfrac{g(x) \cdot h(x)}{g(x) \cdot k(x)}$, onde $g(x)$, $h(x)$, e $k(x)$ são funções, então:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) = &\ \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \cdot h(x) \in \mathbb{R}\,,\ g(x) \cdot k(x) \in \mathbb{R}\,,\ g(x) \cdot k(x) \neq 0\} \\ = &\ \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h) \cap \text{Dom}(k) - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \ \text{ou}\ \ k(x) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Portanto, para podermos cancelar o fator $g(x)$ no numerador e no denominador da expressão que define a função f, devemos colocar a condição $g(x) \neq 0$.

• Observe que, no exemplo anterior, a reta $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f. No entanto, note que a reta $x = 1$ não intersecta o gráfico de f, mas também **não é** uma assíntota desse gráfico. Em geral, se x_0 é uma raiz real do denominador e não é uma raiz real do numerador de uma função racional f, então a reta vertical $x = x_0$ é uma assíntota do gráfico da função f.

Exemplo 13

Determinemos o domínio e o gráfico da função racional $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-x-1}$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \phi\,,\, x \neq 1-\phi\} \\ &= (-\infty, 1-\phi) \cup (1-\phi, \phi) \cup (\phi, +\infty)\,,\end{aligned}$$

onde $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea. Logo, as retas verticais $x = \phi$ e $x = 1-\phi$ não intersectam o gráfico de f e como ϕ e $1-\phi$ não são raízes reais de $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, essas retas são assíntotas verticais do gráfico de f.

Para determinar os pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo x, devemos achar os números $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tais que $f(x) = 0$. Essa condição significa $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e $x^3 - 1 = 0$. As raízes dessa equação são as três raízes cúbicas da unidade, no entanto, apenas a raiz $x = 1$ é real e pertence a $\mathrm{Dom}(f)$. Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

Além disso, $f(x)$ tem sinais constantes em cada um dos intervalos:

$(-\infty, 1-\phi)$, $(1-\phi, 1)$, $(1, \phi)$ e $(\phi, +\infty)$.

Analisemos os sinais de $f(x)$ na tabela abaixo:

intervalo $\rightarrow$	$(-\infty, 1-\phi)$	$(1-\phi, 1)$	$(1, \phi)$	$(\phi, +\infty)$
sinal de $x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
sinal de x^2+x+1 $(\Delta < 0)$	$+$	$+$	$+$	$+$
sinal de x^2-x-1	$+$	$-$	$-$	$+$
sinal de $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Reunindo essas informações e avaliando f em muitos pontos do domínio (usando um computador ou uma máquina de calcular), podemos fazer um esboço do gráfico de f como o mostrado na **Figura 25.14**.

Na disciplina de Cálculo I, você aprenderá a esboçar esses tipos de gráficos usando os conceitos de limite, continuidade e derivada.

Nota: O gráfico da **Figura 25.14**, foi traçado usando um programa de computador do tipo CAS (sistema de computação algébrica) que, entre outras muitas características, permite o desenho de gráficos de funções reais. No entanto, para determinarmos a forma exata do gráfico, são necessários os conceitos de limite, continuidade e derivada, que serão apresentados no Cálculo I.

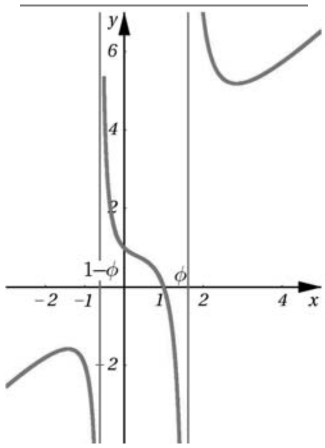


Figura 25.14: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x-1}$.

Exemplo 14

A função $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x^2 - 3x + 2}$ é racional, determinemos o seu domínio.

Temos $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$, onde: $g(x) = x - \frac{1}{x}$, e $h(x) = x^2 - 3x + 2$.

Note que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Logo,

Na equação 25.1, do Exemplo 14... Preste muita atenção ao fato de que a função definida por $F(x) = \frac{x+1}{x^2(x-2)}$, sem mais condições, é diferente de $f(x)$. De fato, note que: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$, enquanto que $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$. A igualdade (25.1) significa que as funções $f(x)$ e $F(x)$ são avaliadas da mesma forma quando $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(\tfrac{1}{h}) = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \{1, 2\}) \\ &= \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)\,.\end{aligned}$$

Observe que, se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, isto é, $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq 2$, temos:

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x}\frac{x^2 - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x(x-2)}\,. \quad (25.1)$$

Logo, $x_0 = -1$ é o único zero de $f(x)$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$ são assíntotas verticais do gráfico de f. A reta vertical $x = 1$ não é assíntota vertical, apenas não intersecta o gráfico de f. Vejamos, na tabela a seguir, a variação do sinal de f no seu domínio:

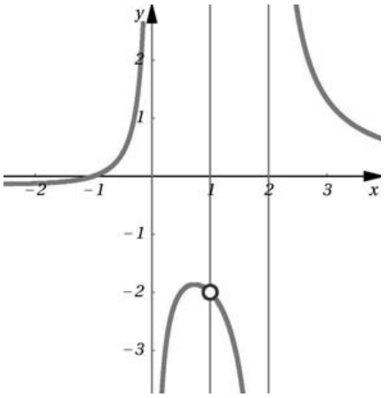


Figura 25.15: $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x^2 - 3x + 2}$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{x(x-2)}$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Gráfico enganoso...
O gráfico da **Figura 25.15** é um típico exemplo do engano da nossa percepção. Veja que, uma análise mais apurada, usando conceitos a serem abordados no Cálculo I, permite visualizar a forma exata do gráfico perto do ponto de interseção com o eixo x, detalhe que mostramos na figura abaixo, onde mudamos a escala dos eixos para melhor visualização..

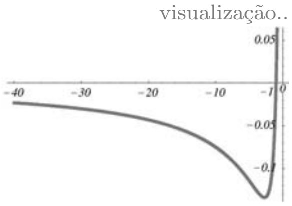


Figura 25.16: Gráfico de f perto de $x = -1$.

O gráfico de f, mostrado na **Figura 25.15**, foi desenhado usando um programa de computador. Mas, note que ele possui as características que aqui descrevemos.

Analisemos agora uma função algébrica.

Exemplo 15

Determinemos o domínio e o gráfico da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x(x-2)}}$.

Observe que $f(x) \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\frac{x^2-4}{x(x-2)} \geq 0$. Por sua vez, $\frac{x^2-4}{x(x-2)} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x \neq 0$ e $x \neq 2$.

Colocando as condições $x \neq 0$ e $x \neq 2$, temos $\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x}$.

Portanto, $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\,,\, x \neq 2 \text{ e } \frac{x+2}{x} \geq 0\}$.

Como $f(x) = 0$ se, e somente se, $\frac{x+2}{x} = 0$, que equivale a $x = -2$, devemos analisar o sinal de $\frac{x+2}{x}$ nos intervalos $(-\infty, -2]\,,\, (-2, 0)\,,\, (0, 2)$ e $(2, +\infty)$:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+2}{x}$	$+$	$-$	$+$	$+$

Logo, $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Observe que as retas verticais $x = 0$ e $x = 2$ não intersectam o gráfico de f.

A primeira dessas retas é uma assíntota vertical do gráfico, mas não a segunda, pois 2 é raiz do polinômio $x^2 - 4$, numerador do radicando da expressão que define $f(x)$. Reunindo essas informações e avaliando f em muitos pontos de $\text{Dom}(f)$, com ajuda de um computador, vemos que o gráfico de f é o mostrado na **Figura 25.17**.

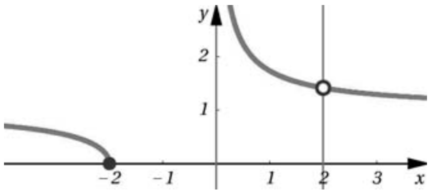


Figura 25.17: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x(x-2)}}$.

Finalizamos esta aula apresentando uma propriedade muito utilizada no desenho de gráficos de funções.

Na Aula 24 você viu que, se conhecemos o gráfico de uma função $f(x)$, então o gráfico da função $F(x) = f(x) + k$ é obtido deslocando o gráfico de f na direção vertical: para cima, quando $k \geq 0$ e para baixo, se $k < 0$.

No entanto, considere as funções:

$g(x) = (x+1)^2 \quad$ e $\quad h(x) = (x-2)^2$.

Qual a relação entre os gráficos de g e h, com respeito ao gráfico de $f(x) = x^2$?

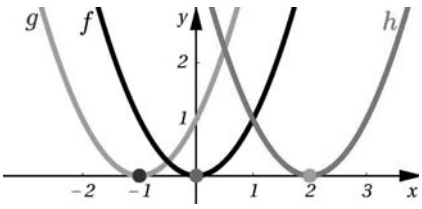


Figura 25.18: Gráficos de f, g e h .

Note que os gráficos das funções g e h são as parábolas mostradas na **Figura 25.18**, obtidas deslocando a parábola do gráfico de f na direção horizontal.

De modo geral:

> Deslocamento de gráficos na direção horizontal
> Se o gráfico de uma função $f(x)$ é conhecido e $k \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva, então:
> • o gráfico de $g(x) = f(x+k)$ é obtido, deslocando k unidades para a *esquerda* o gráfico de f e o seu domínio é $\{x + k \,|\, x \in \text{Dom}(f)\}$.
> • o gráfico de $h(x) = f(x-k)$ é obtido, deslocando k unidades para a *direita* o gráfico de f e o seu domínio é $\{x - k \,|\, x \in \text{Dom}(f)\}$.

Exemplo 16

Analisemos as funções:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1},\ x \geq 1,\ g(x) = f(x-2) \ \text{ e } \ h(x) = f(x-2) + 1.$$

O domínio de f é $\mathrm{Dom}(f) = [1, +\infty)$, e o seu gráfico corresponde à parte da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ com $x \geq 1$ e $y \geq 0$.

Note que $g(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. O gráfico de g é obtido, deslocando o gráfico de f duas unidades para a direita e o seu domínio é $\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 2 \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 2 \geq 1\} = [3, +\infty)$.

Similarmente, note que $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1$. O gráfico de h é obtido, deslocando o gráfico de f duas unidades para a direita e uma unidade para cima. Além disso, $\mathrm{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 2 \in \mathrm{Dom}(f)\} = \mathrm{Dom}(g) = [3, +\infty)$.

Nas **Figuras 25.19**, **25.20** e **25.21**, esboçamos os gráficos de f, g e h.

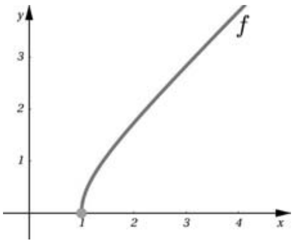


Figura 25.19: Gráfico de $f(x)$.

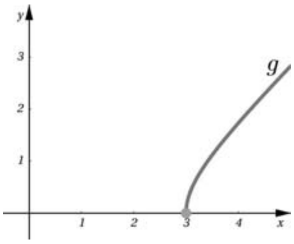


Figura 25.20: Gráfico de $g(x)$.

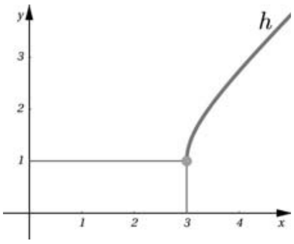


Figura 25.21: Gráfico de $h(x)$.

Exemplo 17

Determinemos o domínio e o gráfico da função $f(x) = |\sqrt[3]{x-2}|$.

Sabemos que $\sqrt[3]{t} \in \mathbb{R}$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $|\sqrt[3]{x-2}| \in \mathbb{R}$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Isto é, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Sabemos que o gráfico da função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ é o mostrado na **Figura 25.22**. O gráfico da função $g(x-2) = \sqrt[3]{x-2}$ é obtido deslocando o gráfico de g duas unidades para a direita, como vemos na **Figura 25.23**.

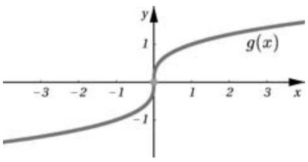


Figura 25.22: Gráfico de $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

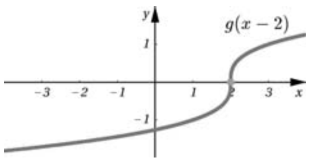


Figura 25.23: Gráfico de $g(x-2)$.

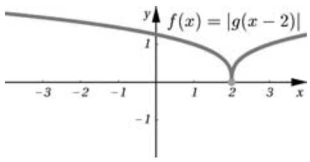


Figura 25.24: Gráfico de $|g(x-2)|$.

Finalmente, o gráfico da função $f(x) = |g(x-2)|$ é obtido refletindo, com respeito ao eixo x, a parte do gráfico da função $g(x-2)$ que está no semiplano inferior, como vemos na **Figura 25.24**.

Resumo

Nesta aula aprendemos como determinar o domínio de muitos tipos de funções algébricas e desenvolvemos técnicas para desenhar os seus gráficos usando os conceitos estabelecidos nos Módulos 1, 2 e 3. Apresentamos as funções racionais e analisamos algumas das suas propriedades. Além disso, vimos que se o gráfico de uma função $f(x)$ é conhecido, então o gráfico de $f(x+k)$ é obtido deslocando o gráfico de f para a direita, se $k < 0$, e para a esquerda, se $k > 0$.

Exercícios

1. Determine o domínio de $f(x)$ e, esboçando o seu gráfico, determine a imagem de f, onde:

a. $f(x) = |2x-4|$. **b.** $f(x) = |2x-4|-1$.

c. $f(x) = |2x-3|-|3x-2|$. **d.** $f(x) = |3x-1|+|2x+4|$.

e. $f(x) = \sqrt{4x^2-4}$. **f.** $f(x) = -\sqrt{4x^2-4}$.

g. $f(x) = 3x^2-15x+18$. **h.** $f(x) = -\sqrt{4-2x^2}$.

i. $f(x) = |3x^2-15x+18|$ **j.** $f(x) = 2-\sqrt{x^2-2x}$.

2. Determine o domínio de $f(x)$, onde:

a. $f(x) = \sqrt{x^3-x-6}$. **b.** $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$.

c. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x+\sqrt{6-x}}$. **d.** $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$

e. $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{3x+2}}$. **f.** $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$.

g. $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3x}$, $f(x) > 0$. **h.** $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x}{1-x^2}}$.

i. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x+4}}$. **j.** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^3+x^2}}$.

l. $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x+2}$. **m.** $f(x) = \sqrt{(x-2)(x^2+x-12)}$.

n. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2-1}} - \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$.

3. Dentre as funções dadas no exercício anterior, você deve:

a. identificar as que são racionais;

b. determinar as interseções do gráfico de f com o eixo x;

c. determinar as suas assíntotas verticais, caso existam;

d. estudar o sinal de f.

4. Use funções conhecidas e deslocamentos para determinar o domínio e esboçar o gráfico de $f(x)$, onde:

a. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. **b.** $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$.

c. $f(x) = \frac{1}{x-2}+3$. **d.** $f(x) = |x-2|+1$.

e. $f(x) = |x^2-2x+1|$. **f.** $f(x) = \sqrt{|x-2|}+1$.

g. $f(x) = (x+1)^2+1$. **h.** $f(x) = \sqrt[3]{x+1}-1$.

i. $f(x) = |x^2-2x|$. **j.** $f(x) = |2x-3|-2$.

Indicação - Exercício 1
Para **a**, **b**, **c** e **d**, estude o sinal das expressões dentro dos módulos, reescreva $f(x)$ nos diversos intervalos obtidos e, então, desenhe o gráfico.
Para o item **e**, veja que $y = \sqrt{4x^2-4}$ equivale a $y^2 = 4x^2-4$ com $y \geq 0$.
Nos outros itens, esboce o gráfico de maneira similar, mas preste muita atenção no sinal de y.
Para determinar o domínio nos itens **e**, **f**, **h** e **j**, você deve resolver uma desigualdade.

Auto-avaliação

Se você fez os Exercícios 1 e 2, então compreendeu bem as técnicas para determinar o domínio de uma função algébrica e sabe esboçar o seu gráfico. No Exercício 3, avaliamos se você sabe determinar quando uma reta vertical é assíntota do gráfico de uma função racional. Se você entendeu bem as técnicas de deslocamento de gráficos, então não deve ter dificuldade com o Exercício 4. É muito importante que faça todos os exercícios e entenda bem os exemplos apresentados nesta aula. Caso ainda tenha alguma dúvida, consulte os tutores.

§4. Composição e funções invertíveis

Nesta seção apresentaremos uma importante operação entre funções, a *composição*.

Essa operação nos permite:

- construir novas funções a partir de funções dadas,
- decompor uma função em funções mais simples.

A composição de funções é também fundamental no estudo de processos iterativos, isto é, que se repetem uma e outra vez.

Na Aula 32, veremos importantes aplicações do processo de iteração na análise de modelos biológicos de crescimento populacional.

Além disso, aprenderemos que algumas funções possuem uma *inversa com respeito à operação de composição*. Essas funções são denominadas *invertíveis*. A noção de função invertível será de fundamental importância nas Aulas 30 e 31.

Aula 26 – A operação de composição

Objetivos

Conceitos:
Funções, domínio, imagem e operações com funções.

- Compreender a operação de composição de funções.
- Usar a operação de composição para construir novas funções.
- Descrever uma função dada como a composição de outras funções.
- Analisar graficamente a operação de composição.

Consideremos a função $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Ao calcular o valor $f(x)$ para um $x \in \mathbb{R}$ dado, observamos que é bem mais fácil efetuar as contas com a expressão $(x-1)^2$, do que com a expressão $x^2 - 2x + 1$. Isto é, para calcular $f(x)$ é mais simples subtrair 1 de x e elevar o resultado ao quadrado do que elevar x ao quadrado, subtrair o dobro de x e ainda adicionar 1.

Ao calcular $f(x)$ usando a expressão $(x-1)^2$, na verdade, avaliamos duas funções: a primeira é a função $g(x) = x - 1$ avaliada em x e a segunda é a função $h(y) = y^2$ avaliada em $g(x)$. Isto é, para avaliar $f(x) = h(g(x))$ procedemos da seguinte maneira:

A expressão $h(g(x))$ é lida como h de g de x.

$$x \xmapsto{g} g(x) = x - 1 \xmapsto{h} h(g(x)) = h(x-1) = (x-1)^2 = f(x)\,.$$

Dessa forma, vemos que a função f é constituída por duas funções de características mais simples, a função $h(y) = y^2$ e a função $g(x) = x - 1$ avaliadas *uma após a outra*.

Consideremos agora a função $F(x) = (x-1)^2 - 1$. Usando as funções g e h definidas acima, vemos que o cálculo $F(x)$ é feito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xmapsto{g} & g(x) & \xmapsto{h} & h(g(x)) & \xmapsto{g} & g(h(g(x))) \\ x & \xmapsto{g} & x-1 & \xmapsto{h} & (x-1)^2 & \xmapsto{g} & (x-1)^2 - 1 = F(x)\,. \end{array}$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R}$, o cálculo de $F(x)$ é feito calculando primeiro $g(x)$, depois avaliamos h nesse valor, obtendo $h(g(x))$ e, finalmente, avaliamos g em $h(g(x))$, dando origem ao valor $F(x) = g(h(g(x)))$.

Essa maneira de pensar nas funções, se assemelha ao procedimento de máquinas numa linha de produção. Cada máquina recebe uma certa matéria prima, como *entrada*, e dá lugar a uma determinada *saída*. Na **Figura 26.1**, a máquina f recebe como entrada x e produz $f(x)$. Em seguida, a máquina g recebe como entrada $f(x)$ e produz $g(f(x))$. Contudo, há uma máquina que efetua todo o processo de uma vez só, esta máquina é chamada $g \circ f$.

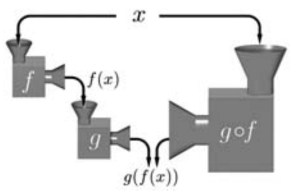


Figura 26.1: Funções vistas como máquinas.

Conforme as considerações anteriores, fazemos a seguinte definição.

O símbolo $g \circ f$...
Usado para designar a composição da função g com a função f, lê-se *g composta com f*.

Definição 26.1 (Composição de funções)
Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções, tais que $f(A) \subset B$. A função $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, é chamada a *composta de g com f* e o símbolo $\circ$ designa a *operação de composição*.

Devemos prestar muita atenção à condição sob a qual é possível fazer a composição de duas funções. Na Definição 26.1, vemos que a função g pode ser avaliada apenas em números do conjunto $B = \text{Dom}(g)$. Por causa disso, exigimos que a imagem de f esteja contida no domínio de g. No esquema da **Figura 26.2** mostramos a composta $g \circ f$ das funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. Note que

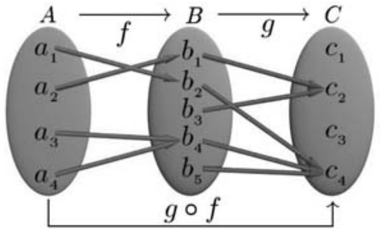


Figura 26.2: Composição de g com f.

$$f(a_1) = b_2,\ g(b_2) = c_4 \text{ e, portanto, } (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_2) = c_4\,,$$
$$f(a_2) = b_1,\ g(b_1) = c_2 \text{ e, portanto, } (g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_1) = c_2\,,$$
$$f(a_3) = b_4,\ g(b_4) = c_4 \text{ e, portanto, } (g \circ f)(a_3) = g(f(a_3)) = g(b_4) = c_4\,,$$
$$f(a_4) = b_4,\ g(b_4) = c_4 \text{ e, portanto, } (g \circ f)(a_4) = g(f(a_4)) = g(b_4) = c_4\,.$$

De modo geral, da Definição 26.1, temos:

Se f e g são funções reais de variável real, então a composição $g \circ f : \text{Dom}(g \circ f) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida apenas quando
$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f)\,|\, f(x) \in \text{Dom}(g)\} \neq \varnothing\,.$$

Exemplo 6

Dada a função $f(x) = \sqrt{x+2}$, determinemos funções g e h, tais que $f = h \circ g$.

Primeiramente observamos que $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,|\, x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty)$. Logo, a função $g(x)$ deve ter também por domínio o intervalo $[-2, +\infty)$.

Agora, nos perguntamos: o que é feito para calcular $f(x)$?

Observe que, dado $x \in [-2, +\infty)$, para determinarmos o valor $f(x)$, primeiro calculamos $x+2$ e depois extraímos a raiz quadrada do valor obtido. Assim, fazemos $g(x) = x+2$ e $h(x) = \sqrt{x}$. De fato, para cada $x \in [-2, +\infty)$, temos:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x+2) = \sqrt{x+2} = f(x)\,.$$

Exemplo 7

Determinemos $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, tais que $F = h \circ g \circ f$, onde $F(x) = \frac{1}{|x^2-4|}$.

Observe que, dado x tal que $x^2 - 4 \neq 0$, para calcularmos o valor de $F(x)$, primeiro calculamos o valor de x^2, depois o valor de $x^2 - 4$, a seguir, determinamos $|x^2 - 4|$ e, finalmente, invertemos para obter $\frac{1}{|x^2-4|}$.

Essa análise mostra que há mais de uma escolha para as funções f, g e h:

• Escolhendo $f(x) = x^2$, $g(x) = |x - 4|$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, temos:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(|x^2 - 4|) = \frac{1}{|x^2-4|} = F(x)\,.$$

• Escolhendo $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, temos:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2 - 4)) = h(|x^2 - 4|) = \frac{1}{|x^2-4|} = F(x)\,.$$

• Escolhendo $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 4$ e $h(x) = \frac{1}{|x|}$, temos:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(x^2 - 4) = \frac{1}{|x^2-4|} = F(x)\,.$$

A composição é uma operação no conjunto das funções reais de variável real (que pode ser efetuada sob as condições impostas na Definição 26.1). Porém, essa operação não possui as mesmas propriedades que a adição ou que a multiplicação de funções. De fato, nos exemplos seguintes veremos que a composição não é uma operação comutativa, isto é, em geral $g \circ f \neq f \circ g$. Ainda, nos exercícios, você deverá verificar que, em geral, a propriedade distributiva é também falsa.

Exemplo 8

Consideremos as funções $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x - 1$ e $h(x) = x^2$.

Segundo vimos anteriormente, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x - 1)^2$ é a composição de h com g, pois:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x - 1) = (x - 1)^2 = f(x)\,.$$

Também, a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = (x - 1)^2 - 1$, é a composição de g com f, pois:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x - 1)^2) = (x - 1)^2 - 1 = F(x)\,,$$

ou seja $F = g \circ f = g \circ (h \circ g)$.

Exemplo 9

Considerando ainda as funções g e h do exemplo anterior, vemos que:

$$h \circ g \neq g \circ h.$$

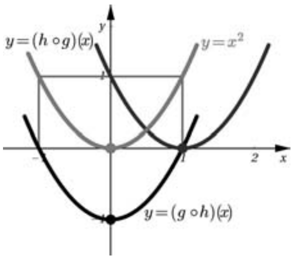


Figura 26.3: Exemplo 9.

Isto é, a operação de composição não é comutativa. De fato, observe que:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x-1) = (x-1)^2\,,$$

e

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2) = x^2 - 1\,,$$

são funções diferentes. Mais ainda, observe que o gráfico de $h \circ g$ é obtido deslocando o gráfico da parábola $y = x^2$ uma unidade para a direita. Enquanto que o gráfico de $g \circ h$ é obtido deslocando o gráfico da mesma parábola uma unidade para baixo. Veja a **Figura 26.3**.

Exemplo 10

Consideremos as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$. Determinemos as funções $g \circ f$, $f \circ g$ e os seus respectivos domínios.

Temos que: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty)$. As imagens correspondentes desses domínios pelas respectivas funções são:

$$f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty) \quad \text{e} \quad g([1, +\infty) = [0, +\infty)\,.$$

Faça o gráfico das funções f e g para visualizar as suas imagens.

Segundo a Definição 26.1, a função $g \circ f$ pode ser calculada apenas nos valores $x \in \text{Dom}(f)$, tais que $f(x) \in \text{Dom}(g)$. Isto é, o domínio de $g \circ f$ é

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1) \in [1, +\infty)\}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \in \text{Dom}(g \circ f) &\iff (x^2 - 1) \in [1, +\infty) \iff x^2 - 1 \geq 1 \iff x^2 \geq 2 \\ &\iff |x| \geq \sqrt{2} \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

Lembre que ...
O gráfico de $y = \sqrt{x-1}$ é obtido deslocando o gráfico de $y = \sqrt{x}$ uma unidade para a direita. Faça o gráfico!

Além disso, se $x \in \text{Dom}(g \circ f)$, temos:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt{(x^2-1) - 1} = \sqrt{x^2 - 2}\,.$$

Da mesma forma, a função $f \circ g$ pode ser calculada nos valores $x \in \text{Dom}(f \circ g)$, onde:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ &= \{x \in [1, +\infty) \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty) = \text{Dom}(g)\,. \end{aligned}$$

Assim, se $x \in \text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g)$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 1 = (x-1) - 1 = x - 2\,.$$

Observe que, de novo, $g \circ f \neq f \circ g$. Veja a **Figura 26.4**.

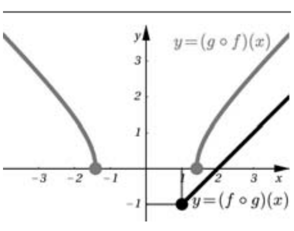


Figura 26.4: Exemplo 10.

Observe que a função constante de valor zero, $C_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é a *única* função com a propriedade que $C_0 + C_0 = C_0$. Similarmente, a função constante de valor 1, $C_1(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, é a *única* função tal que $C_1 \cdot C_1 = C_1$.

Analogamente, observe que a função identidade $I(x) = x$ é tal que $I \circ I = I$. No exemplo seguinte, vamos mostrar uma outra função $h(x)$, tal que $h \circ h = h$. Portanto, para a operação de composição existe mais de uma função f, tal que $f \circ f = f$. Nos exercícios você deverá construir outras funções com essa propriedade, chamada *idempotência*.

Exemplo 11

Analisemos a função $h \circ h$, onde $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Temos que $\text{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$. Além disso, $h(x)$ se expressa, sem módulo, da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{-x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 . \end{cases}$$

Como $h(x)$ assume apenas os valores 1 ou -1, o domínio de $h \circ h$ é o conjunto:

$$\text{Dom}(h \circ h) = \{x \in \text{Dom}(h) \,|\, h(x) \in \text{Dom}(h)\} = \text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{0\} .$$

Logo, para cada $x \neq 0$, temos:

$$x > 0 \implies (h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(1) = 1$$

$$x < 0 \implies (h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(-1) = -1 .$$

Portanto, $(h \circ h)(x) = h(x)$, para todo $x \in \text{Dom}(h) = \text{Dom}(h \circ h) = \mathbb{R} - \{0\}$. Na **Figura 26.5** mostramos o gráfico de h.

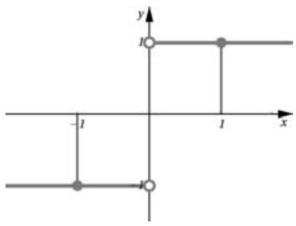


Figura 26.5: Gráfico de $h \circ h = h$..

Sabemos já que a operação de composição não é comutativa, entretanto, existem funções f e g que *comutam sob composição*. Vejamos:

Exemplo 12

Dada a função $f(x) = x + 1$, determinemos as funções $g(x)$ que comutam com $f(x)$ perante a composição. Isto é, determinemos as funções $g(x)$, tais que $f \circ g = g \circ f$.

Começamos observando que o domínio de $f(x)$ é $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e que a sua imagem é, também, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Se $g(x)$ é uma função que comuta com $f(x)$, temos duas condições sobre o domínio de g:

- a composição $f \circ g$ está definida, se $g(\text{Dom}(g)) \subset \text{Dom}(f) = R$
- a composição $g \circ f$ está definida, se $f(\text{Dom}(f)) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \subset \text{Dom}(g)$.

Portanto, o domínio de g é $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ e $g(\text{Dom}(g)) \subset \mathbb{R}$.

Vamos agora analisar a condição de comutação: $f \circ g = g \circ f$.

Essa condição significa que, para todo $x \in \mathbb{R}$, as quantidades:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1)\,,$$

são iguais. Isto é:

$$g(x) + 1 = g(x+1)\,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, g é uma função com a seguinte característica gráfica: o conjunto do plano obtido pelo deslocamento de $\text{Graf}(g)$ uma unidade para cima é o mesmo que o conjunto do plano obtido deslocando $\text{Graf}(g)$ uma unidade para a esquerda.

Observe que todas as funções da forma $g(x) = x + k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, têm a propriedade anunciada no parágrafo anterior. No entanto, não são as únicas funções com essa propriedade.

De fato, vejamos como construir todas as funções que comutam com $f(x)$: seja $a \in \mathbb{R}$ um número real qualquer, fixo. Vamos achar uma função $g(x)$ que comuta com $f(x)$ tal que $g(0) = a$.

Da condição $g(x+1) = g(x) + 1$, e $g(0) = a$, calculamos o valor de g em todos os inteiros, pois:

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0+1) = g(0) + 1 = a + 1\,, \\ g(2) &= g(1+1) = g(1) + 1 = a + 1 + 1 = a + 2\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

Analogamente, como $g(x) = g(x+1) - 1$, temos:

$$\begin{aligned} g(-1) &= g(-1+1) - 1 = g(0) - 1 = a - 1\,, \\ g(-2) &= g(-2+1) - 1 = g(-1) - 1 = (a-1) - 1 = a - 2\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

E, em geral, temos: $g(n) = a + n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Também, sabendo os valores de $g(x)$ para $x \in (0,1)$, calculamos os valores de $g(x)$ para $x \in (n, n+1)$ para qualquer inteiro n. De fato, suponhamos que $x = 2 + \frac{6}{10}$, então:

$$\begin{aligned} g(2+\tfrac{6}{10}) &= g(\tfrac{6}{10}+2) = g((\tfrac{6}{10}+1)+1) = g(\tfrac{6}{10}+1)+1 \\ &= (g(\tfrac{6}{10})+1)+1 = g(\tfrac{6}{10})+2\,. \end{aligned}$$

Portanto, para calcular $g(2+\frac{6}{10})$ basta conhecer o valor de $g(\frac{6}{10})$. Da mesma forma, calculamos que $g(-2+\frac{6}{10}) = g(\frac{6}{10}) - 2$.

Logo, se $x \in (n, n+1)$, com $n \in \mathbb{Z}$, então $x = (x-n)+n$, $x-n \in (0,1)$ e:

$$\boxed{g(x) = g((x-n)+n) = g(x-n)+n\,, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}}$$

Assim, basta definir uma função qualquer $g(x)$ no intervalo $[0,1]$, mantendo a condição $g(1) = g(0)+1$. Na **Figura 26.6**, mostramos o gráfico de uma função $g(x)$ que comuta com $f(x) = x+1$.

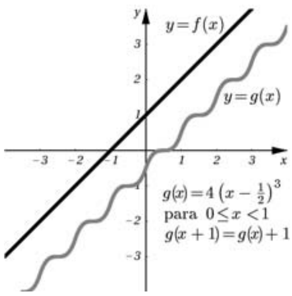


Figura 26.6: $g \circ f = f \circ g$.

O gráfico de $g \circ f$.

Sejam f e g duas funções, tais que $\quad f(\mathrm{Dom}(f)) \subset \mathrm{Dom}(g)\,.$

Em muitas situações, determinar o gráfico da composta $g \circ f$ chega a ser uma tarefa laboriosa. No entanto, há um procedimento gráfico, muito simples, para efetuar o cálculo de $(g \circ f)(x)$ de forma visual, a partir dos gráficos de f e g.

Para explicarmos melhor o procedimento, consideremos as funções:

$$f : \left[0, \tfrac{3}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \longmapsto \tfrac{3}{2} - x$$

$$g : \left(-\tfrac{3}{4}, 2\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \longmapsto (x-1)^2 - 1\,,$$

cujos gráficos são mostrados na **Figura 26.7**.

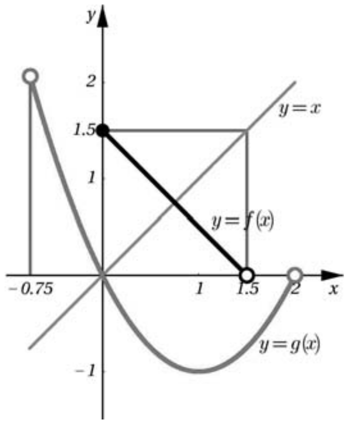


Figura 26.7: Gráficos de f e g.

Sendo que, $f(\mathrm{Dom}(f)) = f\left(\left[0, \frac{3}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right] \subset \left(-\frac{3}{4}, 2\right) = \mathrm{Dom}(g)$, a função $g \circ f : \left[0, \frac{3}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida.

Para construir o gráfico de $g \circ f$, devemos calcular $(g \circ f)(x)$ numa quantidade suficiente de valores $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g \circ f)$, e localizar no plano cartesiano os pontos de coordenadas $(x, (g \circ f)(x))$.

Seja $a \in \mathrm{Dom}(f) = \left[0, \frac{3}{2}\right)$.

Vejamos como localizar o ponto $(a, (g \circ f)(a))$ do gráfico de $g \circ f$.

Passo 1.

O ponto $(a, (g \circ f)(a))$ está localizado sobre a vertical $x = a$. Siga essa vertical do ponto $(a, 0)$ até a sua interseção com o gráfico de f no ponto de coordenadas $(a, f(a))$. Veja a **Figura 26.8**.

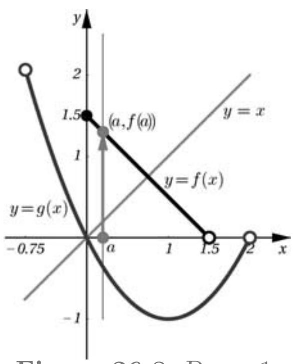


Figura 26.8: Passo 1.

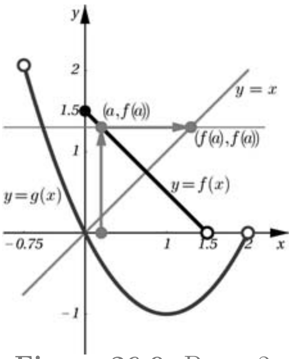


Figura 26.9: Passo 2.

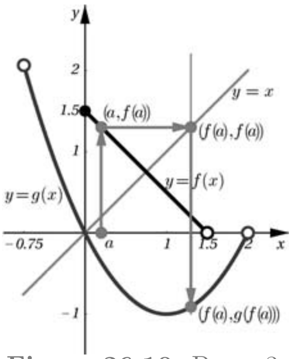


Figura 26.10: Passo 3.

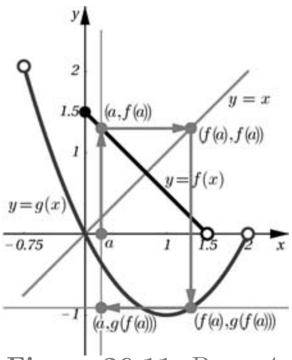


Figura 26.11: Passo 4.

Passo 2.

Siga pela horizontal $y = f(a)$ do ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f até o ponto $(f(a), f(a))$ localizado sobre a diagonal $y = x$. Veja a **Figura 26.9**.

Passo 3.

Como $a \in \text{Dom}(f)$ e $f(\text{Dom}(f)) \subset \text{Dom}(g)$, temos $f(a) \in \text{Dom}(g)$. Logo, a vertical $x = f(a)$ intersecta o gráfico de g no ponto de coordenadas $(f(a), g(f(a)))$.

Assim, partindo do ponto $(f(a), f(a))$, siga pela vertical $y = f(a)$ até o ponto $(f(a), g(f(a)))$. Veja a **Figura 26.10**.

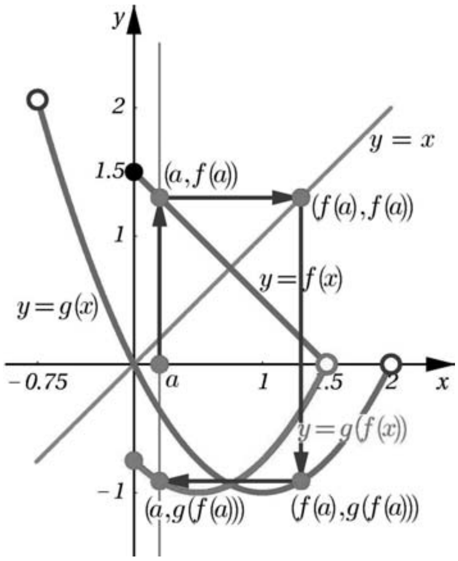


Figura 26.12: Gráfico final de $g \circ f$.

Passo 4.

Siga pela horizontal $y = g(f(a))$ partindo do ponto $(f(a), g(f(a)))$ até a reta vertical $x = a$.

O ponto $(a, g(f(a)))$ determinado na vertical $x = a$ é o ponto do gráfico de $g \circ f$ correspondente à abscissa a. Veja a **Figura 26.11**.

Continue a aplicar o procedimento descrito nos passos de 1 a 4 em outros pontos do intervalo

$$\left[0, \tfrac{3}{2}\right) = \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g \circ f),$$

para verificar que o gráfico de $g \circ f$ tem a forma que mostramos na **Figura 26.12**.

Observe que o traçado do gráfico de $g \circ f$ é um procedimento puramente geométrico não precisando, assim, avaliar $(g \circ f)(x)$ em valor algum de x. Entretanto, o gráfico obtido pode ser bastante impreciso, mas, ainda assim, fornece informações qualitativas muito importantes sobre a função $g \circ f$.

Exemplo 13

Analisemos a função $F(x) = 2\sqrt{2\sqrt{x-1} - 2} - 1$.

Começamos observando que o domínio de F é (verifique!):

$$\text{Dom}(F) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2\sqrt{x-1} - 2 \geq 0\right\} = [2, +\infty).$$

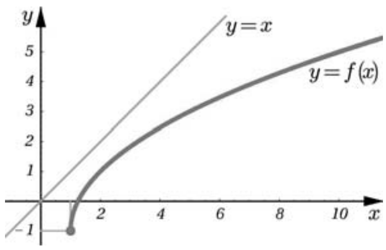


Figura 26.13: Gráfico de $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$.

Escrevendo $F(x)$ na forma:

$$F(x) = 2\sqrt{(2\sqrt{x-1}-1)-1} - 1\,,$$

vemos que:

$$F = f \circ f, \text{ onde } f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1\,.$$

Observe que o gráfico de f é obtido deslocando o gráfico de $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ uma unidade para a direita e uma para baixo, como mostramos na **Figura 26.13**.

Para termos uma idéia da forma do gráfico de $F = f \circ f$, escolhemos uma quantidade suficiente de valores x no domínio de F e aplicamos o procedimento descrito anteriormente a cada um deles de modo a obter os pontos correspondentes $(x, F(x))$ do gráfico de F.

A quantidade de pontos necessários para traçar o gráfico, depende da nossa percepção e, em muitas ocasiões, não precisam ser muitos.

Considere os valores $2, 4, 6, 8, 10 \in \text{Dom}(F)$ para a variável x e determine os pontos correspondentes $(x, F(x))$ do gráfico de F, como mostramos na **Figura 26.14**. Para melhorar a nossa idéia sobre o gráfico de F, repetimos o processo tomando mais valores de x. Na **Figura 26.15**, tomamos $x = 2, 3, 4, \ldots, 10$ e, na **Figura 26.16**, usamos a nossa percepção para traçar o gráfico final de F.

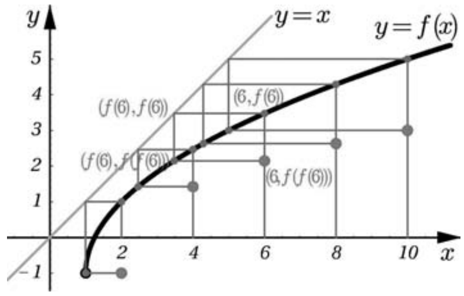


Figura 26.14: Pontos $(x, F(x))$, $x = 2, 4, \ldots, 10$.

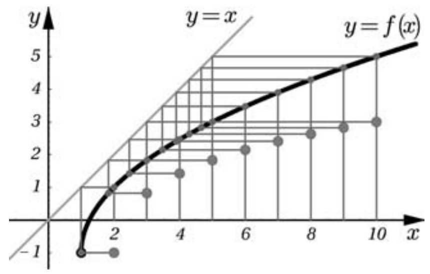


Figura 26.15: Pontos $(x, F(x))$, $x = 2, 3, \ldots, 10$.

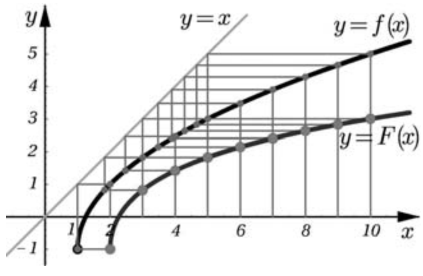


Figura 26.16: Gráfico de F.

Resumo

Nesta aula apresentamos a operação de composição de funções. Usamos essa operação para construir novas funções. Aprendemos a escrever uma função dada como a composta de funções mais simples. Vimos um procedimento para elaborar o gráfico da composta de duas funções.

Exercícios

1. Sendo $f(x) = x^2 + x - 2$, determine a função $g(x) = (f \circ f)(x)$ e calcule o valor de $g(2)$.

2. Sejam $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $g(x) = x^2$. Determine os domínios de $f \circ g$ e de $g \circ f$.

3. Considere as funções $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = 3x - a$. Determine os valores de a de modo que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

4. Complete as seguintes tabelas:

a.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	-1	2	3	-2	0	3	-1	1
$g(x)$	0	0	1	-1	2	-2	-3	4	-1
$(g \circ f)(x)$									
$(f \circ g)(x)$									
$(f \circ f)(x)$									
$(f \circ (g \circ g))(x)$									

b.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-2	2	2	-3	-4	-4	-4	-3
$g(x)$	1	0	0	-2	-1	1	-1	3	-2
$(f \circ g)(x)$									
$(g \circ f)(x)$									
$(f \circ f)(x)$									
$(g \circ g \circ g)(x)$									
$(f \circ g \circ f \circ g)(x)$									

5. Considere as funções:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}\,, \quad g(x) = \frac{1}{x}\,, \quad h(x) = x^2 - 1\,.$$

a. Determine o domínio de $f(g(h(x)))$.

b. Determine o domínio de $h(g(x))$ e faça uma análise gráfica para determinar 10 pontos do gráfico de $h \circ g$.

6. Determine funções f e g, tais que $F = g \circ f$, onde:

a. $F(x) = \sqrt{3x - x^2}\,.$

b. $F(x) = \sqrt[3]{5 - \dfrac{2}{x+1}}\,.$

c. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\,.$

d. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\,.$

7. Seja $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$.

a. Determine a imagem de f.

b. Determine $f \circ f$.

8. Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x - 1$ e $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Determine:

a. $(f \circ g \circ h)(x)$.

b. $(f \circ h \circ g)(x)$.

c. $(h \circ f \circ g)(x)$.

9. Determine os domínios e as expressões de $f \circ g$ e $g \circ f$, onde:

a. $f(x) = |x - 3|$ e $g(x) = 2x + 3$.

b. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ e $g(x) = \frac{x+3}{x}$.

c. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

d. $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^4 - 1$.

e. $f(x) = 2x^3 - 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$.

f. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4$.

g. $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ e $g(x) = 1 - x^3$.

10. A composição não é distributiva com respeito à adição de funções!

Com efeito, considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$, $g(x) = -x$ e $h(x) = x^2$. **a.** Determine $h \circ (f + g)$.

b. Determine $h \circ f + h \circ g$.

c. Compare as funções obtidas nos itens anteriores.

11. Mostre três funções f, diferentes das consideradas na aula, com a propriedade $f \circ f = f$.

Sugestão: Use funções constantes.

12. Em cada item, diga se a igualdade é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta.

a. $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$.

b. $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

13. Desafio: Determine as funções g, tais que $g \circ f = f \circ g$, onde f é uma função constante.

14. Desafio: Use o exercício anterior para concluir que, se f é uma função tal que $g \circ f = f \circ g$ para qualquer função g , então $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, a única função que comuta com todas as funções é a função identidade.

Auto-avaliação

Fazendo os Exercícios de 1 a 9, você verá se entendeu bem a operação de composição, sabendo determinar o seu domínio e construindo o seu gráfico usando a técnica desenvolvida na aula. Se você compreendeu bem o desenvolvimento conceitual da aula, certamente poderá resolver também os Exercícios de 10 a 12. Caso ainda esteja inseguro, volte e reveja os conceitos, treine as técnicas e tente acompanhar os procedimentos desenvolvidos na aula.

Aula 27 – Funções invertíveis

Objetivos

- Definir as funções invertíveis e estabelecer a sua caracterização.
- Relacionar o gráfico de uma função invertível com o gráfico da sua inversa.

Conceitos:
Funções e operação de composição.

Na Aula 26 vimos que, dadas duas funções f e g, tais que a imagem de f está contida no domínio de g, podemos construir uma nova função $g \circ f$ denominada a composta de g com f. Vimos que a composição não possui todas as *boas* propriedades satisfeitas pelas operações de adição ou multiplicação de funções. No entanto, vimos que a função identidade, $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, desempenha o papel de elemento neutro: $f \circ I = I \circ f = f$, qualquer que seja a função f. Nesse contexto surge a seguinte questão: *quais as propriedades que uma função f deve satisfazer para ter um inverso com respeito à composição?*

Nesta aula, vamos responder essa pergunta. Porém, precisamos estabelecer exatamente o que iremos entender por inversa de uma função.

Definição 27.1
Uma função f é chamada *invertível*, quando existe uma função g, tal que:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = x \quad \text{e} \quad (f \circ g)(y) = y} \tag{27.1}$$

para todos x e y onde as composições estão definidas. A função g, quando existe, é chamada *inversa de f* e é designada por f^{-1}.

NOTA IMPORTANTE
Devemos ter muito cuidado para não confundir a função f^{-1} inversa de f definida ao lado, com a função $\frac{1}{f}$, definida por $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$. Esta última função faz corresponder a cada número $x \in \text{Dom}(f)$, tal que $f(x) \neq 0$, o número real que é inverso multiplicativo do número $f(x)$.

Exemplo 6

a. A função identidade $I(x) = x$ é o exemplo mais simples de uma função invertível. De fato, como $I \circ I = I$, vemos que $I^{-1} = I$.

b. No entanto, observe que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, verifica, também, a propriedade $f \circ f = I$, e portanto $f^{-1} = f$.

c. As funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ são inversas uma da outra.

Note que se f é invertível, então *apenas uma função é a sua inversa.*

De fato, suponhamos que f é invertível e que as funções g e h sejam inversas de f. Isto é:

$$g \circ f = I \quad \text{e} \quad f \circ g = I\,.$$
$$h \circ f = I \quad \text{e} \quad f \circ h = I\,.$$

Como a operação de composição é associativa, obtemos:

$$g = g \circ I = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I \circ h = h.$$

Das relações (27.1) vemos que se f é invertível, então a sua inversa, f^{-1} é também invertível e que a inversa de f^{-1} é a própria f:

$$\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$$

Quando f é invertível, vemos que a equação $y = f(x)$ equivale a $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. Assim, quando f é invertível e é definida por uma fórmula matemática, determinar a sua inversa equivale a resolver para x a igualdade $f(x) = y$, para cada y na imagem de f.

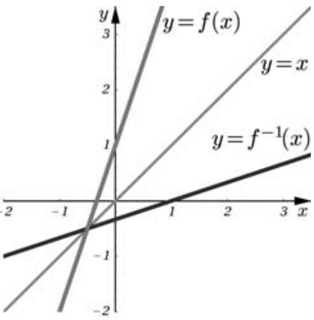


Figura 27.1: Exemplo 7.

Exemplo 7

A função $f(x) = 3x + 1$ é invertível. Determinemos a sua inversa.

Fazendo $y = 3x + 1$ e resolvendo para x, obtemos $x = \frac{1}{3}(y - 1)$.

Escrevendo $g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$, temos que $g = f^{-1}$.

De fato, $g(f(x)) = g(3x + 1) = \frac{1}{3}((3x + 1) - 1) = \frac{1}{3}\,3x = x$. Analogamente, verificamos que $f(g(y)) = f(\frac{1}{3}(y-1)) = 3(\frac{1}{3}(y-1))+1 = (y-1)+1 = y$. Logo, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$.

Observe, na **Figura 27.1**, que os gráficos de $f(x) = 3x+1$ e de $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$ são simétricos, um ao outro, com respeito à diagonal.

Exemplo 8

Sabe-se que a função $f(x) = \dfrac{2x-1}{5x+2}$ é invertível. Determinemos a sua inversa.

Procuramos por uma função $g(x)$, tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in \text{Dom}(g)$ e $g(x) \in \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{2}{5}\}$.

Assumindo que $g(x) \neq -\frac{2}{5}$, temos $f(g(x)) = \dfrac{2g(x)-1}{5g(x)+2} = x$. Resolvendo para $g(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} x = \frac{2g(x)-1}{5g(x)+2} &\iff x(5g(x)+2) = 2g(x) - 1 \\ &\iff 2x + 1 = (2 - 5x)g(x) \\ &\iff g(x) = \frac{2x+1}{-5x+2}, \quad x \neq \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

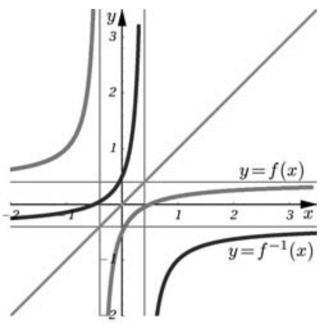


Figura 27.2: Exemplo 8.

Além disso, observe que $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2}{5}\}$.

Verifiquemos! Se $x \in \text{Dom}(f)$, então $x \neq -\frac{2}{5}$ e temos:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{2f(x)+1}{2-5f(x)} = \frac{2\,\frac{2x-1}{5x+2}+1}{2-5\,\frac{2x-1}{5x+2}} = \frac{2(2x-1)+(5x+2)}{2(5x+2)-5(2x-1)} \\ &= \frac{4x-2+5x+2}{10x+4-10x+5} = \frac{9x}{9} = x\,. \end{aligned}$$

Similarmente, vemos que $f(g(x)) = x$. Portanto, $f^{-1}(x) = g(x) = \dfrac{2x+1}{2-5x}$.

Observe, na **Figura 27.2**, que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos, um ao outro, com respeito à diagonal.

Atenção! *Nem toda função é invertível!*

Vejamos:

Exemplo 9

As funções mais simples que não são invertíveis são as funções constantes.

De fato, consideremos a função constante C_a de valor a. Se f é uma função qualquer, então $f \circ C_a = C_{f(a)} \neq I$.

Para verificarmos essa igualdade, tomemos $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, calculando:

$$(f \circ C_a)(x) = f(C_a(x)) = f(a) = C_{f(a)}(x)\,.$$

Portanto, nenhuma função f pode ser inversa de C_a.

Exemplo 10

A função $f(x) = x^2$ não é invertível.

Raciocinando por absurdo, suponhamos que f seja invertível, isto é, suponhamos que existe uma função g tal que $(g \circ f)(x) = x$ e $(f \circ g)(y) = y$.

Seja $a > 0$, então $f(a) = a^2 > 0$. Como $-a < 0$ e $f(-a) = (-a)^2 = a^2 = f(a)$, temos $-a = (g \circ f)(-a) = g(f(-a)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = a$, o qual é impossível. Dessa forma, concluímos que f não é invertível.

Determinemos as condições que uma função f deve satisfazer para ser invertível

Sejam f e g funções, tais que $f \circ g = I$ e $g \circ f = I$.

Note que, para podermos fazer as composições $f \circ g$ e $g \circ f$, os domínios de f e g devem satisfazer as seguintes condições:

$$g(\text{Dom}(g)) \subset \text{Dom}(f) \tag{27.2}$$

$$\text{e} \qquad f(\text{Dom}(f)) \subset \text{Dom}(g). \tag{27.3}$$

Aplicando f em (27.2), obtemos:

Lembre que
Dois conjuntos X e Y são **iguais**, quando eles possuem os mesmos elementos. Isto é, $X = Y$ se, e somente se, as inclusões $X \subset Y$ e $Y \subset X$ são satisfeitas simultaneamente.

$$f(g(\text{Dom}(g))) \subset f(\text{Dom}(f)),$$

e como $f \circ g = I$, temos:

$$\text{Dom}(g) = I(\text{Dom}(g)) = (f \circ g)(\text{Dom}(g)) = f(g(\text{Dom}(g))) \subset f(\text{Dom}(f)).$$

Reunindo essa informação com (27.3), vemos que:

$$\text{Dom}(g) \subset f(\text{Dom}(f)) \subset \text{Dom}(g).$$

Portanto, $f(\text{Dom}(f)) = \text{Dom}(g)$.

Analogamente, aplicando g em (27.3), obtemos:

$$g(f(\text{Dom}(f))) \subset g(\text{Dom}(g)).$$

Como $g \circ f = I$, temos:

$$\text{Dom}(f) = I(\text{Dom}(f)) = (g \circ f)(\text{Dom}(f)) = g(f(\text{Dom}(f))) \subset g(\text{Dom}(g)).$$

Usando (27.2), concluímos $g(\text{Dom}(g)) = \text{Dom}(f)$.

Assim, uma condição necessária para satisfazer as identidades (27.1) é que a imagem de f seja igual ao domínio de g e, a imagem de g igual ao domínio de f.

Analisemos a questão graficamente.

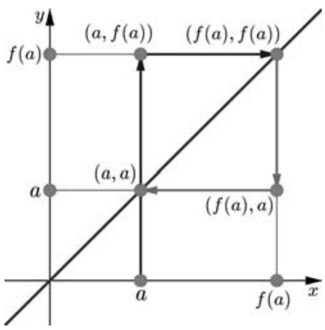


Figura 27.3: Obtendo o ponto de coordenadas $(a, (g \circ f)(a))$.

Seja $a \in \text{Dom}(f)$ arbitrário. Localizemos os pontos $(a, f(a))$ do gráfico de f e $(f(a), f(a))$ da diagonal. Como $f(a) \in \text{Dom}(g)$ e $g(f(a)) = a$, o ponto $(f(a), a)$ pertence ao gráfico de g.

Observe que o ponto $(a, f(a))$, do gráfico de f, é simétrico ao ponto $(f(a), a)$, do gráfico de g. De fato, (a, a), $(a, f(a))$, $(f(a), f(a))$, e $(f(a), a)$ são os vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados (**Figura 27.3**).

Como essa simetria acontece qualquer que seja o valor $a \in \text{Dom}(f)$ considerado, concluímos que *o gráfico de g é simétrico ao gráfico de f com respeito à diagonal* (**Figura 27.4**).

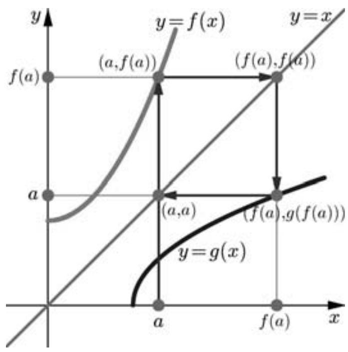


Figura 27.4: Simetria dos gráficos.

Volte e revise os gráficos nos Exemplos 7 e 8, onde mostramos a simetria dos gráficos de f e f^{-1}. Se você achou que se tratava apenas de uma casualidade, acabamos de ver que a simetria é uma propriedade que é válida sempre entre os gráficos de f e f^{-1}.

Note que, a reta vertical $x = a$ é simétrica à reta horizontal $y = a$ com respeito à diagonal. Lembre, também, que as verticais intersectam o gráfico de uma função em não mais de um ponto.

Conseqüentemente, se f e g são funções que satisfazem as identidades (27.1), então as retas verticais e horizontais intersectam seus gráficos em não mais de um ponto. Isso significa, que se $a_1, a_2 \in \text{Dom}(f)$ e $a_1 \neq a_2$, então $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Essas considerações motivam o seguinte conceito:

Definição 27.2

Uma função $f(x)$ é chamada *injetora* se para quaisquer dois números $a_1, a_2 \in \text{Dom}(f)$, tais que $a_1 \neq a_2$, então os números $f(a_1)$ e $f(a_2)$ na imagem de f são, também, distintos.

Outras definições
Se $A, B \subset \mathbb{R}$, uma função $f : A \to B$ é chamada *sobrejetora*, quando $f(A) = B$.
Isto é, f é sobrejetora se todo elemento de B é imagem por f de algum elemento de A.
Assim $f : A \to f(A)$ é sempre sobrejetora.
Uma função f que é simultaneamente injetora e sobrejetora, é chamada *bijetora*. Dizemos, também, que f é uma *bijeção*.
Portanto, $f : A \to f(A)$ (que já é sobrejetora) será uma bijeção se, e somente se, for injetora.

Observação

As seguintes condições são equivalentes:

- a função f é injetora.
- $a_1, a_2 \in \text{Dom}(f)$, $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
- $a_1, a_2 \in \text{Dom}(f)$, $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$.
- Critério da horizontal: Se r é uma reta horizontal que intersecta $\text{Graf}(f)$, então $\text{Graf}(f) \cap r$ é um conjunto unitário.

Exemplo 11

a. A função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é injetora.

De fato, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R} = \text{Dom}(f)$ e $f(x_1) = f(x_2)$, então $ax_1 + b = ax_2 + b$. Como $a \neq 0$, concluímos que $x_1 = x_2$. Pela observação acima, f é injetora.

b. A função $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, é injetora.

De fato, observe que estamos declarando explicitamente o domínio de f como sendo o intervalo $[0, +\infty)$. Assim, se $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longleftrightarrow |x_1| = |x_2| \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \,.$$

Logo, pela observação acima, f é injetora.

c. A função $f(x) = x^2$ não é injetora.

De fato, observe que, neste caso, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Logo, se $a > 0$, temos $-a < 0$ e $f(a) = a^2 = (-a)^2 = f(-a)$. Assim $a \neq -a$, mas $f(a) = f(-a)$. Portanto, $f(x) = x^2$ não é injetora.

d. A função constante C_a de valor a, não é injetora.

De fato, $0, 1 \in \text{Dom}(C_a) = \mathbb{R}$ e $0 \neq 1$, mas $C_a(0) = a = C_a(1)$.

Já vimos que f tem inversa quando as horizontais que intersectam o seu gráfico, o fazem apenas em um ponto. Isto é, se f é invertível, então f é injetora. Além disso, vimos que quando f é invertível, o domínio de f^{-1} é a imagem de f e a imagem de f^{-1} é o domínio de f. Podemos, então, caracterizar as funções invertíveis.

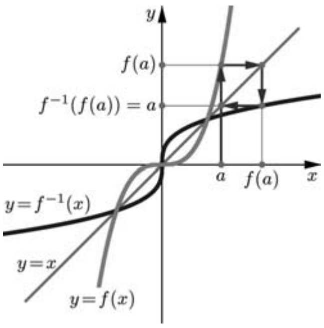


Figura 27.5: Exemplo 12.

Terminologia

Deve-se prestar muita atenção na terminologia usada em alguns livros que tratam sobre funções. As funções crescentes são, também, referidas como *estritamente crescentes* e as funções decrescentes são denominadas *estritamente decrescentes*. Nesse contexto, as funções que chamamos não-crescentes, são referidas nos textos como *decrescentes* e as que aqui chamamos não-decrescentes, são referidas como *crescentes*. Portanto, tome muito cuidado para não confundir os conceitos.

Proposição 27.1

Uma função $f : \text{Dom}(f) \longrightarrow f(\text{Dom}(f))$ tem inversa se, e somente se, é injetora.

Demonstração: Vimos já que se f tem inversa, então f deve ser injetora. Para terminar de demonstrar a Proposição 27.1, basta verificar que se f é injetora, então f é invertível.

Seja $f : \text{Dom}(f) \longrightarrow f(\text{Dom}(f))$ uma função injetora. Então f leva valores distintos do seu domínio em valores distintos na sua imagem.

Definimos a função $g : f(\text{Dom}(f)) \longrightarrow \text{Dom}(f)$ da seguinte maneira:

Seja $y \in f(\text{Dom}(f))$. Como f é injetora, há apenas um valor $x \in \text{Dom}(f)$, tal que $y = f(x)$. Defina então $g(y) = x$.

Pela própria definição de g, vemos que, $g(f(x)) = x$ para cada valor $x \in \text{Dom}(f)$. Isto é, $g \circ f = I$. Similarmente, $f(g(y)) = f(x) = y$, para cada $y \in f(\text{Dom}(f))$, ou seja $f \circ g = I$. Portanto $g = f^{-1}$. $\square$

Exemplo 12

A função $f(x) = x^3$ é invertível. Pois as horizontais $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, cortam o seu gráfico exatamente uma vez. A sua inversa é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Veja a **Figura 27.5**.

Há uma classe muito importante de funções que são injetoras. Para apresentá-las, estabelecemos a seguinte definição.

Definição 27.3

Uma função $f(x)$ é dita:

- *crescente*, se $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- *decrescente*, se $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- *não-crescente*, se $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *não-decrescente*, se $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

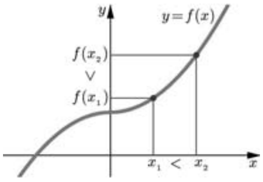


Figura 27.7: f crescente.

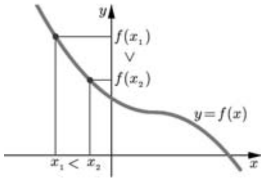


Figura 27.8: f decrescente.

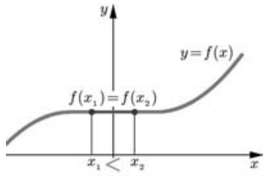


Figura 27.9: f não-decrescente.

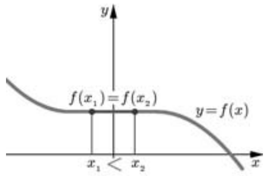


Figura 27.10: f não-crescente.

Sobre a Definição 27.3
As funções descritas na Definição 27.3 serão analisadas com detalhe no Cálculo I, fazendo uso do conceito de derivada.

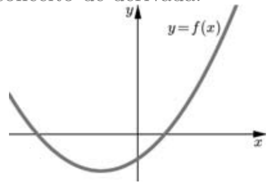


Figura 27.6: Função que não é crescente, nem decrescente, nem não-decrescente e nem não-crescente.

Observação IMPORTANTE

• Uma função f é crescente, quando os seus valores $f(x)$ vão aumentando a medida que $x \in \text{Dom}(f)$ aumenta e, é decrescente, quando os seus valores $f(x)$ diminuem conforme $x \in \text{Dom}(f)$ aumenta.

• Uma função f é não-decrescente, se os seus valores $f(x)$ não diminuem conforme $x \in \text{Dom}(f)$ aumenta e, f é não-crescente, se os seus valores $f(x)$ não aumentam conforme x aumenta.

• *Uma função que é crescente ou decrescente é injetora e, portanto, tem inversa.*

• *Funções não-crescentes ou não-decrescentes podem não ser injetoras. Veja as* ***Figuras 27.7*** *a* ***27.10****.*

• Toda função crescente é não-decrescente e toda função decrescente é não-crescente.

• Dizer que uma função não é crescente não significa que ela seja decrescente.

Na **Figura 27.6** mostramos uma função que não satisfaz nenhuma das condições da Definição 27.3, isto é, não é crescente, nem decrescente, nem não-crescente e nem não-decrescente. No entanto, observe que dessa função podem ser obtidas duas funções, uma crescente e uma decrescente "cortando o gráfico em dois pedaços". No exemplo, a seguir, veremos como isso é feito.

Exemplo 13

A função $f(x) = (x+1)(x-2)$ não é invertível. De fato, o seu gráfico (veja a **Figura 27.11**) é uma parábola que intersecta o eixo x nos pontos cujas abscissas são as raízes da equação $(x+1)(x-2) = 0$, isto é, $x = -1$ ou $x = 2$. Logo, f não é injetora, pois $f(-1) = f(2) = 0$.

O menor valor de $f(x)$ é atingido quando $x = \frac{1}{2}$ e, em qualquer intervalo contendo $\frac{1}{2}$, f não é injetora.

No entanto, a função $f(x) = (x+1)(x-2)$, $x \geq \frac{1}{2}$, é crescente (veja a **Figura 27.11**), logo invertível.

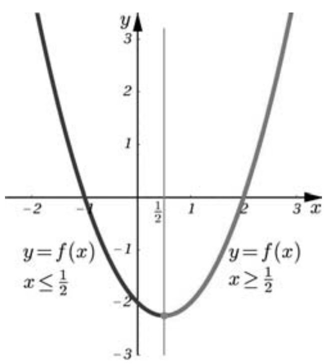


Figura 27.11: Exemplo 13.

Resolvamos, para $x \geq \frac{1}{2}$, a equação $y = (x+1)(x-2)$:

$$y = (x+1)(x-2) \iff y = x^2 - x - 2 \iff y = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 2$$
$$\iff y = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4} \iff y + \tfrac{9}{4} = (x - \tfrac{1}{2})^2$$
$$\iff \sqrt{\tfrac{4y+4}{4}} = |x - \tfrac{1}{2}| = x - \tfrac{1}{2}$$
$$\iff x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{9+4y})\,.$$

Ao resolver a equação $y = f(x)$ com a restrição $x \leq \frac{1}{2}$, observe que $|x - \frac{1}{2}| = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Portanto, $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{9+4y})\,.$

Veja, na **Figura 27.12**, os gráficos de $f(x)$ e de $f^{-1}(x)$.

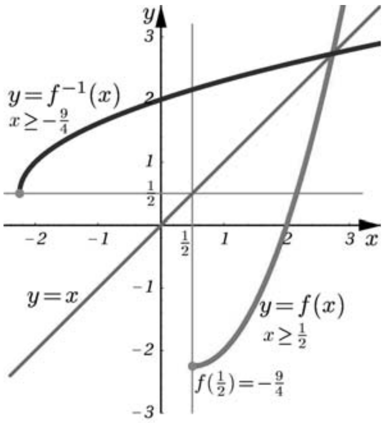


Figura 27.12: $y = f(x)\,,\, x \geq \frac{1}{2}\,.$

Similarmente, a função:

$f(x) = (x+1)(x-2),\; x \leq \frac{1}{2}\,,$

é decrescente (veja a **Figura 27.11**), logo injetora e, portanto, invertível. Resolvendo para x a equação $y = f(x)$ com a restrição $x \leq \frac{1}{2}$, obtemos:

$$f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{9+4y}).$$

Desenhe você mesmo o gráfico para este caso.

Resumo

Nessa aula definimos o conceito de função inversa de uma função invertível. Estabelecemos também condições analíticas e gráficas sob as quais uma função possui inversa. Apresentamos as funções crescentes e decrescentes, e vimos que elas são invertíveis.

Exercícios

1. Complete a tabela abaixo.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	0	2	3	-2	-3	-4	1	-1
$f^{-1}(x)$									

2. Em cada item, determine se as funções dadas são inversas uma da outra.

a. $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 3x - 1\,.$

b. $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ e $g(x) = x^5 + 1\,.$

c. $f(x) = x^4 - 4$ e $g(x) = \sqrt[4]{x} + 4\,.$

3. Em cada item, determine se a função dada é injetora, traçando o seu gráfico e usando o critério da horizontal.

a. $f(x) = |x-1|$.

b. $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

c. $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$.

4. Determine a inversa da função $f(x) = x^2 - x$, $x \geq \frac{1}{2}$.

5. Verifique que a função $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ não é invertível. Por que, então, a função do exercício anterior tem inversa?

6. Determine f^{-1}, onde:

a. $f(x) = 3x^3 - 1$.

b. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, $x \geq 0$.

c. $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$.

d. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1\,, & x \geq 1 \\ 2x - 3\,, & x < 1. \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} x^5\,, & x \geq 0 \\ x^3\,, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,, & x < -1. \end{cases}$

f. $f(x) = \frac{2}{x-2}$.

g. $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

h. $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

i. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

7. Trace os gráficos das funções de cada um dos itens do Exercicio 6. Use o critério da horizontal para explicar o porquê das funções consideradas serem invertíveis ou não-invertíveis.

8. Determine o menor valor possível para $a \in \mathbb{R}$, de modo que a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \geq a$, seja invertível.

9. (Generalização do Exemplo 8) Sejam a, b, c, e d números reais, tais que $ad - bc \neq 0$. Seja $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a. Verifique que, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

b. Pelo item anterior, f é invertível. Determine f^{-1}.

c. Determine condições sobre a, b, c, d para que $f^{-1} = f$.

10. Seja $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, com $c, d \neq 0$.

a. Usando o exercício anterior, determine a inversa de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

b. Tome $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, e $d = 1$. Mostre que $f \circ f \circ f = I$. Qual a inversa de $f \circ f$?

c. Tome $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 1$. Determine $(f \circ f)^{-1}$.

d. Tome $a = 4$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 1$. Determine f e verifique se é invertível.

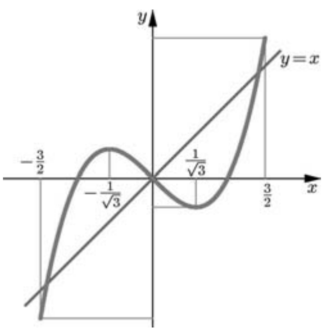


Figura 27.13: Exercício **11.**

11. Considere a função $f(x) = x(x-1)(x+1)$, $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, cujo gráfico é mostrado na **Figura 27.13**.

a. Explique por que $f(x)$ não é invertível.

b. Divida o domínio de f em três intervalos de modo que em cada um deles f seja invertível. E desenhe, em cada caso, a inversa.

12. Explique a propriedade gráfica que uma função deve satisfazer para ser a sua própria inversa.

13. Determine quais dos seguintes enunciados são verdadeiros e quais são falsos, argumentando as suas respostas.

a. nenhuma função par é invertível.

b. toda função ímpar é invertível.

c. existem funções ímpares que não são crescentes.

d. as funções pares não são crescentes e nem decrescentes.

14. Mostre que, se f e g são injetoras, então $f \circ g$ é injetora e

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

15. Se f e g são invertíveis então:

a. $f + g$ é invertível?

b. $f \cdot g$ é invertível?

Auto-avaliação

Se entendeu bem como determinar a inversa de uma função invertível e os procedimentos para determinar se uma função dada é invertível ou não, então deve resolver bem os Exercícios de 1 a 10. Os Exercícios de 11 a 15 requerem mais atenção no desenvolvimento conceitual da aula. Não fique com dúvidas. Volte, reveja os conceitos e procure discuti-los com seus colegas.

§5. Funções transcendentes

Nesta seção estudaremos as *funções transcendentes*, a saber: as funções trigonométricas e suas inversas e as funções exponencial e logaritmo. Aprenderemos suas propriedades, seus gráficos e algumas aplicações muito interessantes.

Historicamente, o desenvolvimento da Trigonometria foi motivado por diversos problemas na Astronomia, Navegação e Geografia. Além de suas aplicações a diversas áreas da Matemática, tais como Geometria e Cálculo, a Trigonometria hoje é usada por físicos, engenheiros e estatísticos.

As tabelas trigonométricas foram criadas 2.000 anos atrás para efetuar cálculos astronômicos. As estrelas eram pensadas como fixas numa enorme esfera de cristal. Somente o Sol, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno e a Lua se movimentavam nessa esfera. Esse modelo era perfeito para os objetivos práticos da época.

A primeira tabela trigonométrica de cordas foi construída, por volta de 140 a.C., pelo matemático grego Hiparco, conhecido como o fundador da Trigonometria.

Tabelas trigonométricas foram usadas por Ptolomeu em seu trabalho *Geography* e por Cristovão Colombo, na sua viagem ao novo mundo.

As funções logaritmo e exponencial têm aplicações em diversas áreas do conhecimento, indo da Astronomia às Finanças e à Biologia sendo, além disso, duas das funções mais importantes da Matemática.

As tabelas logarítmicas datam de 500 anos atrás. Eram construídas para simplificar o cálculo de produtos de números muito grandes. A palavra *logaritmo* foi inventada por Napier, no século XVI, e é a fusão de duas palavras gregas: *logos*, que significa razão, e *arithmos*, que significa números.

Aula 28 – Funções trigonométricas

Objetivos

- Definir as funções periódicas e estabelecer, mediante exemplos simples, técnicas para a sua construção.
- Rever as funções trigonométricas seno e cosseno, analisando os seus gráficos e descrevendo as suas propriedades.
- Entender os elementos básicos das funções periódicas limitadas (período, freqüência, amplitude e fase), no contexto das funções trigonométricas.

Conceitos:
Funções, domínio, imagem e operações com funções.

Se olharmos para a nossa própria natureza, vamos descobrir muitos fenômenos que acontecem de forma repetitiva em intervalos de tempo regulares, obedecendo, portanto, a padrões cíclicos. Por exemplo, os batimentos cardíacos, a ocorrência do dia e da noite, as estações do ano, os ciclos de reprodução das diversas espécies de seres vivos, a oscilação do pêndulo de um relógio de parede, o movimento dos ponteiros de um relógio de pulso etc. Fenômenos como esses são modelados usando uma classe muito importante de funções.

Definição 28.1
Uma função f é dita *periódica* quando existe um número real $T > 0$, tal que

$$\boxed{f(x+T) = f(x)\,, \quad \text{para todo } \ x \in \text{Dom}(f)}$$

O menor dos valores $T > 0$ para os quais a propriedade é verificada é chamado o *período* de f.

Exemplo 6

Consideremos a função f do gráfico mostrado na **Figura 28.1**, que corresponde ao eletrocardiograma de uma pessoa saudável.

Observe que o padrão de repetição ocorre em intervalos de comprimento T e não ocorre em nenhum intervalo de comprimento menor. Assim, a função f é uma função periódica de período T.

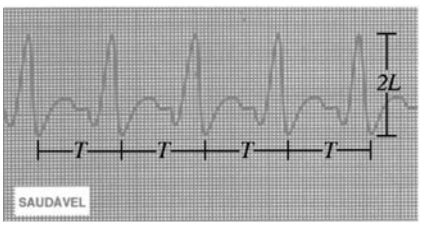


Figura 28.1: Eletrocardiograma.

Suponha que f é uma função periódica *limitada* (isto é, a sua imagem está contida num intervalo limitado), como a função do Exemplo 6, mostrada na **Figura 28.1**. A metade do comprimento do menor intervalo que contém a imagem de f é chamado a *amplitude* de f.

Assim, a função do gráfico da **Figura 28.1** tem amplitude L.

Exemplo 7

Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} 2\,,\ x \in [n, n+1)\,,\ n \in \mathbb{Z} \text{ par} \\ -2\,,\ x \in [n, n+1)\,,\ n \in \mathbb{Z} \text{ ímpar}\,. \end{cases}$

Afirmamos que a função f (faça o gráfico) é periódica de período 2.

Faça a representação dos números inteiros na reta real e verifique a propriedade ao lado.

De fato, começamos observando que os intervalos da forma $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, cobrem todo $\mathbb{R}$. Logo, se $x \in \mathbb{R}$, então x pertence a algum desses intervalos. Isto é, $x \in [n, n+1)$, onde n é o maior inteiro menor ou igual a x.

Sendo $n \leq x < n+1$, temos $n+2 \leq x+2 < (n+1)+2$. Ou seja, $n+2 \leq x+2 < (n+2)+1$.

Se n é par, então $f(x) = 2$ e $n+2$ é par. Logo, $f(x+2) = 2$.

Analogamente, se n é ímpar, então $f(x) = -2$ e $n+2$ também é ímpar. Portanto, $f(x+2) = -2$.

Assim, f é periódica, com período 2. Além disso, sendo que o maior valor assumido por f é 2 e o menor é -2, o menor intervalo que contém a imagem de f é o intervalo $[-2, 2]$ que tem comprimento 4. Logo, a amplitude de f é $L = \frac{4}{2} = 2$.

Visualize no gráfico de f (**Figura 28.2**) o seu período: 2.

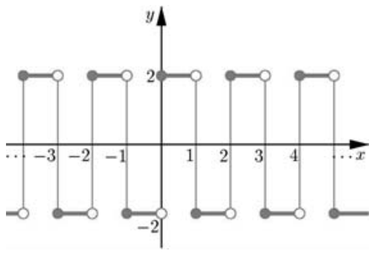


Figura 28.2: Função periódica de período 2.

Na **Figura 28.2** mostramos o gráfico de $f(x)$.

Um procedimento simples para construir funções periódicas é o seguinte: considere uma função qualquer f definida num intervalo limitado $[a, b)$ ou $(a, b]$. Vamos construir uma função periódica de período $T = b - a$. Para fixar as idéias, suponhamos que o intervalo onde f está definida inicialmente seja $[a, b)$. O importante é observar que a reta real $\mathbb{R}$ é dividida em intervalos semi-abertos contíguos de comprimento T (veja a **Figura 28.3**).

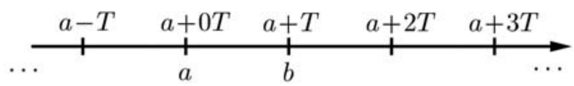


Figura 28.3: Subdivisão de $\mathbb{R}$ em intervalos contíguos de comprimento $T = b - a$.

Uma vez feita essa subdivisão da reta, vemos que todo número real x pertence a algum desses intervalos.

Se $x \in [a + nT, a + (n+1)T)$, então:

$$a + nT \leq x < a + (n+1)T = a + nT + T\,.$$

Logo, $a \leq x - nT < a + T = b$. Isto é, $x - nT \in [a, a+T) = [a, b)$.

Portanto, podemos calcular o valor $f(x - nT)$.

Definimos, assim, a nossa função periódica:

$$F(x) = f(x - nT), \quad \text{se} \quad x \in [a + nT, a + (n+1)T)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Exemplo 8

Seja $f(x) = 2x + 1$, $x \in [-1, 2)$. Vamos construir uma função periódica $F(x)$ (definida em todo o $\mathbb{R}$), que seja igual a $f(x)$ no intervalo $[-1, 2)$.

O gráfico da função F, mostrado na **Figura 28.4**, é construído deslocando o gráfico de f para a direita e para a esquerda, em múltiplos inteiros de 3 unidades.

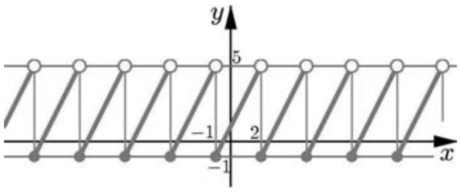


Figura 28.4: Gráfico de F.

Visualize no gráfico de F (**Figura 28.4**) o seu período: 3.

Começamos observando que o comprimento do intervalo $[-1, 2)$ é $T = 3$. Dividimos então a reta real em intervalos da forma $[-1+3n, -1+3(n+1))$ e definimos F como:

$$F(x) = f(x - 3n) = 2(x - 3n) + 1\,, \text{ se } x \in [-1 + 3n, -1 + 3(n+1))\,, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Por exemplo, para calcular $F(\frac{65}{4})$, devemos determinar o valor de $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{65}{4} \in [-1 + 3n, -1 + 3(n+1))$.

Resolvendo a desigualdade:

$$-1 + 3n \leq \tfrac{65}{4} < -1 + 3(n+1),$$

para $n \in \mathbb{Z}$, obtemos $n = 5$.

Logo, $F(\frac{65}{4}) = f(\frac{65}{4} - 3 \times 5) = f(\frac{5}{4}) = 2\,\frac{5}{4} + 1 = \frac{7}{2}$.

Além disso, observe que o menor intervalo que contém toda a imagem de f é o intervalo $[-1, 5)$ que tem comprimento 6.

Portanto, a amplitude de F é $L = \frac{6}{2} = 3$.

Exemplo 9

Na **Figura 28.5** mostramos o gráfico da função periódica $F(x)$, construída a partir da função $f(x) = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1)$.

Veja que cada $x \in \mathbb{R}$ pertence ao intervalo semi-aberto:

$$[\,\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\,),$$

onde $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ é o *maior inteiro menor ou igual a* x.

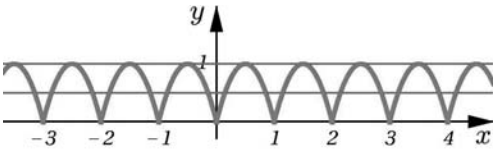


Figura 28.5: Exemplo 9.

Pela construção de F, o seu período é 1, conforme você pode visualizar no gráfico ao lado.
Qual a amplitude de F? Veja o gráfico para responder.

Logo, a função F é definida como $F(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Além disso, observe que o período de F é 1, pois $F(x+1) = F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e a igualdade $F(x+r) = F(x)$ não é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, se $r < 1$.

Finalmente, observamos que a imagem de F está completamente contida no intervalo $[0, 1]$, que tem comprimento 1. Portanto, a amplitude de F é $L = \frac{1}{2}$.

Exemplo 10

A função $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-x)} - 3$, $x \in (-1, 1)$, tem as retas $x = -1$ e $x = 1$ como assíntotas.

Mesmo estando definida num intervalo aberto, usamos essa função para construir uma função periódica $F(x)$ de período $2 =$ comprimento do intervalo $(-1, 1)$, tendo por domínio o subconjunto de $\mathbb{R}$ que é a união dos intervalos da forma $(-1 + 2n, 1 + 2n)$, onde n varia em $\mathbb{Z}$.

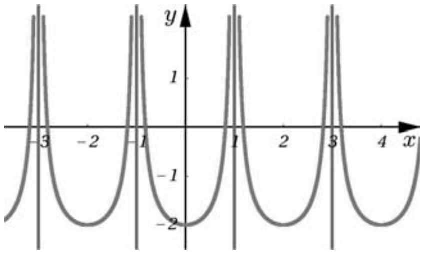


Figura 28.6: Exemplo 10.

De fato, a função F é definida como:

$$F(x) = f(x - 2n)\,,\ \text{se}\ x \in (-1 + 2n, 1 + 2n)\,,\quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

O gráfico de F é construído deslocando o gráfico de f para a direita e para a esquerda, por múltiplos inteiros de 2 unidades. Note que f, e portanto F, não são funções limitadas. Logo, F não tem amplitude definida.

Radiano e grau

No círculo trigonométrico, um *radiano* é a medida do ângulo associado a um arco de comprimento 1:

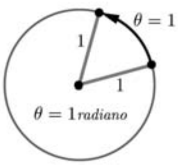


Figura 28.7: Radiano

No círculo trigonométrico, um ângulo que mede π radianos corresponde à metade do círculo e portanto, em graus, a medida desse ângulo é 180^o. Proporcionalmente, um ângulo mede θ radianos se, e somente se, esse mesmo ângulo mede x^o (lê-se x graus), onde: $180 \cdot \theta = \pi \cdot x$. Com essa identidade é possível converter qualquer medida de radianos para graus e vice-versa.

Seno e cosseno - as funções trigonométricas limitadas

Dentre a classe das funções periódicas, destacam-se as chamadas *funções trigonométricas*.

Você já conhece duas importantes funções trigonométricas: a função *seno*, que designamos por $\operatorname{sen} x$, e *cosseno*, designada $\cos x$. Estudadas no Módulo 3, essas funções são fundamentais para a representação polar dos números complexos. Agora, vamos analisar as propriedades das funções seno e cosseno e traçar os seus gráficos.

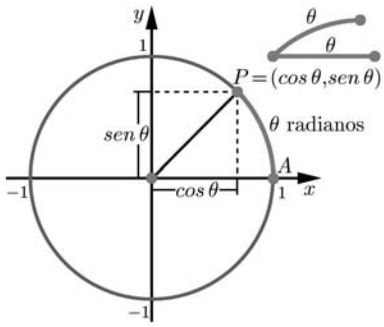


Figura 28.8: Círculo unitário $\mathcal{C}$.

Consideremos o círculo $\mathcal{C}$ de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano (**Figura 28.8**). Este círculo é chamado *círculo unitário* ou *círculo trigonométrico*. Note que o comprimento total de $\mathcal{C}$ é 2π unidades.

Definição 28.2 (seno e cosseno)
Para cada número real $\theta \in [0, 2\pi)$ seja P_θ o ponto do círculo $\mathcal{C}$, tal que o arco de A até P_θ, medido no sentido anti-horário, tem comprimento θ.

Definimos o *cosseno*, $\cos : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ e o *seno*, $\text{sen} : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo as funções que a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ associam a abscissa e a ordenada do ponto P_θ, respectivamente. Portanto, $P_\theta = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ (veja a **Figura 28.8**).

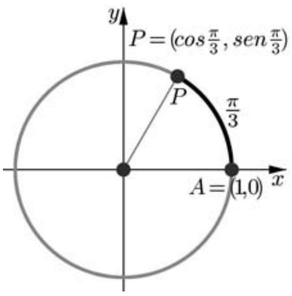


Figura 28.11: $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$ e $\cos\frac{\pi}{3}$.

Desenhamos, na **Figura 28.9**, o gráfico de $\text{sen}\,\theta$ e, na **Figura 28.10**, o gráfico de $\cos\theta$, onde θ varia no intervalo $[0, 2\pi)$, usando a Definição 28.2. Nesses gráficos, marcamos com números os pontos correspondentes aos pontos do círculo unitário.

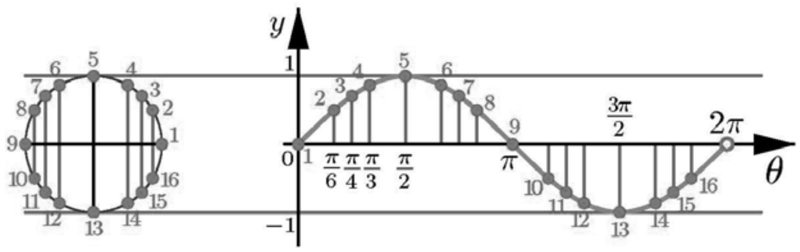


Figura 28.9: Ordenadas dos pontos P_θ correspondentes aos ângulos notáveis.

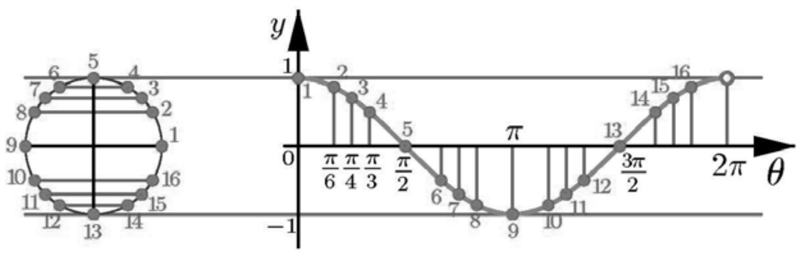


Figura 28.10: Abscissas dos pontos P_θ correspondentes aos ângulos notáveis.

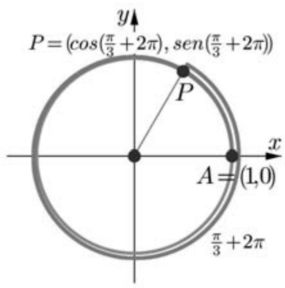


Figura 28.12: Seno e cosseno do ângulo $\frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Note que o ponto P obtido no círculo é o mesmo que o ponto obtido para o ângulo $\frac{\pi}{3}$. No entanto, o arco correspondente já deu uma volta completa ao círculo. Cada volta que a variável θ dá no círculo corresponde a **um período** de $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$. Dizemos que uma função periódica $f(\theta)$ completa um **ciclo** ou uma **oscilação** quando a variável θ percorre um intervalo de comprimento igual ao período.

Note que cada número real $\theta \in \mathbb{R}$ pertence exatamente a um intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$, para algum inteiro $k \in \mathbb{Z}$.

Veja, também, que a imagem das funções sen e cos é o intervalo $[-1, 1]$.

Além disso, como já observamos na Aula 20, do Módulo 3, um arco no círculo unitário de comprimento $\theta > 2\pi$ pode ser enrolado no círculo unitário dando mais de uma volta no sentido anti-horário ou no sentido horário (pense, por exemplo, numa linha sendo enrolada num carretel). Se esse arco parte do ponto $A = (1, 0)$, então termina:

- no ponto $P = (\cos(\theta + 2k\pi), \text{sen}(\theta + 2k\pi))$ se enrolado no sentido anti-horário,

• no ponto $P = (\cos(\theta - 2k\pi), \operatorname{sen}(\theta - 2k\pi))$ se enrolado no sentido horário.

Observe que as coordenadas do ponto P, em ambos os casos, são iguais a $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ (veja as **Figuras 28.11** e **28.12**). Portanto:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}\theta\,, \quad \text{e} \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta\,, \ \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}}$$

Com isso, ampliamos o domínio das funções seno e cosseno a todo $\mathbb{R}$.

Obtemos assim, funções periódicas de período 2π e amplitude 1 (pois o intervalo $[-1, 1]$, que contém a imagem de ambas as funções tem comprimento 2) que continuamos designando por cos e sen respectivamente.

Os gráficos das funções sen e cos definidas em todo $\mathbb{R}$ são obtidos deslocando os gráficos das **Figuras 28.9** e **28.10** para a direita e para a esquerda, por múltiplos inteiros do período 2π (veja as **Figuras 28.13** e **28.14**).

Além disso, nos gráficos das **Figuras 28.13** e **28.14**, você pode observar que $\operatorname{sen}\theta$ é uma função *ímpar* e que $\cos\theta$ é uma função *par*.

Medição de cordas
Os primeiros trabalhos relativos à Trigonometria foram feitos pelo matemático grego Hiparco, por volta de 140 a. C., e consistiam em calcular o comprimento de cordas no círculo.

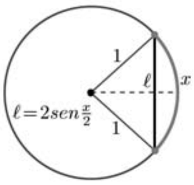


Figura 28.15: Medida da corda ℓ.
Na linguagem atual, se ℓ é o comprimento da corda do círculo correspondente a um arco de comprimento x, então $\ell = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

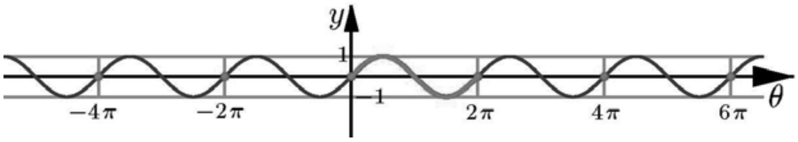


Figura 28.13: Gráfico da função seno: $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$.

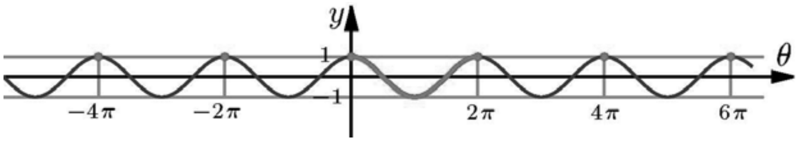


Figura 28.14: Gráfico da função cosseno: $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$.

Outros gráficos associados às funções seno e cosseno

Multiplicar uma função f por um número $a \in \mathbb{R}$ produz uma nova função af, cujo gráfico é obtido alongando ou comprimindo (e refletindo com respeito ao eixo x, caso $a < 0$) o gráfico de f. Se f é a função seno ou a função cosseno, vemos que esse alongamento não muda o período, mas muda a amplitude, que passa a ser $|a|$. Além disso, se $a < 0$, o gráfico é refletido em relação ao eixo x. Vejamos:

Exemplo 11

Na **Figura 28.16** mostramos, simultaneamente, os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$ e $g(x) = 3\operatorname{sen} x$. Note que a amplitude de $g(x)$ é igual a 3.

De fato, considere o círculo de centro na origem e raio 3. Se você medir as ordenadas dos pontos desse círculo, procedendo como fizemos na **Figura 28.9**, irá obter o gráfico de $g(x)$. Isto é, os pontos do círculo de centro na origem e raio 3 têm coordenadas $(3\cos x, 3\,\text{sen}\,x)$, onde a variável x representa o comprimento do arco medido a partir do ponto de coordenadas $(3, 0)$.

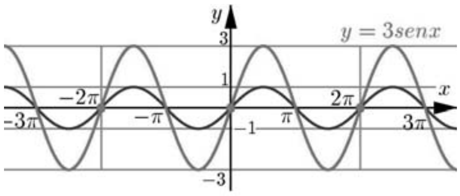


Figura 28.16: Gráficos de $\text{sen}\,x$ e de $g(x) = 3\,\text{sen}\,x$.

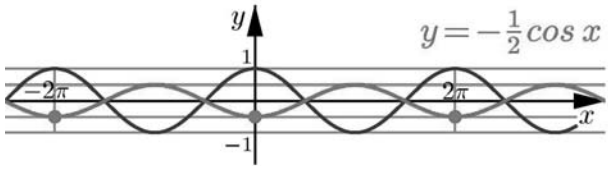


Figura 28.17: Gráficos de $\cos x$ e de $h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$.

Analogamente, na **Figura 28.17**, mostramos os gráficos das funções $c(x) = \cos x$ e $h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. A função h tem amplitude $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Note que o gráfico de g é obtido alongando o gráfico do seno por um fator de 3, enquanto o gráfico de h é obtido comprimindo o gráfico do cosseno por um fator de $\frac{1}{2}$ e refletindo o gráfico resultante com respeito ao eixo x.

Exemplo 12

Analisemos agora o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(3x)$. Essa função associa a cada $x > 0$ a ordenada do ponto P do círculo unitário, tal que o arco de $A = (1, 0)$ a P tem comprimento $3x$ (veja a **Figura 28.18**).

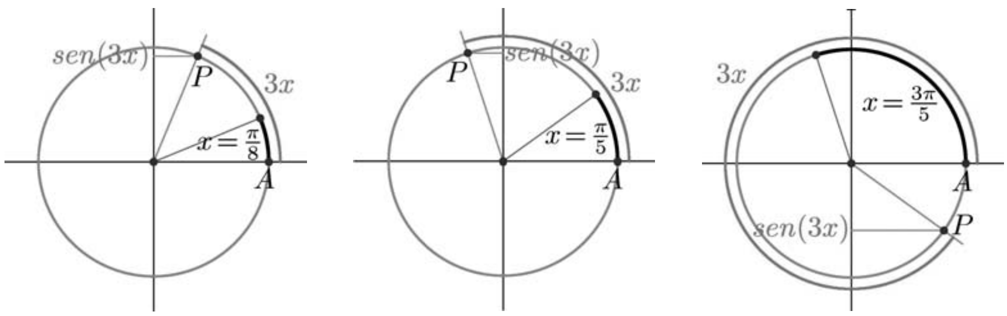


Figura 28.18: Representação de $\text{sen}(3x)$ como a ordenada do ponto P, onde $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$.

A origem do seno

O seno de um ângulo, tal como o conhecemos em nossa Matemática, data de 500 d.C., quando o matemático indiano *Aryabhata* usou jya para representar sen na sua tabela de cordas. Essa mesma tabela foi reproduzida, em 628 d.C., por *Brahmagupta*, mas, apenas em 1150, *Bhaskara* descreveu os detalhes para determinar o seno de um ângulo qualquer.
A palavra indiana *jya* foi adotada pelos árabes e traduzida em *jiba* que, como a indiana, não tem um significado específico, mas o mesmo som. A palavra *jiba* se tornou *jaib* que, na língua árabe mais recente, significa *dobra* ou *ondulação*.
Na tradução européia da Matemática indiana e árabe, a palavra *jaib* foi traduzida em *sinus* que, em Latim, significa também dobra ou ondulação.
Nos seus trabalhos matemáticos, *Leonardo Fibonacci* usou o termo *sinus rectus arcus* que, mais tarde, se popularizou em *seno* (ou *sine* no inglês).
O uso de cos teve uma história similar à de sen, porém, apenas em 1620, foi sugerido o termo *co-sinus* para denominar o cosseno.

Observe que o ponto $P = (\cos(3x), \text{sen}(3x))$ percorre o círculo unitário *três vezes mais rápido* do que o ponto $(\text{sen}\, x, \cos x)$. Isto é, enquanto a extremidade do arco de comprimento x dá uma volta no círculo, o ponto P dá três voltas.

Dessa forma, a nossa intuição indica que $f(x) = sen(3x)$ é uma função periódica. Mas, qual é o seu período?

Para responder, procuremos por um número $T > 0$, tal que $f(x+T) = f(x)$. Isto é, $\text{sen}(3(x+T)) = \text{sen}(3x)$, ou seja, $\text{sen}(3x+3T) = \text{sen}(3x)$.

Sabendo que a função seno é periódica, com período 2π, temos que $3T$ deve ser um múltiplo inteiro (positivo) de 2π. Assim $3T = 2\pi k$, ou seja, $T = \frac{2}{3}\pi k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Como o período T de $f(x)$ é o menor número real com essa propriedade, para determiná-lo tomamos o menor k possível, isto é, $k = 1$, obtendo $T = \frac{2}{3}\pi$.

Logo, a função $f(x) = \text{sen}(3x)$ é periódica e o seu período é *um terço do período da função* $\text{sen}\, x$.

Assim, quando x percorre o intervalo de 0 a $\frac{2}{3}\pi$, $f(x)$ assume todos os valores da função seno.

Na **Figura 28.19**, mostramos, comparativamente, os gráficos das funções $\text{sen}\, x$ e $f(x) = \text{sen}(3x)$. Observe nesses gráficos que, enquanto a função $\text{sen}\, x$ completa apenas um ciclo no intervalo $[0, 2\pi]$, a função $\text{sen}(3x)$ completa três ciclos, pois o seu período é a terça parte do período de $\text{sen}\, x$.

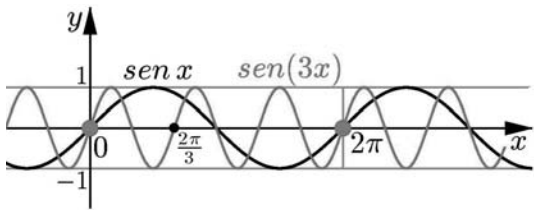


Figura 28.19: Gráficos de $\text{sen}\, x$ e $\text{sen}(3x)$.

Similarmente, como a função $\cos x$ também tem período 2π, a função $\cos(3x)$ tem período $\frac{2\pi}{3}$.

Na **Figura 28.20**, mostramos, comparativamente, os gráficos de $\cos x$ e $\cos(3x)$.

Note também que as funções $\cos(-3x)$ e $\text{sen}(-3x)$ têm período $\frac{2\pi}{3}$. Sendo $\cos x$ par, temos $\cos(-3x) = \cos(3x)$.

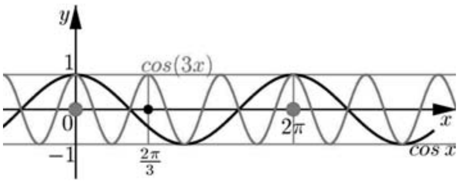


Figura 28.20: Gráficos de $\cos x$ e $\cos(3x)$.

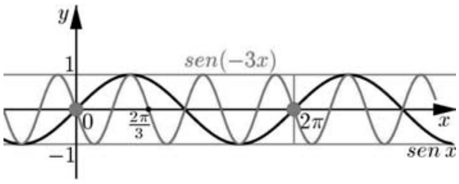


Figura 28.21: Gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(-3x)$.

No entanto, $\operatorname{sen} x$ é ímpar e portanto $\operatorname{sen}(-3x) = -\operatorname{sen}(3x)$. Daí, o gráfico de $\operatorname{sen}(-3x)$ é obtido refletindo o gráfico de $\operatorname{sen}(3x)$ com respeito ao eixo x, como mostramos na **Figura 28.21**.

> Em geral, a função $f(x) = \operatorname{sen}(bx)$ (ou a função $g(x) = \cos(bx)$), onde $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, é uma função periódica, de período $\frac{2\pi}{|b|}$.

De fato, suponhamos que $b > 0$ e procuremos o menor $T > 0$, tal que $f(x+T) = f(x)$. Isto é, $\operatorname{sen}(b(x+T)) = \operatorname{sen}(bx)$, ou seja, temos a igualdade $\operatorname{sen}(bx + bT) = \operatorname{sen}(bx)$. Como $\operatorname{sen} x$ tem período 2π, o menor $T > 0$ deve satisfazer $bT = 2\pi$. Isto é, $T = \frac{2\pi}{b}$.

No caso em que $b < 0$, observamos que $\operatorname{sen}(bx) = -\operatorname{sen}(-bx)$, onde $-b > 0$, pois a função seno é ímpar.

Assim, o período de $\operatorname{sen}(bx)$ é $T = \frac{2\pi}{-b} > 0$.

Portanto, sendo b positivo ou negativo, *a função $f(x) = \operatorname{sen}(bx)$ é periódica de período $T = \frac{2\pi}{|b|}$*.

Graficamente, isto significa que *$f(x)$ completa $|b|$ ciclos quando x percorre o intervalo $[0, 2\pi]$*.

Exemplo 13

Consideremos as funções $f(t) = \operatorname{sen}(2\pi t)$ e $g(t) = \cos(2\pi t)$. Segundo vimos nos parágrafos anteriores, essas funções têm período $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Isto é, em cada intervalo de comprimento 1 ambas as funções completam um ciclo ou uma oscilação (veja a **Figura 28.22**).

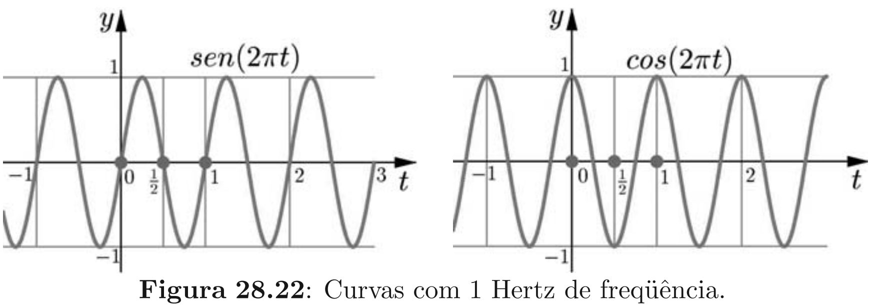


Figura 28.22: Curvas com 1 Hertz de freqüência.

PRÉ-CÁLCULO

Na próxima aula ...
você irá aprender mais sobre as aplicações do conceito de freqüência.

Na prática, se a variável t representa o *tempo* medido em segundos, as nossas curvas completam um *ciclo por segundo*. Em Física, se diz que as curvas dadas pelos gráficos de f e g têm *freqüência* de 1 Hertz, que se escreve:

$$\boxed{1\,Hz = 1\frac{\text{ciclo}}{\text{segundo}} = 1\frac{\text{ciclo}}{s}}$$

Definição 28.3
A *freqüência* de uma curva periódica é o número de ciclos que ela completa num intervalo de uma unidade.

Exemplo 14

Determinemos a freqüência das curvas:

$$f(t) = \text{sen}(2\pi\omega t) \quad \text{e} \quad g(t) = \cos(2\pi\omega t)\,,$$

onde $\omega > 0$ é um número real fixo.

Devemos determinar a quantidade de ciclos por segundo, ou Hertz, que as curvas completam. Para isso, começamos observando que o período de $f(t)$ (e, também, de $g(t)$) é $T = \frac{2\pi}{2\pi\omega} = \frac{1}{\omega}$. Como no intervalo $[0, 1]$ cabem exatamente ω intervalos de comprimento $\frac{1}{\omega}$, concluímos que a função $f(t)$ completa ω ciclos no intervalo $[0, 1]$, assim como a função $g(t)$.

Isto é, a freqüência das curvas $f(t) = \text{sen}(2\pi\omega t)$ e $g(t) = \cos(2\pi\omega t)$ é de ω ciclos por segundo, ou seja, $\omega\,Hz$.

Nas **Figuras 28.23** e **28.24** mostramos os gráficos das funções $f(t) = \text{sen}(6\pi t)$ e $g(t) = \cos(10\pi t)$. Note que $6\pi t = 2\pi(3)t$, logo, a freqüência de $f(t)$ é de $\omega = 3$ ciclos por segundo (Hertz). Analogamente, como $10\pi t = 2\pi(5)t$, a freqüência de $g(t)$ é de $5\,Hz$.

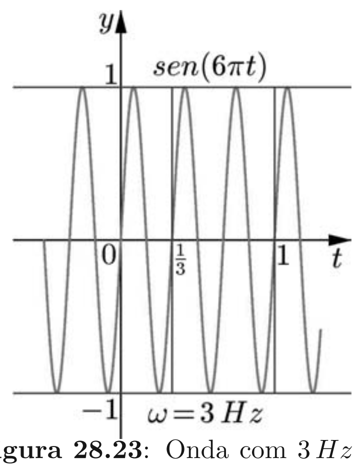


Figura 28.23: Onda com $3\,Hz$ de freqüência.

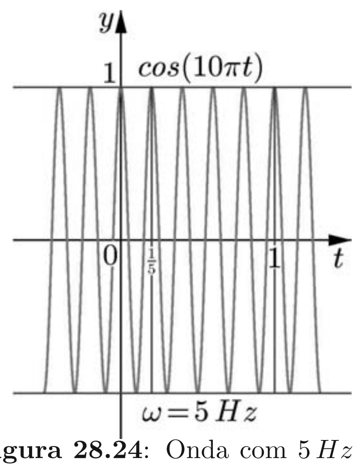


Figura 28.24: Onda com $5\,Hz$ de freqüência.

Finalmente, lembre que, dado o gráfico de uma função $f(x)$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$, o gráfico da função $g(x) = f(x+c)$ é obtido deslocando o gráfico de $f(x)$ de c unidades para a esquerda, caso $c > 0$ e de $-c$ unidades para a direita, caso $c < 0$. Dessa forma, os gráficos de $f(x) = \operatorname{sen}(x+c)$ e de $\cos(x+c)$ são obtidos, deslocando horizontalmente os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, respectivamente, na direção apropriada.

Exemplo 15

Vejamos os gráficos de $g_1(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ e de $g_2(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$, comparativamente com os gráficos de $\cos x$ e de $\operatorname{sen} x$, respectivamente.

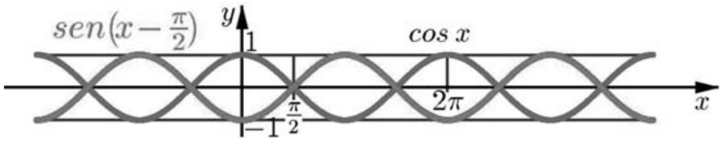


Figura 28.25: Gráficos de $g_1(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ e de $\cos x$.

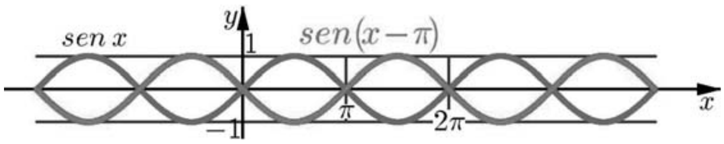


Figura 28.26: Gráficos de $g_2(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$ e de $\operatorname{sen} x$.

Da relação entre os gráficos das **Figuras 28.25** e **28.26**, obtemos as identidades:

$$\operatorname{sen}(x - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

Como a função seno é ímpar, concluímos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x}$$

Definição 28.4

Seja $f(x)$ uma função periódica e seja $g(x) = f(x - c)$. Dizemos que $g(x)$ é obtida deslocando $f(x)$ pelo *ângulo de fase* c.

Observação IMPORTANTE!

Note que, se f é periódica de período T, então $f(x) = f(x - nT)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $g(x) = f(x - c) = f(x - c - nT) = f(x - (c + nT))$.

Isto é, se $g(x)$ é obtida deslocando $f(x)$ pelo ângulo de fase c, então também é obtida deslocando $f(x)$ pelo ângulo de fase $c + nT$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, o ângulo de fase não é único.

Volte ao Exemplo 15 e verifique que a função $g_1(x)$ é obtida deslocando a função $\operatorname{sen} x$ pelo ângulo de fase $\frac{\pi}{2}$, e que a função $g_2(x)$ é obtida deslocando a função $\operatorname{sen} x$ pelo ângulo de fase π. Observe que deslocando o gráfico de $f(x) = senx$ de $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, obtemos o gráfico de $g_2(x)$, ou seja, $(2k+1)\pi$ é ângulo de fase de $g_2(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Para terminar, reunimos as nossas considerações sobre seno e cosseno:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
- A função $f(x) = a \operatorname{sen}(bx)$ tem amplitude $|a|$, período $T = \frac{2\pi}{|b|}$ e freqüência $\omega = \frac{1}{T} = \frac{|b|}{2\pi}$.
- A função $g(x) = a \operatorname{sen}(b(x-c))$ tem amplitude $|a|$, período $T = \frac{2\pi}{|b|}$, freqüência $\omega = \frac{1}{T} = \frac{|b|}{2\pi}$ e c é um ângulo de fase.
- Em particular, a função $G(x) = a \operatorname{sen}(2\pi\omega(x-c))$ tem amplitude $|a|$, freqüência ω, período $\frac{1}{\omega}$ e c é um ângulo de fase.
- As mesmas conclusões são válidas, substituindo sen por cos.

No destaque ao lado ...
Note que, tomando $f(x) = a \operatorname{sen}(bx)$, temos que f é periódica e $g(x) = f(x-c)$.

Exemplo 16

a. Consideremos a função $g(x) = -2 \operatorname{sen}(4x - \frac{\pi}{4})$.

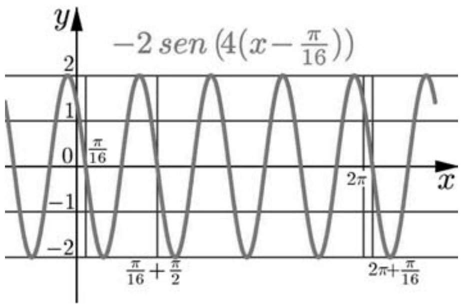


Figura 28.27: Gráfico de $g(x) = -2 \operatorname{sen}(4x - \frac{\pi}{4})$.

Escrevemos $g(x)$ na forma indicada no destaque anterior:

$g(x) = -2 \operatorname{sen}(4(x - \frac{\pi}{16}))$.

Daí, vemos que $g(x)$ tem amplitude 2, período $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{16}$ é um ângulo de fase.

O gráfico de $g(x)$ é obtido a partir do gráfico de $\operatorname{sen} x$ aplicando várias trans-
formações: primeiramente, alongamos verticalmente o gráfico de $\operatorname{sen} x$ por um fator de 2, depois aplicamos uma compressão horizontal de fator $\frac{1}{4}$, deslocamos o gráfico de $\frac{\pi}{16}$ unidades para a direita e, finalmente, o refletimos com respeito ao eixo x (**Figura 28.27**).

b. Analisemos a função:

$$g(t) = \frac{3}{4}\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3}).$$

Como $g(t) = \frac{3}{4}\cos(5\pi(t-(-\frac{1}{15})))$, vemos que a função $g(t)$ tem amplitude $\frac{3}{4}$ e $\varphi = -\frac{1}{15}$ é um ângulo de fase. Como $5 = 2(\frac{5}{2})$, a sua freqüência é $\omega = \frac{5}{2}$ e, portanto, o seu período é $T = \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}$ (**Figura 28.28**).

Descreva você mesmo, com palavras, da mesma forma que fizemos no item anterior, como deve ser construído o gráfico de $g(t)$.

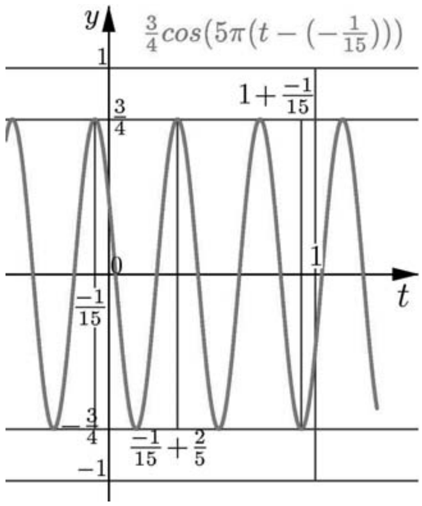


Figura 28.28: Gráfico de $g(t) = 4\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})$.

Resumo

Nesta aula definimos o conceito de função periódica e período, descrevendo vários exemplos. Apresentamos as funções seno e cosseno sob o ponto de vista das funções, vimos que essas funções são periódicas com período 2π e construímos os seus gráficos. Finalmente, apresentamos os conceitos de amplitude, ciclo, ângulo de fase e freqüência, importantes quando são consideradas funções periódicas.

Exercícios

1. A partir da função $f(x)$, construa uma função periódica. Determine o seu domínio, o seu período e desenhe o seu gráfico. Além disso, dê a amplitude das funções periódicas limitadas.

a. $f(x) = x^3$, $-1 \leq x < 1$.

b. $f(x) = x^2 - 1$, $2 < x < 3$.

c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

d. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

2. Considere a função $f(x) = \frac{4}{3}x$, $0 \leq x < 3$.

a. Construa uma função periódica $F(x)$ definida em todo o $\mathbb{R}$, tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 3)$.

b. Determine o período, a freqüência e a amplitude de F.

c. Desenhe o gráfico de F.

d. Calcule os valores:

$$F(1), \quad F(4), \quad F(-2), \quad F(6), \quad F(\tfrac{23}{3}) \quad \text{e} \quad F(\tfrac{97}{2}).$$

3. Determine os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, onde:

a. $x = -\frac{2\pi}{3}$ **b.** $x = \frac{11\pi}{6}$ **c.** $x = \frac{7\pi}{6}$ **d.** $x = \frac{21\pi}{4}$.

4. Procure um relógio de ponteiros, pode ser de parede ou de pulso. Descreva, usando uma função, o deslocamento do ponteiro que marca os minutos a partir da vertical que passa pelas 0 e 6 horas. Determine o período, a amplitude, a freqüência e desenhe o gráfico de sua função.

(Indicação: a amplitude está relacionada ao tamanho do relógio.)

Repita o seu raciocínio com o ponteiro dos segundos.

5. Dada a função $g(x)$, determine o seu período, amplitude, freqüência, um ângulo de fase e desenhe o seu gráfico.

a. $g(x) = \operatorname{sen}(4x)$.

b. $g(x) = \cos(x - \pi)$.

c. $g(t) = 5\operatorname{sen}(\pi t)$.

d. $g(\theta) = 4\cos(4\pi\theta + \pi)$.

e. $g(t) = \operatorname{sen}(3t) + 1$.

f. $g(\theta) = -5\operatorname{sen}(9\pi\theta - 3\pi) + 5$.

g. $g(x) = 3\cos(3x - 3) + 3$.

6. Considerando a definição das funções seno e cosseno, explique a identidade:

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notação: Tratando-se das funções trigonométricas sen, cos e de outras que ainda virão pela frente, costuma-se escrever $\operatorname{sen}^2 x$ em vez de $(\operatorname{sen} x)^2$, $\cos^2 x$ em vez de $(\cos x)^2$ etc.

7. Determine os zeros de $\operatorname{sen} x$ e os zeros de $\cos x$. Essas funções têm zeros em comum?

8. Determine os zeros de $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$. Qual a relação dessa função com a função $\cos x$?

9. Explique, graficamente, as identidades:

a. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x$.

b. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$.

c. $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$.

d. $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

10. Determine um intervalo de comprimento máximo onde as funções seno e cosseno sejam injetoras.

11. Considere a função $f(t) = A\operatorname{sen}(2\pi\omega(t - \varphi))$, com $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ e $\omega \neq 0$. Escreva $f(t)$ como a composta de 4 funções.

Auto-avaliação

Reveja com cuidado os conceitos apresentados nesta aula. Os Exercícios 1 e 2 testam o quanto você assimilou o conceito de função periódica, e a técnica para construir uma função periódica a partir de uma função definida num intervalo. Os Exercícios de 3 a 9 requerem que você tenha assimilado as definições das funções seno e cosseno, assim como dos elementos a elas relacionados: período, freqüência, amplitude e fase. Finalmente, os Exercícios 10 e 11 relacionam os conceitos apresentados nesta aula com os conceitos das Aulas 26 e 27. Assimile bem esta aula pois o seu conteúdo será indispensável na Aula 29.

Aula 29 – Funções trigonométricas - continuação

Objetivos

- Usar as funções seno e cosseno para entender fenômenos oscilatórios.
- Definir as funções trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante.
- Construir novas funções usando as funções trigonométricas.
- Compreender e manipular identidades trigonométricas simples.

Conceitos:
Funções, domínio, imagem e operações com funções.
Funções periódicas, seno e cosseno.

Uma breve introdução aos fenômenos oscilatórios

Na Aula 28 estudamos as funções seno e cosseno. Vimos que essas funções são periódicas com período 2π. Vimos, também, os conceitos de amplitude, freqüência e ângulo de fase no contexto das funções seno e cosseno. Em particular, concluímos que se $a, \omega, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\omega \neq 0$, a função

$$g(x) = a\,\text{sen}(2\pi\omega(x - c))\,,$$

tem amplitude $|a|$, freqüência ω, período $\frac{1}{\omega}$ e c é um ângulo de fase. Isto é, o gráfico de f oscila tomando todos os valores do intervalo $[-|a|, |a|]$, completa um ciclo em cada intervalo de comprimento $\frac{1}{\omega}$ (portanto, ω ciclos em cada intervalo de comprimento 1) e encontra-se defasado da origem $|c|$ unidades para a direita, se $c > 0$, ou para a esquerda, se $c < 0$, em relação à função $f(x) = a\,\text{sen}(2\pi\omega x)$.

As mesmas considerações valem tomando $h(x) = a\cos(2\pi\omega(x-c))$, em vez de $g(x)$.

Esse tipo de função é utilizado para modelar matematicamente fenômenos físicos de natureza ondulatória, como: oscilações mecânicas ou de corrente em circuitos elétricos, propagação do som ou teoria ondulatória da luz. Vejamos apenas dois desses exemplos e deixemos os outros para estudos mais especializados sobre Física.

Começamos, considerando um pêndulo preso por uma haste ou corda de comprimento L a um centro fixo. Pense no badalo de um relógio antigo ou no brinquedo de balanço de um parque. Designamos por $y(t)$ o ângulo (medido em radianos) que a haste faz com a vertical que passa pelo centro fixo no instante de tempo t. Essa vertical indica a posição de repouso ou equilíbrio do pêndulo (**Figura 29.1**).

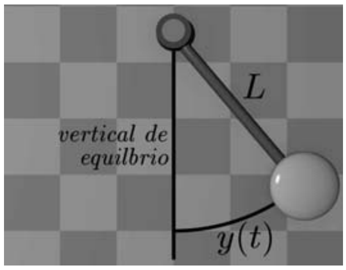
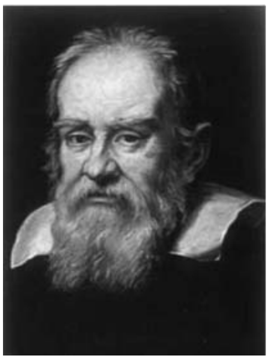


Figura 29.1: Pêndulo.



Galileu Galilei
1564 - 1642, Itália.
Estudou Medicina na Universidade de Pisa, porém o seu interesse foi sempre a Matemática e a Filosofia Natural. Foi professor de Geometria e Astronomia na Universidade de Pádua. Foi inventor do telescópio e com ele, em 1610, descobriu montanhas na Lua e quatro luas de Júpiter: Ganimede, Calisto, Europa e Io. As suas observações astronômicas levaram-no a apoiar a teoria de Copérnico, pois percebeu que Vênus apresentava fases como a Lua, concluindo que deveria girar em torno do Sol. Estudou também os movimentos oscilatórios e desenhou os primeiros relógios de pêndulo. Veja mais sobre Galileu em `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Galileo.html`

Usando a Teoria de Equações Diferenciais, se mostra que, se o movimento do pêndulo é iniciado no instante 0 (tempo inicial do experimento), a partir de uma posição inicial determinada por um pequeno ângulo y_0 então, transcorridos t segundos, o ângulo $y(t)$ é:

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)} \tag{29.1}$$

Nessa fórmula, g é a aceleração devida à atração gravitacional que a Terra exerce sobre o peso do pêndulo e é aproximadamente igual a $9,8$ metros por segundo quadrado, isto é, $9,8\,m/s^2$. Na verdade, o modelo matemático do movimento do pêndulo, descrito pela fórmula de $y(t)$, funciona apenas quando o ângulo inicial y_0 é pequeno.

Note que a amplitude do movimento descrito pela fórmula do deslocamento $y(t)$ é $|y_0|$, onde convencionamos que y_0 é positivo, se o movimento do pêndulo é iniciado à direita da vertical de equilíbrio, e negativo, se o movimento é iniciado à esquerda dessa vertical. Observe, também, que se $y_0 = 0$, isto é, o pêndulo é colocado inicialmente na direção vertical, não irá acontecer movimento algum, pois ele está em equilíbrio.

Para determinar o período e a freqüência do movimento do pêndulo, escrevemos $y(t)$ na forma $y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) = y_0\cos(2\pi\omega t)$. Isto é, devemos determinar ω, sabendo que $2\pi\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Dessa identidade, obtemos a freqüência ω e o período T do movimento:

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{\frac{g}{L}}}{2\pi} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}}} \tag{29.2}$$

Observação

Veja que tanto a freqüência ω quanto o período T não dependem da amplitude y_0. Dito em outras palavras, o pêndulo voltará ao ponto inicial após T unidades de tempo, independentemente do ângulo inicial y_0, posição inicial do pêndulo. Tal fato foi observado por *Galileu Galilei* e ajudou-o a desenhar os primeiros relógios de pêndulo. Pelo que vimos na Aula 28, isto é claro, pois sabemos que y_0 representa a amplitude da oscilação e uma mudança na amplitude não interfere no período.

Exemplo 6

Consideremos dois pêndulos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ cujas hastes têm comprimentos $L_1 = 30\,cm$ e $L_2 = 10\,cm$. Qual desses pêndulos oscila mais rápido?

Para responder devemos determinar qual dos pêndulos tem o menor período:

O pêndulo $\mathcal{P}_1$ tem período $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{30}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{9.8}{30}}} = 10,993$. Enquanto que o pêndulo $\mathcal{P}_2$ tem período $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{10}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{9.8}{10}}} = 6,3470$. Portanto, o pêndulo P_2 oscila mais rapidamente, pois o seu período é menor. Veja na **Figura 29.2** o gráfico de $y(t)$ para o pêndulo P_1 e na **Figura 29.3** o gráfico de $y(t)$ para o pêndulo P_2. Nesses gráficos, tomamos amplitudes iniciais de 1 e 2 radianos para ilustrar como os períodos e freqüências independem da amplitude inicial. Para facilitar a visualização, modificamos a escala nos eixos coordenados.

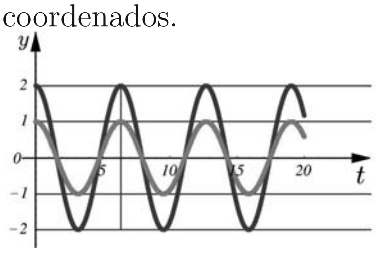


Figura 29.2: Oscilação do pêndulo $\mathcal{P}_1$.

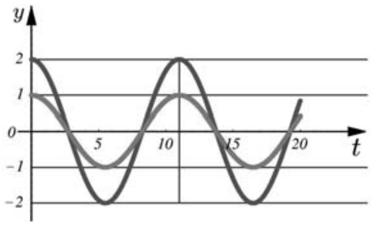


Figura 29.3: Oscilação do pêndulo $\mathcal{P}_2$.

Nos gráficos acima, vemos a oscilação nos primeiros 20 segundos. Quantos ciclos cada um dos pêndulos completou?

Os movimentos periódicos nem sempre são tão simples. Por exemplo, sabemos que o som se propaga fazendo vibrar as moléculas de ar. A ação da onda sonora faz com que uma determinada molécula de ar oscile com respeito à sua posição de equilíbrio. Em geral, isto é verdade nos sons emitidos por instrumentos musicais, mas não para os sons classificados como *ruídos*.

Vamos representar por $y(t)$ a posição de uma molécula de ar vibrando numa onda sonora no instante de tempo t. Então, $y(t)$ deve ser uma função periódica. No entanto, o seu gráfico não necessariamente é tão simples como o gráfico do seno ou do cosseno. Por exemplo, se $y(t)$ descreve o deslocamento de uma molécula de ar na onda sonora emitida por um diapasão que vibra a uma freqüência de 320 ciclos por segundo com amplitude de $0,02\,mm$, então:

$$y(t) = 0,02\,\text{sen}(2\pi(320)t) = 0,02\,\text{sen}(640\pi t)\,.$$

Note que a função $y(t)$ mede o ângulo em radianos e a variável t mede tempo.

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830, França

Fourier ficou parte da sua vida indeciso entre seguir uma vida religiosa e a Matemática. A sua participação na Revolução Francesa, ajudou-o a se afastar do clero e entrar para o mundo da Ciência. Foi discípulo de três grandes físicos e matemáticos da época: *Lagrange*, *Laplace* e *Monge*.
O seu ensaio *Sobre a propagação do calor nos corpos sólidos*, foi marco importante na Teoria das Equações Diferenciais em Derivadas Parciais, estabelecendo a equação matemática da difusão do calor e usando séries infinitas de funções trigonométricas para a sua resolução. As aplicações dessas técnicas têm mergulhado em muitos campos da Ciência e da Tecnologia modernas.
Para saber mais sobre a vida de Fourier, veja:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html`
Na Torre Eiffel, em Paris, o nome de Fourier foi gravado numa placa de honra ao lado de outros cientistas franceses.

De modo geral, os sons produzidos por ondas do tipo $y(t) = a\,\text{sen}(2\pi\omega t)$ ou $y(t) = a\cos(2\pi\omega t)$ são denominados *tons puros*.

No início do século XIX, *Joseph Fourier* mostrou que as curvas periódicas "agradáveis" podem ser muito bem aproximadas por uma soma de funções seno e cosseno. Em particular, isso ocorre com o som musical, como na função:

$$\begin{aligned} y(t) &= 22,4\,\text{sen}\,t + 94,1\cos t + 49,8\,\text{sen}(2t) - 43,6\cos(2t) + 33,7\,\text{sen}(3t) \\ &-14,2\cos(3t) + 19.0\,\text{sen}(4t) - 1.9\cos(4t) + 8.9\,\text{sen}(5t) - 5.22\cos(5t) \\ &-8.18\,\text{sen}(6t) - 1.77\cos(6t) + 6.40\,\text{sen}(7t) - 0.54\cos(7t) + 3.11\,\text{sen}(8t) \\ &-8.34\cos(8t) - 1.28\,\text{sen}(9t) - 4.10\cos(9t) - 0.71\,\text{sen}(10t) - 2.17\cos(10t)\,, \end{aligned} \tag{29.3}$$

que parece muito esquisita, mas, se você observar o seu gráfico (**Figura 29.4**), poderá perceber que estamos falando de uma função periódica.

Veja, também, a **Figura 29.5**, onde mostramos o gráfico de $y(400\pi t)$.

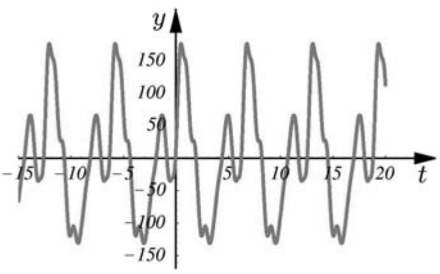


Figura 29.4: $y(t)$ no intervalo $[-20, 20]$.

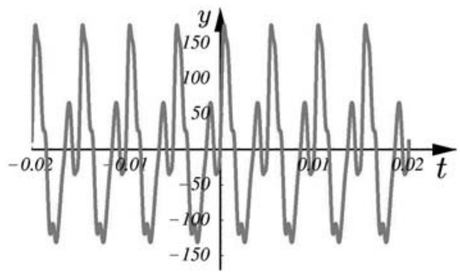


Figura 29.5: $y(400\pi t)$ no intervalo $[-\frac{2}{100}, \frac{2}{100}]$.

Teoria de Fourier e o som audível

O som que o ser humano pode escutar possui freqüência de 20 a 20.000 Hertz (ciclos por segundo). Assim, a teoria de Fourier é interpretada dizendo que qualquer som musical pode ser produzido combinando sons de diapasões (sons puros). Embora, na prática, isso não seja feito. A teoria de Fourier tem sido usada para desenvolver rádios, aparelhos de televisão e reprodutores de discos compactos (CD).

Numa escala de freqüências adequada (por exemplo, como na **Figura 29.5**), a função $y(t)$, definida em (29.3), é uma boa aproximação ao deslocamento da onda sonora correspondente ao tom de uma das pipas de um órgão.

Observe que os termos na expressão (29.3) de $y(t)$ são escritos aos pares, um seno e um cosseno, e que as freqüências desses pares são múltiplos inteiros da freqüência do primeiro par. Esse é um fato geral que é parte da teoria desenvolvida por Fourier.

A aproximação ao som real será mais precisa, adicionando a $y(t)$ um par da forma $a\,\text{sen}(11t) + b\cos(11t)$, para algumas constantes a e b.

A situação acima ilustra um método para construir funções periódicas somando múltiplos de funções seno e cosseno. Em geral, cada par seno-cosseno de igual período é, na verdade, uma função seno e também uma função cosseno, com uma certa amplitude e deslocada por um certo ângulo de fase, como vemos na proposição que enunciamos a seguir.

Mais sobre Superposição

A superposição de uma onda seno e uma onda cosseno também produz uma onda cosseno. Isto é: dadas as ondas y_1 e y_2 como na Proposição 29.1, existem constantes $D \geq 0$ e $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tais que: $y_1(t) + y_2(t) = D\cos(at - \psi)$.

Proposição 29.1 (Superposição de ondas)
Dadas duas ondas da forma $y_1(t) = A\cos(at)$ e $y_2(t) = B\,\mathrm{sen}(at)$, existem constantes $C, \varphi \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$ e $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tais que:

$$y_1(t) + y_2(t) = C\,\mathrm{sen}(at - \varphi)\,.$$

Para mostrar esta proposição precisamos estudar outras funções trigonométricas. Algumas dessas funções já apareceram no Módulo 2, em outro contexto.

Definição 29.1
A partir das funções seno e cosseno, definimos as seguintes funções:

- *secante:* $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$,
- *tangente:* $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$,
- *cossecante:* $\mathrm{cossec}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, x}$,
- *cotangente:* $\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}$.

Vamos analisar cada uma dessas funções separadamente, determinando o seu domínio, desenhando o seu gráfico e estabelecendo as suas principais propriedades.

Como essas funções são definidas por quocientes, onde o denominador é seno ou cosseno, devemos saber quais são os zeros de $\mathrm{sen}\, x$ e os zeros de $\cos x$. Volte à Aula 28 e verifique, nos gráficos dessas funções, que:

- $\mathrm{sen}\, x = 0$ se, e somente se, $x = k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Mais sobre discos compactos
A gravação de um CD de música é feita fazendo amostragens da onda sonora, isto é, a amplitude medida em muitos pontos da onda é usada para reproduzir o som. Esse processo é chamado amostragem e reconstrução. Assim, na prática, são medidas amostras da amplitude da onda sonora 44.100 vezes por segundo. Cada uma dessas amostras é armazenada num número binário (escrito em base 2 e usando apenas os dígitos 0 e 1) de 16 bits (16 dígitos). O dobro disso é usado numa gravação estereofônica (dois canais). Como um byte é formado por 8 bits e uma hora tem 3.600 segundos, as $3.600 \times 44.100 \times 2 = 317.520.000$ amostras de uma hora de música estereofônica são gravadas (digitalizadas) em $2 \times 317.520.000 = 635.040.000$ bytes. Esse valor é pouco mais da metade de um gigabyte e, aproximadamente, igual à capacidade de armazenamento de um CD usual.
Aplicando algoritmos de compressão de sinais, como por exemplo o do formato MP3, essa capacidade pode ser aumentada consideravelmente.

Função secante

Definida por $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, essa função tem por domínio o conjunto formado pelos números reais x, tais que $\cos x \neq 0$:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(\sec) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}}$$

Sabendo que $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \geq \frac{1}{1} = 1\,,\ \cos x > 0\,,\quad \text{ou}\quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{-1} = -1\,,\ \cos x < 0\,.$$

Além disso, $\sec x = 1$ se, e so se, $\cos x = 1$, e $\sec x = -1$ se, e somente se, $\cos x = -1$.

Na **Figura 29.6** mostramos, os gráficos de $\sec x$ e $\cos x$. Note que as retas que passam pelos pontos de interseção do gráfico do cosseno com o eixo x, isto é, as retas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais do gráfico da secante.

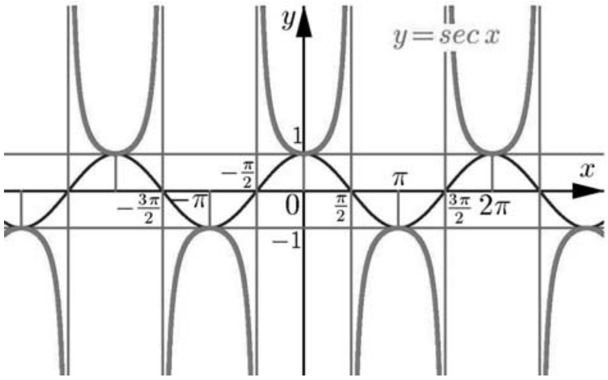


Figura 29.6: Grafico de $\sec x$.

Observe, também, que a função secante é par e periódica de período 2π, como a função cosseno. Sendo que a função $\cos x$ é decrescente no intervalo $[0, \pi]$ e crescente no intervalo $[\pi, 2\pi]$, temos:

• $\sec x$ é crescente nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

• $\sec x$ é decrescente nos intervalos $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

• As mesmas propriedades são válidas deslocando esses quatro intervalos de múltiplos inteiros de 2π.

Finalmente, observe que:

• $\sec x \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(\sec)$.

Função cossecante

De forma análoga, analisamos a função $\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$. O seu domínio é o conjunto formado pelos números $x \in \mathbb{R}$, tais que $\text{sen}\, x \neq 0$:

$$\boxed{\text{Dom(cossec)} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi\,, \;\; \text{para todo} \;\; k \in \mathbb{Z}\}}$$

Como $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \geq \frac{1}{1} = 1,\ \text{sen}\, x > 0, \quad \text{ou} \quad \text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \leq \frac{1}{-1} = -1,\ \text{sen}\, x < 0.$$

Temos $\text{cossec}\, x = 1$ se, e somente se, $\text{sen}\, x = 1$, e $\text{cossec}\, x = -1$ se, e somente se, $\text{sen}\, x = -1$.

Veja na **Figura 29.7** os gráficos das funções $\text{cossec}\, x$ e $\text{sen}\, x$. Nesse gráfico, note que as retas $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais do gráfico

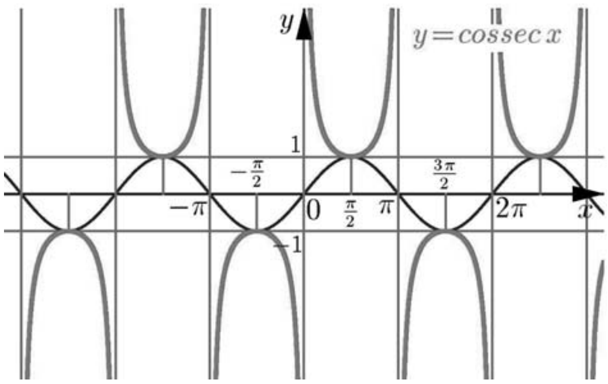


Figura 29.7: Grafico de $\text{cossec}\, x$.

A secante e a cossecante
Essas funções trigonométricas não foram usadas na Antigüidade. Elas apenas apareceram e mostraram a sua importância em tábuas preparadas por navegadores, por volta do século XV. *Nicolas Copérnico* conhecia a secante, que chamava de *hipotenusa*. Mais tarde, o matemático italiano *Bonaventura Cavalieri* usou a notação `Se` para a secante e `Se.2` para a cossecante. Outros matemáticos usaram `se arc` e `co arc.` Por volta de 1625, o matemático francês Albert Girard usou o termo sec colocado em cima do ângulo.

da cossecante. Observe, também, que a função cossecante é periódica de período 2π, como a função seno.

Além disso, veja que a função $\text{cossec}\, x$ é:

- decrescente nos intervalos $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(0, \frac{\pi}{2}]$ (pois a função $\text{sen}\, x$ é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$),
- crescente nos intervalos $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $(\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (pois a função $\text{sen}\, x$ é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$).
- As mesmas propriedades são satisfeitas deslocando os intervalos $[-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $(\pi, \frac{3\pi}{2}]$ de múltiplos inteiros de 2π.

Lembre que ...
Se $a > 0$ está próximo de zero, então $\frac{1}{a}$ é um número positivo muito grande. Analogamente, se $a < 0$ está próximo de zero, então $\frac{1}{a}$ é um número negativo de módulo muito grande.

Finalmente, observe que:

- $\text{cossec}\, x \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom(cossec)}$.

Função tangente

A função tangente, sendo definida por $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, tem o mesmo domínio que a função $\sec x$, isto é, o conjunto dos números reais que não são zeros da função $\cos x$:

$$\boxed{\text{Dom(tg)} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \text{para todo}\ \ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Observando que $\text{sen}\, x = 0$ se, e somente se, $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$, obtemos que os zeros de $\text{tg}\, x$ são exatamente os zeros de $\text{sen}\, x$:

$$\text{tg}\, x = 0 \iff \text{sen}\, x = 0 \iff x = k\pi\,,\ \text{para algum}\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Note também que $\cos x = 0$ se, e somente se, $\text{sen}\, x = 1$ ou $\text{sen}\, x = -1$. Portanto, se x está próximo de um número da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, mas é diferente dele, então $\cos x$ está próximo de zero e $\text{sen}\, x$ próximo de 1 ou de -1. Logo, $\text{tg}\, x$ é um número que pode ser positivo ou negativo (dependendo do sinal do seno) e que tem módulo muito grande.

Logo, as retas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais de $\text{tg}\, x$.

Sabendo que $\text{sen}\, x$ é uma função ímpar e que a função $\cos x$ é uma função par, vemos que a função $\text{tg}\, x$ é uma função ímpar. Portanto, o gráfico de $\text{tg}\, x$ é simétrico com respeito à origem.

De fato, para todo $x \in \text{Dom(tg)}$, temos:

$$\text{tg}(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x} = -\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = -\,\text{tg}\, x\,.$$

Atenção!

Embora as funções $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ sejam periódicas com período 2π, a função $\text{tg}\, x$ é periódica com período π.

Para determinarmos o período da função $\operatorname{tg} x$, procuramos pelo menor número real $T > 0$, tal que $\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg} x$, para todo $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{tg})$.

Seja $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{tg})$, temos: $\operatorname{tg}(x+T) = \frac{\operatorname{sen}(x+T)}{\cos(x+T)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ se, e somente se, $\cos(x+T)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+T)\cos x$, ou seja, se, e somente se, $-\cos(x+T)\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+T)\cos x = 0$. Sendo sen uma função ímpar e cos uma função par, escrevemos essa identidade como:

$$\cos(x+T)\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(x+T)\cos(-x) = 0 \,. \tag{29.4}$$

Na Aula 20, do Módulo 3, lembramos que para quaisquer θ_1, θ_2:

$$\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \,.$$

Tomando $\theta_1 = x+T$ e $\theta_2 = -x$, temos que a identidade (29.4) equivale a:

$$\operatorname{sen}((x+T)+(-x)) = 0 \,,$$

isto é, $\operatorname{sen} T = 0$.

O menor $T > 0$ satisfazendo $\operatorname{sen} T = 0$ é $T = \pi$. Logo, o período de $\operatorname{tg} x$ é π.

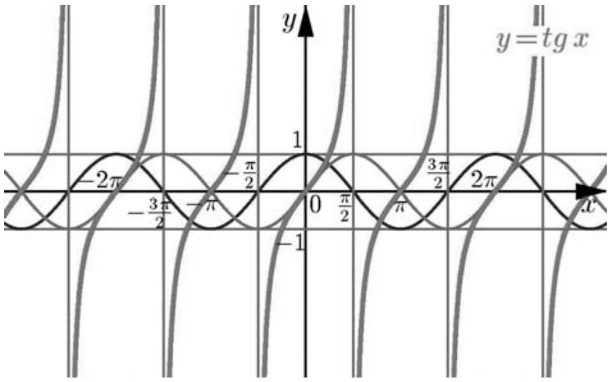


Figura 29.8: Gráfico de $\operatorname{tg} x$.

Na **Figura 29.8** mostramos, comparativamente, os gráficos de $\operatorname{tg} x$, de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$. As ordenadas dos pontos do gráfico de $\operatorname{tg} x$ são obtidas fazendo o quociente da ordenada do ponto do gráfico de $\operatorname{sen} x$ pela ordenada do ponto correspondente do gráfico de $\cos x$. Nesse mesmo gráfico você pode ver que a função $\operatorname{tg} x$ é crescente em cada intervalo da forma $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, sendo, portanto, invertível em cada um desses intervalos.

Finalmente, observe que $\operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)(\sec x)$.

Função cotangente

A função $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ é analisada exatamente da mesma maneira que a função $\operatorname{tg} x$. Mostramos na **Figura 29.9** o gráfico de $\operatorname{cotg} x$ e deixamos para você a análise dessa função, imitando o que fizemos anteriormente para a função tangente.

Na sua análise, você deverá concluir que:

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{cotg}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\operatorname{cotg} x$ é periódica de período π.
- $cotg x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$.

A tangente e a cotangente

As funções $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ surgiram de forma diferente de outras funções trigonométricas. Essas funções apareceram relacionadas ao problema de determinar alturas a partir de sombras. O matemático *Thales de Mileto*, que viveu entre 624 e 547 a.C. numa região denominada Mileto, hoje na Turquia, usou a tangente para calcular alturas de pirâmides. Assim como as tábuas de cordas associadas ao seno, surgiram tábuas de sombras, usadas para determinar alturas. A primeira dessas tábuas de que se tem conhecimento apareceu em escritos árabes, por volta de 860 d.C., e usava duas medidas traduzidas em Latim como *umbra recta* e *umbra versa*. Mais tarde, *Viète* usou os termos *amsinus* e *prosinus* para a tangente e cotangente. O termo *tangente* veio a ser usado apenas em 1583, pelo matemático *Thomas Fincke*, e o termo *cotangens* em 1620, por *Edmund Gunter*. As abreviações para a tangente e a cotangente evoluíram da seguinte maneira: o matemático italiano *Bonaventura Cavalieri* (1598-1647) usou Ta e $Ta.2$, respectivamente; *William Oughtred* (1574-1660) usou *t arc* e *t co arc*; *John Wallis* (1616-1703) usava T e t e, em 1626, *Albert Girard* começou a usar o termo tan escrito em cima do ângulo. O termo cot surgiu pouco depois, em 1674, nos trabalhos de *Jonas Moore*.

• $\operatorname{cotg} x$ é decrescente em todo intervalo da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

E, finalmente, observar:

• $\operatorname{cotg} x = (\cos x)(\operatorname{cossec} x)$.

A análise das funções obtidas a partir de $\sec x$, $\operatorname{cossec} x$, $\operatorname{tg} x$, e $\operatorname{cotg} x$ modificando o período ou o ângulo de fase, é feita de maneira análoga à análise de $\operatorname{sen} x$ ou de $\cos x$ perante essas mesmas modificações.

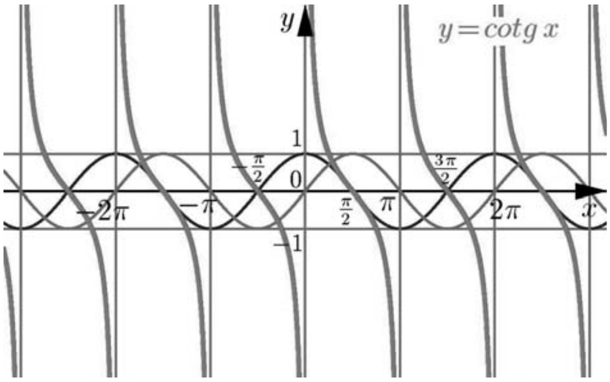


Figura 29.9: Gráfico de $\operatorname{cotg} x$.

No entanto, é importante que você lembre que $\sec x$, $\operatorname{cossec} x$, $\operatorname{tg} x$, e $\operatorname{cotg} x$ são funções não-limitadas, logo, a sua amplitude não está definida. Assim, multiplicar essas funções por uma constante tem o efeito de alongar verticalmente o gráfico (e refletir com respeito ao eixo x, caso a constante seja negativa).

ATENÇÃO!
As funções $\sec x$, $\operatorname{cossec} x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ não são limitadas, logo, não têm amplitude definida.

Exemplo 7

Seja $f(x) = \operatorname{cossec}(-3x + \frac{\pi}{2})$. Determinemos o domínio, o período e um ângulo de fase de f e esbocemos, num período, o seu gráfico.

O domínio de $\operatorname{cossec} x$ é o conjunto formado por todos os números reais diferentes de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o domínio de $f(x)$ é o conjunto formado pelos números $x \in \mathbb{R}$, tais que $-3x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi$. Isto é, o conjunto dos números $x \in \mathbb{R}$, tais que $x \neq \frac{\pi}{6} - \frac{k}{3}\pi$. Sendo $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário, o sinal do termo $\frac{k}{3}\pi$ é irrelevante. Logo:

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \tfrac{k\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}\,,\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Como a função cossecante é impar:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{cossec}\left(-3x + \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{cossec}\left(-\left(3x - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) = -\operatorname{cossec}\left(3x - \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= -\operatorname{cossec}\left(3(x - \tfrac{\pi}{6})\right) = -\operatorname{cossec}\left(2\pi\omega(x - \tfrac{\pi}{6})\right)\,, \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{3}{2\pi}$ é a freqüência de $f(x)$. Portanto, o período de $f(x)$ é $T = \frac{1}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$. Da expressão de $f(x)$ obtida acima, vemos que $\varphi = \frac{\pi}{6}$ é um ângulo de fase.

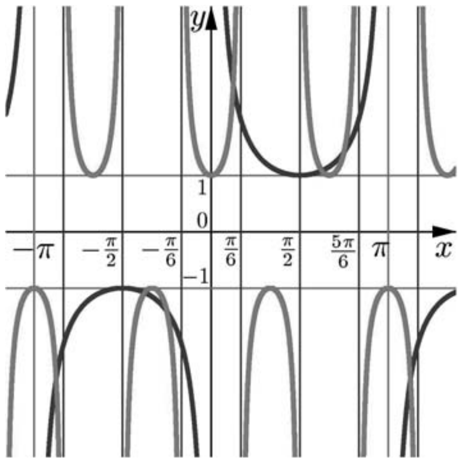


Figura 29.10: Gráficos de $f(x)$ e cossec x.

Agora vamos demonstrar a Proposição 29.1, segundo a qual, a superposição de uma onda seno com uma onda cosseno de igual freqüência produz uma onda seno deslocada por um certo ângulo de fase, mas com a mesma freqüência.

Demonstração da Proposição 29.1:

Consideremos as ondas $y_1(t) = A\cos(at)$ e $y_2(t) = B\,\text{sen}(at)$. Lembre que desejamos achar constantes $C, \varphi \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$ e $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tais que:

$$y_1(t) + y_2(t) = A\cos(at) + B\,\text{sen}(at) = C\,\text{sen}(at - \varphi).$$

Usando a identidade $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \,\text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2 \cos\theta_2$ com $\theta_1 = at$ e $\theta_2 = -\varphi$, vemos que:

$$C\,\text{sen}(at - \varphi) = C\cos(at)\,\text{sen}(-\varphi) + C\,\text{sen}(at)\cos(-\varphi)\,.$$

Sendo $\text{sen}(-\varphi) = -\,\text{sen}\,\varphi$ e $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, as constantes C e φ que procuramos devem satisfazer:

$$A\cos(at) + B\,\text{sen}(at) = [-C\,\text{sen}\,\varphi]\cos(at) + [C\cos\varphi]\,\text{sen}(at).$$

Igualando os coeficientes de $\cos(at)$ e de $\text{sen}(at)$ nessa identidade:

$$A = -C\,\text{sen}\,\varphi \qquad (29.5)$$

$$B = \quad C\cos\varphi\,. \qquad (29.6)$$

Tomando quadrados nas identidades (29.5) e (29.6) e somando membro a membro, obtemos (lembrando que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$):

$$A^2 + B^2 = C^2\,\text{sen}^2\varphi + C^2\cos^2\varphi = C^2(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = C^2\,,$$

logo, $|C| = \sqrt{C^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Como procuramos $C \geq 0$, tomamos $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Para determinarmos o ângulo φ, fazemos o quociente de (29.5) por (29.6):

$$\frac{A}{B} = \frac{-C \operatorname{sen} \varphi}{C \cos \varphi} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = -\tan \varphi\,,$$

logo, o ângulo φ é *o ângulo cuja tangente é* $-\dfrac{A}{B}$.

Na **Figura 29.11** mostramos o gráfico da função $\operatorname{tg} x\,,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nós vimos que $\operatorname{tg} x$ é uma função crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, logo, injetora nesse intervalo. Portanto, dado o valor $-\frac{A}{B}$ existe um único $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tal que $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$. Graficamente, o ângulo φ é determinado seguindo pela reta horizontal $y = -\frac{A}{B}$ até o ponto $(\varphi, \operatorname{tg} \varphi) = (\varphi, -\frac{A}{B})$, pertencente ao gráfico de $\operatorname{tg} x$, e depois seguindo pela reta vertical $y = \varphi$ até a interseção dessa reta com o eixo t, que acontece no ponto de coordenadas $(\varphi, 0)$.

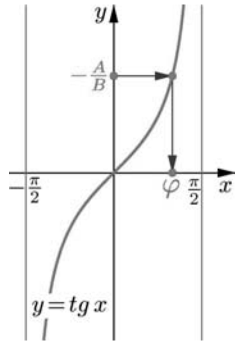


Figura 29.11: Achando φ.

Assim, para determinarmos φ, devemos conhecer a função *inversa da tangente* no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Na próxima aula, estudaremos as funções inversas das funções trigonométricas; em particular, analisaremos a função arctg, inversa da função tg. Com a análise que faremos, você verá que podemos escrever:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-\tfrac{A}{B})\,.$$

Vamos terminar esta aula com o seguinte exemplo.

Exemplo 8

Determinemos a onda obtida pela superposição das funções $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = \cos x$.

Segundo a Proposição 29.1, $y(x) = C \operatorname{sen}(x - \varphi)$, onde $C = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{1}{1} = -1$, isto é, φ é o ângulo entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, tal que $\operatorname{sen} \varphi = -\cos \varphi$. Logo, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Assim, a onda procurada é: $y(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$.

Na **Figura 29.12** mostramos os gráficos de $y_1(x) = \operatorname{sen} x$, $y_2(x) = \cos x$ e da superposição $y(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$.

Veja como o gráfico de $y(x)$ corresponde ao gráfico da função $\operatorname{sen} x$, com amplitude multiplicada por $\sqrt{2}$ e deslocado de $\frac{\pi}{4}$ radianos para a esquerda.

Como dissemos, podemos determinar constantes $D \geq 0$ e $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tais que:

$$y_1(x) + y_2(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = D \cos(x - \psi)\,.$$

Vejamos como isto é feito, repetindo, nesse caso particular, o procedimento da demonstração da Proposição 29.1.

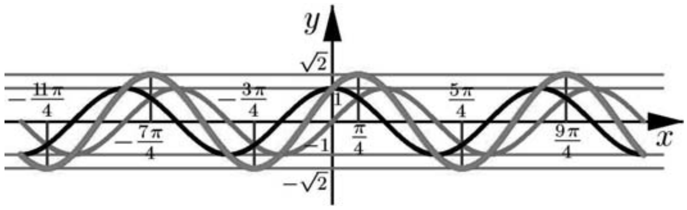


Figura 29.12: Gráficos de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x + \cos x$.

Volte à Aula 20, do Módulo 2, onde foi lembrada a identidade do cosseno da soma de dois ângulos:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \, \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \, \operatorname{sen}\theta_2 \, .$$

Usando essa identidade com $\theta_1 = x$ e $\theta_2 = -\psi$, vemos que:

$$\begin{aligned} D\cos(x-\psi) &= D\cos x \cos(-\psi) - D \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-\psi) \\ &= (D\cos\psi)\cos x + (D\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen} x \, . \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{sen} x + \cos x = D\cos(x-\psi)$ se, e somente se,

$$D\operatorname{sen}\psi = 1 \, , \qquad (29.7)$$

$$D\cos\psi = 1 \, . \qquad (29.8)$$

Para determinar D, somamos os quadrados de (29.7) e (29.8):

$$D^2\operatorname{sen}^2\psi + D^2\cos^2\psi = 1 + 1 = 2,$$

ou seja, $D^2(\operatorname{sen}^2\psi + \cos^2\psi) = 2$. Sendo $\operatorname{sen}^2\psi + \cos^2\psi = 1$, concluímos que $D = \sqrt{2}$.

Agora, dividindo (29.7) por (29.8), obtemos $\frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\psi} = 1$, isto é, $\operatorname{sen}\psi = \cos\psi$.

Logo, o ângulo ψ procurado, é o ângulo entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, tal que $\operatorname{sen} x = \cos x$, ou seja, $\psi = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, a onda produzida pela superposição de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ é a função:

$$y(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \tfrac{\pi}{4}).$$

Volte e veja na **Figura 29.12** que o gráfico de $y(x)$ é, também, o gráfico de uma onda cosseno com amplitude $\sqrt{2}$, deslocado $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita.

Resumo

Nesta aula, vimos como duas ondas, um par de funções seno e cosseno de igual período se sobrepõem para formar uma nova onda (um seno ou um cosseno). Analisamos as propriedades das funções trigonométricas não-limitadas (tangente, cotangente, secante e cossecante) e visualizamos os seus gráficos.

Exercícios

1. Determine, usando a superposição, uma onda seno igual a $y_1(t)+y_2(t)$, onde:

a. $y_1(t) = 3\,\text{sen}(2t)$, $y_2(t) = -2\cos(2t)$.

b. $y_1(t) = -4\,\text{sen}(\pi t)$, $y_2(t) = -\cos(\pi t)$.

c. $y_1(t) = \text{sen}(2t + \frac{\pi}{3})$, $y_2(t) = -2\cos(2t + \frac{\pi}{3})$.

d. $y_1(t) = 2\,\text{sen}(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2})$, $y_2(t) = 3\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2})$.

Em cada caso, faça o gráfico para dois períodos.

2. Determine, usando a superposição, uma onda cosseno igual a $y_1(t) + y_2(t)$, para cada um dos itens do exercício anterior.

3. Desenhe os gráficos das seguintes funções, indicando seu período e um ângulo de fase:

a. $f(x) = |\sec x|$ **b.** $f(x) = -2\,\text{cossec}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

c. $f(x) = -|\,\text{tg}\, x|$ **d.** $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{cotg}\, 2(x + \frac{\pi}{4})$

e. $f(x) = \text{tg}\, 2(x - \frac{\pi}{2})$ **f.** $f(x) = 2\sec(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})$

4. Como se relacionam, em termos de deslocamento, as funções periódicas $f(t) = |\,\text{tg}\, t|$ e $g(t) = |\,\text{cotg}\, t|$?

5. Em cada item, determine constantes A, b e φ, tais que:

a. $A\,\text{cotg}(b(x + \varphi)) = \text{tg}\, x$.

b. $A\,\text{cossec}(b(x + \varphi)) = \sec x$.

c. $A\,\text{tg}(b(x + \varphi)) = \text{cotg}\, x$.

d. $A\sec(b(x + \varphi)) = \text{cossec}\, x$.

e. $A\,\text{cotg}(b(x + \varphi)) = 3\,\text{tg}(3x + \frac{\pi}{3})$.

f. $A\sec(b(x + \varphi)) = -2\,\text{cossec}(\frac{\pi}{4} - 3x)$.

6. Determine se as funções secante, cossecante, tangente e cotangente são pares ou ímpares.

7. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \operatorname{tg} x$. Determine as funções $f \circ g$ e $g \circ f$. Descreva os domínios dessas funções.

8. Sejam $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e $g(x) = \sec x$. Determine as funções $f \circ g$ e $g \circ f$. Descreva os domínios dessas funções.

9. Seja $F(x) = \operatorname{cotg}^3 x$. Determine f e g, tais que $F = g \circ f$, onde g é uma função polinomial.

10. Seja $F(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(2x+1)}$.

a. Descreva o domínio de F.

b. Determine funções f, g e h, tais que $F = h \circ g \circ f$, onde g é trigonométrica.

11. Seja $F(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

a. Descreva o domínio de F.

b. Determine funções f, g, e h, tais que $F = f \circ g \circ h$, onde h é uma função racional e f é uma função polinomial quadrática.

12. Sabemos, da definição de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, obtenha a identidade $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$. Por que deve ser imposta a condição $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$?

13. Use as relações do seno e do cosseno da soma de dois ângulos para:

a. Mostrar que $\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2}$.

b. Determinar expressões para $\operatorname{sen}(2x)$ e $\cos(2x)$ em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

14. Verifique que $\frac{1 - \operatorname{cossec} x}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$.

15. Verifique que $\frac{\operatorname{cossec} x + 1}{\operatorname{cossec} x - 1} = (\sec x + \operatorname{tg} x)^2$, mostrando que ambos os lados dessa identidade são iguais a $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

16. Mostre que $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Auto-avaliação

Se você resolveu os Exercícios de 1 a 6, então os conceitos de ângulo de fase, período e amplitude ficaram bem entendidos e você aprendeu as definições das funções trigonométricas. Nos Exercícios de 7 a 11, não deixamos você esquecer da operação de composição, que é muito importante e você deve resolvê-los. Finalmente, os Exercícios de 12 a 16 exigem que você tenha compreendido bem as definições das funções trigonométricas e as suas propriedades básicas. A resolução consiste em manipulações algébricas, mãos à obra! Se tiver ainda alguma dúvida, volte e reveja a apresentação da aula. Faça muitos desenhos para aprimorar a sua intuição. Não esqueça de conversar com seus tutores e colegas.

Aula 30 – Funções trigonométricas inversas

Objetivos

- Entender as funções trigonométricas inversas, seus domínios e gráficos.
- Resolver equações com as funções trigonométricas e suas inversas.

Conceitos:
Composição, funções injetoras, funções invertíveis e funções trigonométricas.

As funções trigonométricas são funções periódicas, conforme você viu nas duas últimas aulas. Há retas horizontais intersectando o gráfico dessas funções em mais de um ponto. Portanto, não são funções injetoras. Entretanto, fazendo uma restrição no domínio dessas funções as tornamos injetoras sobre as suas imagens.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 6

O topo de uma montanha está situado 500 metros acima de um aeroporto. O fim da pista de decolagem está situado a 3 quilômetros de distância horizontal de um ponto abaixo do topo da montanha. Um avião decola em direção à montanha, com um ângulo que deve permanecer constante até que passe da montanha. Para uma decolagem com segurança, o piloto deve passar a uma altura de 300 metros acima do topo. Qual deve ser o ângulo de decolagem?

Considerando θ o ângulo de decolagem, é claro que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Apenas os helicópteros decolam na direção perpendicular ao solo! A **Figura 30.1** ilustra a situação. O lado do triângulo oposto a θ é $500 + 300 = 800$ metros. Assim,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{800}{3.000} \approx 0,2666.$$

Qual é o valor do ângulo θ, sabendo a sua tangente?

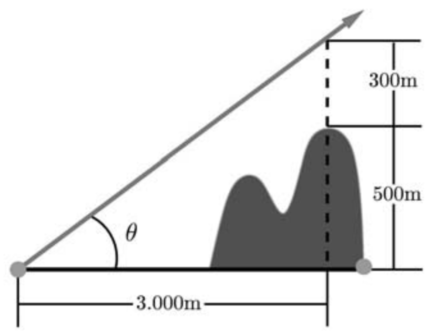


Figura 30.1: Avião decolando com ângulo θ constante.

Nesse problema, só faz sentido $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. No intervalo em que estamos trabalhando, para cada $y \in (0,\infty)$ existe um único θ, tal que $y = \operatorname{tg}\theta$. Logo, existe um único θ com $\operatorname{tg}\theta = 0,26666$. Nesse intervalo a função tangente é injetora, sua imagem é $(0,\infty)$ e podemos construir a função g, definida por:

$$\begin{array}{rccl} g: & (0,\infty) & \longrightarrow & (0,\frac{\pi}{2}) \\ & y & \longmapsto & x\,, \text{ tal que } y = \operatorname{tg} x\,. \end{array}$$

A função g é a função inversa da função tangente restrita ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Usando uma calculadora, determinamos $\theta = 0,2606$ radianos, que corresponde a $14,93^o$.

A prática cotidiana mostra que muitas vezes é conveniente fazer uma restrição no domínio de uma função, de modo a poder determinar uma função inversa.

Nessa aula vamos definir as funções inversas das funções trigonométricas, chamadas arco seno, arco cosseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante.

Qual será o procedimento?

Faremos uma restrição ao domínio da função trigonométrica, de modo que a função resultante seja injetora e tenha a mesma imagem.

Motivados pelo exemplo anterior, começamos com a função tangente.

Função arco tangente

A função tangente tem período π e sua imagem é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Restringindo x ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então $f(x) = \operatorname{tg} x$ é uma função bijetora. Veja a **Figura 30.2**.

A expressão $x = \operatorname{arctg} y$ lê-se como: *x é igual ao arco tangente de y.*

Assim, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe um único $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tal que $y = \operatorname{tg} x$. Dizemos que x é o *arco tangente* de y e escrevemos $x = \operatorname{arctg} y$. Portanto,

$$\boxed{y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \iff x = \operatorname{arctg} y,\ y \in \mathbb{R}}$$

Note que . . .

As assíntotas verticais ao gráfico da tangente, $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, correspondem às assíntotas horizontais ao gráfico do arco tangente, $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$.

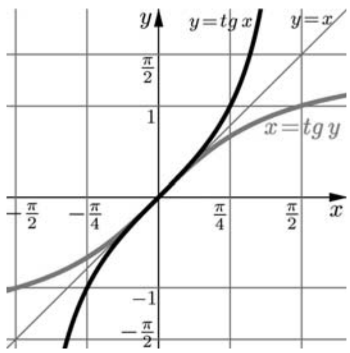


Figura 30.2: Gráfico de $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

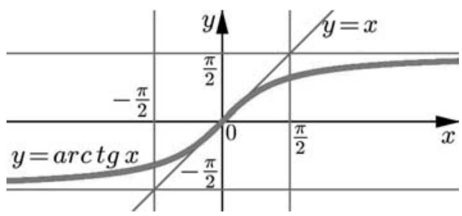


Figura 30.3: Gráfico de $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$.

A função arco tangente e a função tangente são inversas uma da outra. Vale a seguinte propriedade:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x),\ \text{onde } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),\ \text{ e }\ x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x),\ \text{onde } x \in \mathbb{R}}$$

Fazendo a simetria do gráfico da tangente com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.2**) obtemos o gráfico da função arco tangente, **Figura 30.3**.

Exemplo 7

Calculemos o valor do ângulo $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Seja $y = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Então, $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$ e $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos $y = \frac{\pi}{3}$.

Exemplo 8

Determinemos as soluções da equação: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2-7}{2\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

A equação proposta é equivalente a $\dfrac{x^2-7}{2\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Logo, $x^2 - 7 = -2$ e $x^2 = 5$. Portanto, $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$.

Função arco seno

A função seno tem período 2π e sua imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Restringindo x ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função bijetora. Veja a **Figura 30.4**. Portanto, para cada $y \in [-1, 1]$ existe um único $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tal que $y = \operatorname{sen} x$. Dizemos que x é o *arco seno* de y e escrevemos $x = \operatorname{arcsen} y$. Logo,

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x,\ x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \iff x = \operatorname{arcsen} y,\ y \in [-1, 1]}$$

Definindo o arco seno
Usamos nesse caso um intervalo com comprimento de meio período porque, em um período, cada ponto do intervalo $[-1, 1]$ é imagem de dois pontos. Reveja na Aula 28 o gráfico do seno.

A expressão $x = \operatorname{arcsen} y$ lê-se como: *x é igual ao arco seno de y.*

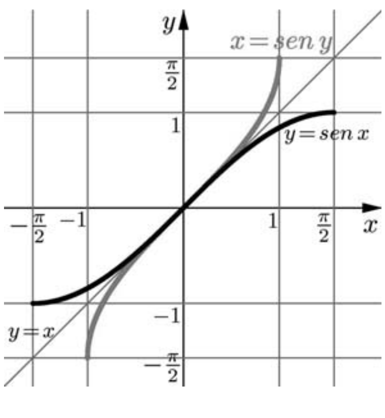


Figura 30.4: Gráfico de $y = \operatorname{sen} x,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

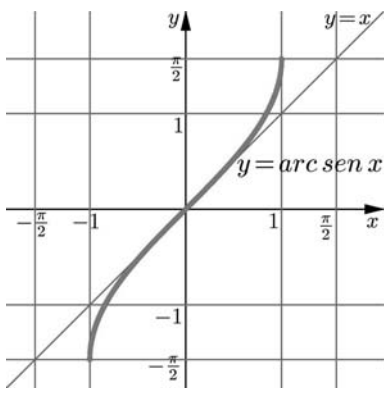


Figura 30.5: Gráfico de $y = \operatorname{arcsen} x,\ x \in [-1, 1]$.

A função arco seno e a função seno são inversas uma da outra e vale:

$$\boxed{x = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x),\ \text{onde } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ \text{ e }\ x = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x),\ \text{onde } x \in [-1, 1]}$$

Fazendo a simetria do gráfico do seno com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.4**) obtemos o gráfico da função arco seno, **Figura 30.5**.

Exemplo 9

Determinemos o valor $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$.

Como $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos que $y = \frac{\pi}{6}$. Portanto, $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}) = \cos y = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 10

Determinemos o domínio da função $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x)$ e, usando a definição da função tangente e a identidade trigonométrica entre o seno e o cosseno, verifiquemos a igualdade $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Primeiramente, o domínio de f é o conjunto dos pontos x do domínio do arco seno, tais que $\operatorname{arcsen} x$ pertence ao domínio da tangente, isto é, $\operatorname{arcsen} x$ pertence ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Portanto,

$$\operatorname{Dom}(f) = \left\{ x \in [-1,1] \mid \operatorname{arcsen} x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \right\}.$$

Como $\operatorname{arcsen} x = -\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $x = -1$ e $x = 1$, obtemos que $\operatorname{Dom}(f) = (-1,1)$.

Seja $\theta = \operatorname{arcsen} x$, onde $x \in (-1,1)$. Então, $\operatorname{sen} \theta = x$ e, pela definição da tangente, temos $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \dfrac{x}{\cos \theta}$. Assim, $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\cos \theta}$.

Precisamos calcular $\cos \theta$, onde $\theta = \operatorname{arcsen} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, como função de x.

Nesse caso, $\cos \theta > 0$ e, da identidade trigonométrica $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$, podemos escrever $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$.

Sendo $x = \operatorname{sen} \theta$, obtemos $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ e assim,

$$f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Definindo o arco cosseno
Usamos nesse caso um intervalo com comprimento de meio período porque, em um período, cada ponto do intervalo $[-1,1]$ é imagem de dois pontos. Reveja na Aula 28 o gráfico do cosseno.

A expressão $x = \arccos y$ lê-se como: *x é igual ao arco cosseno de y*.

Função arco cosseno

A função cosseno tem período 2π e sua imagem é o intervalo fechado $[-1,1]$. Restringindo x ao intervalo $[0,\pi]$, então $f(x) = \cos x$ é uma função bijetora (**Figura 30.6**). Portanto, para cada $y \in [-1,1]$ existe um único $x \in [0,\pi]$, tal que $y = \cos x$. Dizemos que x é o *arco cosseno* de y e escrevemos $x = \arccos y$. Logo,

$$\boxed{y = \cos x,\ x \in [0,\pi] \iff x = \arccos y,\ y \in [-1,1]}$$

A função arco cosseno e a função cosseno são inversas uma da outra e vale:

$$\boxed{x = \arccos(\cos x),\ \text{onde } x \in [0,\pi], \ \text{ e } \ x = \cos(\arccos x),\ \text{onde } x \in [-1,1]}$$

Fazendo a simetria do gráfico do cosseno com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.6**) obtemos o gráfico da função arco cosseno, conforme a **Figura 30.7**.

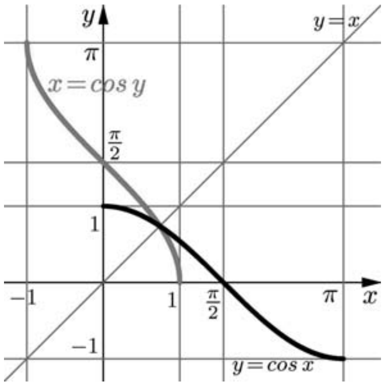


Figura 30.6: Gráfico de $y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

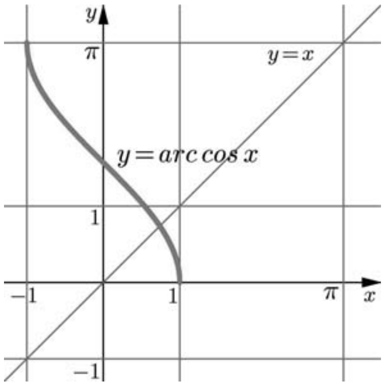


Figura 30.7: Gráfico de $y = \arccos x,\ x \in [-1, 1]$.

Exemplo 11

Determinemos o valor do ângulo $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Temos: $y = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \iff \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, e $y \in [0, \pi]$. Como $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$, concluímos que $y = \frac{5\pi}{6}$.

Exemplo 12

Verifiquemos que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, para $-1 \leq x \leq 1$.

Seja $y = \operatorname{arcsen} x$, onde $-1 \leq x \leq 1$. Sabemos que:

$$y = \operatorname{arcsen} x \iff \operatorname{sen} y = x,\ y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Sendo $\operatorname{sen} y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$, obtemos: $x = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$.

Como $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se, e somente se, $\frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi]$, a última igualdade equivale a $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$. Portanto, $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = y + (\frac{\pi}{2} - y) = \frac{\pi}{2}$.

Lembre que ...
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Função arco secante

A função secante tem período 2π e sua imagem é $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Restringindo x ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, então $f(x) = \sec x$ é uma função bijetora. Veja a **Figura 30.8**.

Portanto, para cada $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ existe um único número real $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, tal que $y = \sec x$. Dizemos que x é o *arco secante* de y e escrevemos $x = \operatorname{arcsec} y$.

Logo,

$$\boxed{y = \sec x,\ x \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi] \iff x = \operatorname{arcsec} y,\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)}$$

A função arco secante e a função secante são inversas uma da outra. Vale a seguinte propriedade:

$$x = \operatorname{arcsec}(\sec x),\ \text{onde } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi],\ \text{e}$$
$$x = \sec(\operatorname{arcsec} x),\ \text{onde } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Definindo o arco secante
Usamos nesse caso um intervalo com comprimento de meio período porque, em um período, cada ponto do intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ é imagem de dois pontos. Reveja na Aula 29 o gráfico da secante.

A expressão $x = \operatorname{arcsec} y$ lê-se como: *x é igual ao arco secante de y.*

Fazendo a simetria do gráfico da secante com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.8**) obtemos o gráfico da função arco secante, conforme a **Figura 30.9**.

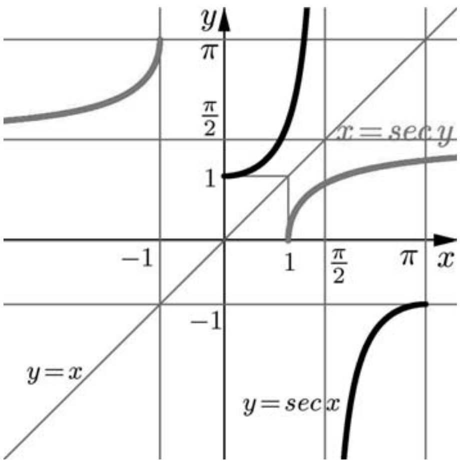


Figura 30.8: Gráfico de $y = \sec x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

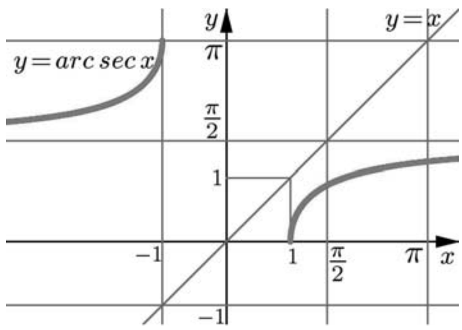


Figura 30.9: $y = \operatorname{arcsec} x$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Próximo de $x = \frac{\pi}{2}$ temos $\cos x$ próximo de zero, assim o seu inverso $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ tem $|\sec x|$ muito grande. Isso explica porque a reta vertical $x = \frac{\pi}{2}$ é uma asssíntota ao gráfico da secante e a reta horizontal $y = \frac{\pi}{2}$ é uma assíntota ao gráfico do arco secante.

Exemplo 13

Determinemos o domínio da função $f(x) = \operatorname{arcsec} \dfrac{x}{x-1}$.

O quociente $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ só está definido para $x \neq 1$.

Como $f = \operatorname{arcsec} \circ g$ é uma composição, devemos tomar $x \in \operatorname{Dom}(g)$ com $g(x) \in \operatorname{Dom}(\operatorname{arcsec}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Portanto, $x \neq 1$, com $\dfrac{x}{x-1} \geq 1$ ou $\dfrac{x}{x-1} \leq -1$. Temos:

$$\frac{x}{x-1} \geq 1 \iff \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} \geq 0 \iff x > 1\,, \quad \text{(a)}$$

ou

$$\frac{x}{x-1} \leq -1 \iff \frac{x}{x-1} + 1 = \frac{x+(x-1)}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} \leq 0\,. \quad \text{(b)}$$

Resumimos o estudo do sinal de $\dfrac{2x-1}{x-1}$ na reta real, da seguinte maneira:

	$x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x-1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\star$	$+$

O sinal $\star$ na tabela ao lado significa que o quociente não está definido.

Consultando a tabela, concluímos que para $\frac{1}{2} \leq x < 1$ a desigualdade em (b) é válida. Fazendo a união com o intervalo obtido em (a), temos:

$$\text{Dom}(f) = [\tfrac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty).$$

Função arco cossecante

Definindo o arco cossecante
Usamos nesse caso um intervalo com comprimento de meio período porque, em um período, cada ponto do intervalo $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ é imagem de dois pontos. Reveja na Aula 29 o gráfico da cossecante.

A função cossecante tem período 2π e sua imagem é $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Restringindo x ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$, então $f(x) = \operatorname{cossec} x$ é uma função bijetora. Veja a **Figura 30.10**.

Assim, para cada $y \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ existe um único número real $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$, tal que $y = \operatorname{cossec} x$. Dizemos que x é o *arco cossecante* de y e escrevemos $x = \operatorname{arccossec} y$. Portanto,

$$\boxed{y = \operatorname{cossec} x, x \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \tfrac{\pi}{2}] \iff x = \operatorname{arccossec} y, y \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)}$$

A função arco cossecante e a função cossecante são inversas uma da outra. Vale a seguinte propriedade:

A expressão $x = \operatorname{arccossec} y$ lê-se como: *x é igual ao arco cossecante de y.*

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \operatorname{arccossec}(\operatorname{cossec} x),\ \text{onde } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}],\ \text{e} \\ x = \operatorname{cossec}(\operatorname{arccossec} x),\ \text{onde } x \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty) \end{array}}$$

Fazendo a simetria do gráfico da cossecante com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.10**) obtemos o gráfico da função arco cossecante, conforme a **Figura 30.11**.

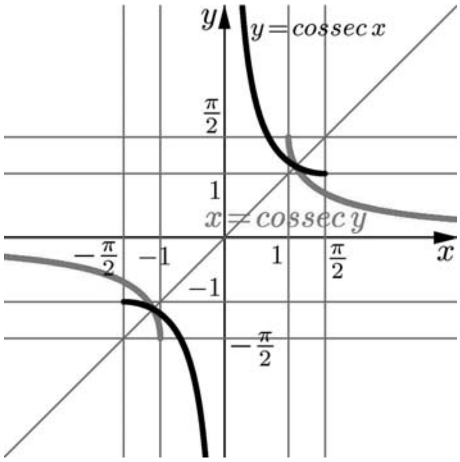


Figura 30.10: $y = \text{cossec}\, x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

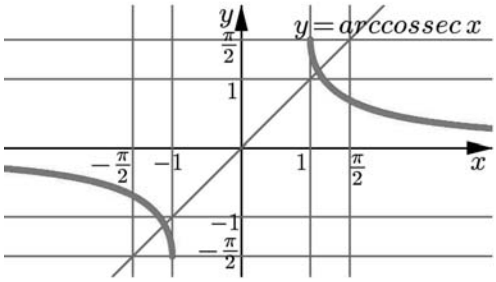


Figura 30.11: $y = \text{arccossec}\, x$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Próximo de $x = 0$ temos $\text{sen}\, x$ próximo de zero, assim o seu inverso $\frac{1}{\text{sen}\, x} = \text{cossec}\, x$ tem $|\text{cossec}\, x|$ muito grande. Isso explica porque a reta vertical $x = 0$ é uma asssíntota ao gráfico da cossecante e a reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico do arco cossecante.

Exemplo 14

Vamos resolver a equação $\text{arccossec}(2x^2 + 4x - 2) = -\frac{\pi}{6}$.

Temos:

$\text{arccossec}(2x^2 + 4x - 2) = -\frac{\pi}{6} \Longleftrightarrow 2x^2 + 4x - 2 = \text{cossec}(-\frac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{\text{sen}(-\frac{\pi}{6})} = -2$.

Logo, $2x^2 + 4x = 0$, que é equivalente a $2x(x + 2) = 0$. Portanto, $x = 0$ ou $x = -2$.

Função arco cotangente

A função cotangente tem período π e sua imagem é $\mathbb{R}$. Restringindo x ao intervalo $(0, \pi)$, então $f(x) = \text{cotg}\, x$ é uma função bijetora. Veja a **Figura 30.12**.

A expressão $x = \text{arccotg}\, y$ lê-se como x é igual ao arco cotangente de y.

Assim, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe um único $x \in (0, \pi)$, tal que $y = \text{cotg}\, x$. Dizemos que x é o *arco cotangente* de y e escrevemos $x = \text{arccotg}\, y$. Portanto,

$$\boxed{y = \text{cotg}\, x,\ x \in (0, \pi) \Longleftrightarrow x = \text{arccotg}\, y,\ y \in \mathbb{R}}$$

A função arco cotangente e a função cotangente são inversas uma da outra. Vale a seguinte propriedade:

$$\boxed{x = \text{arccotg}(\text{cotg}\, x),\ \text{onde } x \in (0, \pi),\ \text{e } x = \text{cotg}(\text{arccotg}\, x),\ \text{onde } x \in \mathbb{R}}$$

Fazendo a simetria do gráfico da cotangente com respeito à reta $y = x$ (veja a **Figura 30.12**) obtemos o gráfico da função arco cotangente, conforme a **Figura 30.13**.

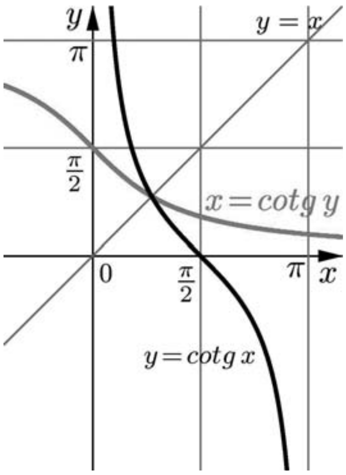


Figura 30.12: $y = \operatorname{cotg} x,\ x \in (0, \pi)$.

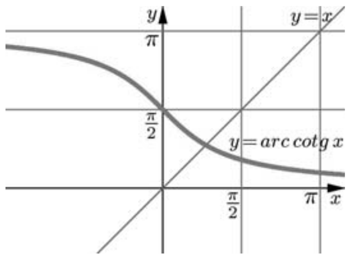


Figura 30.13: $y = \operatorname{arccotg} x,\ x \in \mathbb{R}$.

Próximo de $x = 0$ e $x = \pi$ temos $\operatorname{sen} x$ próximo de zero e $\cos x \neq 0$, assim $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ tem $|\operatorname{cotg} x|$ muito grande. Isso explica porque as retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$ são asssíntotas ao gráfico da cotangente e as retas horizontais $y = 0$ e $y = \pi$ são assíntotas ao gráfico do arco cotangente.

Exemplo 15

Calculemos o valor do ângulo $\operatorname{arccotg} \dfrac{2x}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Temos:

$$\operatorname{arccotg} \tfrac{2x}{3} = \tfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \tfrac{2x}{3} = \operatorname{cotg} \tfrac{\pi}{4} = 1 \Longleftrightarrow x = \tfrac{3}{2}.$$

Exemplo 16

Determinemos o valor do ângulo $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} \frac{7\pi}{6})$.

Atenção!

Nesse caso a resposta não é $\frac{7\pi}{6}$, pois $\frac{7\pi}{6}$ não pertence à imagem da função arco cotangente.

Temos:

$$y = \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} \tfrac{7\pi}{6}) \Longleftrightarrow \operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\cos \frac{7\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}$$

e $y \in (0, \pi)$.

Como o arco no intervalo $(0, \pi)$ com cotangente igual a $\sqrt{3}$ é $\frac{\pi}{6}$, obtemos $y = \frac{\pi}{6}$.

Resumo

Você aprendeu as funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante; seus domínios, suas imagens e seus gráficos. Aprendeu ainda a resolver equações com essas funções.

Exercícios

1. Determine:

a. $\operatorname{arctg}(-1)$ **b.** $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2})$

d. $\operatorname{sen}(\arccos \frac{1}{2})$ **e.** $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2})$ **f.** $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$

g. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ **h.** $\arccos(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3})$ **i.** $\operatorname{arcsec}(\sec \frac{7\pi}{6})$

j. $\arccos(\cos(\frac{-\pi}{4}))$ **k.** $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} \frac{4\pi}{3})$ **l.** $\operatorname{arccossec}(\operatorname{cossec}(-\frac{\pi}{6}))$

2. Resolva:

a. $\arccos(x+2) = \dfrac{\pi}{6}$ **d.** $\operatorname{arcsen}(2x-1) = \dfrac{\pi}{3}$

b. $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ **e.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-5}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

c. $\operatorname{arcsen}(4x+1) = -\dfrac{\pi}{3}$ **f.** $\operatorname{arcsec}(x^2-2x+1) = \dfrac{\pi}{3}$

3. Determine o domínio da função f:

a. $f(x) = \sqrt{\arccos x}$ **e.** $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

b. $f(x) = \operatorname{arcsec}(x^2+x)$ **f.** $f(x) = \arccos(2x-5)$

c. $f(x) = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ **g.** $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2-2x)$

d. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ **h.** $f(x) = \operatorname{arccotg}\sqrt{x^3-x}$

Auto-avaliação

Você entendeu as definições das funções trigonométricas inversas? Para resolver os Exercícios 1 e 2 use a definição das funções trigonométricas inversas. Caso tenha dificuldade releia o texto e refaça os exemplos. No Exercício 3 você deve combinar os resultados dessa aula com o conceito de composição de funções, ensinado na Aula 26. Se não conseguiu resolver o Exercício 3, deve reestudar a Aula 26.

Aula 31 – Funções exponencial e logaritmo

Objetivos

- Compreender a função exponencial com base real $a > 0$, seu gráfico e suas propriedades.
- Compreender a função logaritmo com base real $a > 0$, seu gráfico e suas propriedades.
- Relacionar as funções exponencial e logaritmo com base real $a > 0$.

Conceitos:

Números reais, potências de números reais, desigualdades, composição de funções e funções invertíveis.

Vimos, no início desse módulo, que as funções podem modelar várias situações do cotidiano. Aprenderemos agora as funções exponenciais e logarítmicas, que auxiliam nos estudos de crescimento populacional, desintegração radioativa e cálculo de juros compostos, entre outros.

Vejamos um exemplo ilustrativo de crescimento populacional.

Exemplo 6

Uma cultura de bactérias está crescendo a uma taxa tal que o número de bactérias dobra a cada hora. Sabendo que havia 1.000 bactérias quando o processo de crescimento começou, então, após uma hora, o número de bactérias seria 2×10^3.

Na tabela abaixo, calculamos o número de bactérias nas quatro primeiras horas depois de iniciada a cultura. A cultura de bactérias tem início em $t = 0$ hora.

n horas	0	1	2	3	4
número de bactérias	10^3	2×10^3	4×10^3	8×10^3	16×10^3

Se n é um número natural, o número de bactérias após n horas é $10^3 \times 2^n$.

É razoável dizer que, após x horas, $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, o número de bactérias é dado por:

$$\boxed{f(x) = 10^3 \times 2^x}$$

Na Aula 7, do Módulo 1, determinamos o valor do número real $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 1,414\ldots$ com 3 casas decimais corretas. Isto é:

$$\boxed{1,414 < \sqrt{2} < 1,415}$$

O raciocínio utilizado para a determinação das três primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$ é muito importante.

Daí, podemos concluir que $(1,414)^3 < \sqrt{2^3} < (1,415)^3$. Usando uma calculadora, temos:

$$2{,}827145944 < \sqrt{2^3} < 2{,}833148375\,.$$

Assim, o número de bactérias após $1,5$ horas é estimado como:

$$2.827{,}145944 < f(\tfrac{3}{2}) = 10^3 \times \sqrt{2^3} < 2.833{,}148375\,.$$

A expressão a^x lê-se como: a *elevado* a x.

Aprendemos que as potências reais de números reais não-negativos são calculadas usando aproximações racionais da base e do expoente.

Definição 31.1 (Função exponencial)
Fixado o número real $a > 0$ e $a \neq 1$, a *função exponencial de base a* é definida por:

$$\boxed{f(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R}}$$

O conceito matemático de limite, a ser aprendido no Cálculo I, formaliza a noção de aproximação e o significado de estar próximo de um número real.

As propriedades da função exponencial são conseqüência das propriedades das potências com expoente racional. A demonstração dessas propriedades requer conhecimentos e conceitos mais avançados e não será feita aqui, mas você verá a justificativa na disciplina Cálculo I.

O importante aqui é aprender as propriedades da função exponencial, adquirir a habilidade de calcular com essa função, aprender a esboçar o seu gráfico e comparar funções exponenciais. Com esse objetivo, resumimos as propriedades das potências na seguinte proposição.

Proposição 31.1 (Propriedades das potências)
Sejam $a > 0$, $b > 0$, x e y números reais. Valem as seguintes propriedades:

(i) $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

(ii) $a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $a^x = 1$ se, e somente se, $a = 1$ ou $a \neq 1$ e $x = 0$.

(iv) $a^x a^y = a^{x+y}$.

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(vi) $(ab)^x = a^x b^x$.

(vii) Se $a < b$ e $x > 0$, então $a^x < b^x$.

(viii) Se $a > 1$ e $x < y$, então $a^x < a^y$.

(ix) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^x > a^y$

Da propriedade (iii) acima, observamos que a função $f(x) = 1^x = 1$ é a função constante de valor 1 em $\mathbb{R}$.

Fixemos $a > 0$ e $a \neq 1$ e consideremos a função exponencial $f(x) = a^x$.

O seu gráfico é:

$$\boxed{\mathrm{Graf}(f) = \{\, (x, a^x) \mid x \in \mathbb{R} \,\}}$$

Vamos fazer uma análise desse gráfico, usando as propriedades das potências.

• Da propriedade (i), vemos que os pontos do plano $(0, 1)$ e $(1, a)$ são pontos do gráfico, que intersecta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

• Da propriedade (ii), temos que o gráfico não intersecta o eixo x, pois $y = a^x$ nunca é zero, e tem pontos no quadrante II, quando $x < 0$, e no quadrante I, quando $x > 0$.

• A propriedade (viii) significa que a função exponencial com base maior do 1 é crescente.

• A propriedade (ix) significa que a função exponencial com base menor do 1 é decrescente.

Com essas informações, nas **Figuras 31.1** e **31.2**, esboçamos os gráficos das funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, que ilustram os casos em que a base é $a > 1$ e $0 < a < 1$, respectivamente.

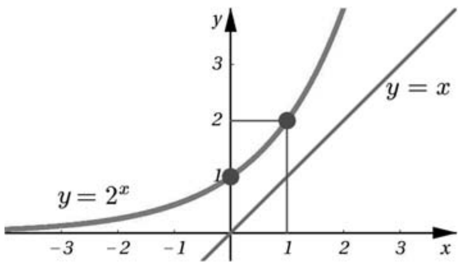


Figura 31.1: Gráfico de $f(x) = 2^x$.

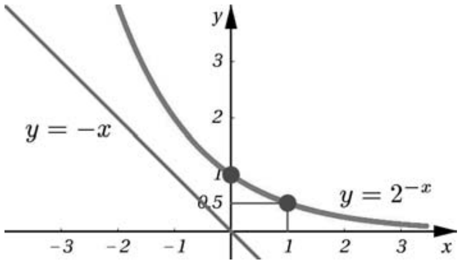


Figura 31.2: Gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

Para visualizar o gráfico de $f(x) = 2^x$ construa, usando uma calculadora, uma tabela de valores com $x = \ldots, -10, -9, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 9, 10, \ldots$ e os respectivos valores de $f(x)$. Observe agora que $g(x) = 2^{-x} = f(-x)$, significando que o $\mathrm{Graf}(g)$ é a simetria com respeito ao eixo y do $\mathrm{Graf}(f)$, e construa o gráfico de $g(x) = 2^{-x}$.

Em geral, o gráfico de $f(x) = a^x$ tem o seguinte aspecto:

Lembre que ···

Funções crescentes são injetoras.

Funções decrescentes são injetoras.

Para entender o comportamento de uma função, costumamos comparar o seu gráfico com o de outra bem conhecida. Na **Figura 31.1**, comparamos $\mathrm{Graf}(y = 2^x)$ com $\mathrm{Graf}(y = x)$, para $x > 0$, e com $\mathrm{Graf}(y = 0)$, para $x < 0$. Observe que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = 2^x$ pois, quando $|x|$ é grande e $x < 0$, a distância entre os pontos do $\mathrm{Graf}(y = 2^x)$ e da reta $y = 0$ é pequena.

Na **Figura 31.2**, comparamos $\mathrm{Graf}(y = 2^{-x})$ com $\mathrm{Graf}(y = -x)$, para $x < 0$, e com $\mathrm{Graf}(y = 0)$, para $x > 0$. Observe que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = 2^{-x}$ pois, quando $|x|$ é grande e $x > 0$, a distância entre os pontos do $\mathrm{Graf}(y = 2^{-x})$ e da reta $y = 0$ é pequena.

A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = a^x$, $a > 1$ pois, quando $|x|$ é grande e $x < 0$, a distância entre os pontos do Graf$(y = a^x)$ e do Graf$(y = 0)$ é pequena. Analogamente, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ pois, quando $|x|$ é grande e $x > 0$, a distância entre os pontos do Graf$(y = a^x)$ e do Graf$(y = 0)$ é pequena.

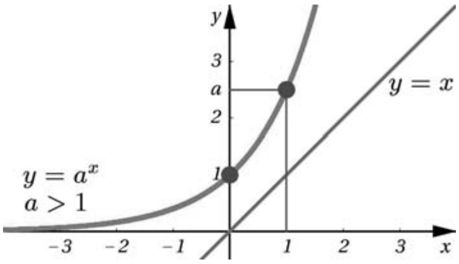


Figura 31.3: Gráfico de $f(x) = a^x$ com $a > 1$.

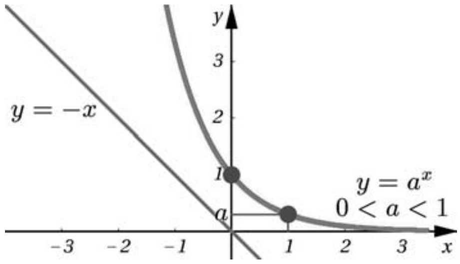


Figura 31.4: Gráfico de $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$.

Nesses gráficos, podemos ver que toda reta horizontal $y = y_0$, com $y_0 > 0$, intersecta o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ num único ponto (x_0, y_0), onde $y_0 = a^{x_0}$. Isto significa que a função exponencial é injetora e a sua imagem é o intervalo $(0, \infty)$.

A exponencial de base e é a exponencial mais importante, sendo e um número irracional. O valor de e com 40 casas decimais corretas é:

$$\boxed{e = 2,7182818284590452353602874713526624977 57\ldots}$$

Agora podemos dar outras aplicações da função exponencial. Nos Exemplos 7 e 8 apresentamos, respectivamente, a desintegração radioativa e juros compostos.

Exemplo 7

Os materiais radioativos se desintegram a uma taxa que é proporcional à quantidade de material presente em cada momento.

A taxa de desintegração radioativa de uma substância, geralmente, é descrita em termos da meia-vida da substância. A meia-vida é o tempo em que metade de uma amostra se desintegra.

O carbono-14 é usado para determinar a idade de descobertas arqueológicas, enquanto o urânio e o potássio são usados na determinação de idades geológicas.

A meia-vida do carbono-14, do urânio-238 e do potássio-40 são, respectivamente, $5,75 \times 10^3$ anos, $4,5 \times 10^9$ anos e 14×10^9 anos.

A quantidade de material radioativo em função do tempo é dada por:

$$\boxed{f(x) = Me^{rx}}$$

onde M é a quantidade inicial e $r < 0$ depende da taxa de desintegração radioativa do material. Como $r < 0$, pelas propriedades (ii), (viii) e (i) das potências, temos a desigualdade $0 < e^r < 1$.

Definindo $a = e^r$, obtemos

$$e^{rx} = (e^r)^x = a^x,$$

onde $0 < a < 1$.

Portanto, a função $f(x) = Me^{rx}$, $M > 0$ e $r < 0$, é uma função decrescente.

Assim, denotando a meia-vida por T, temos que:

$$\boxed{\frac{M}{2} = Me^{rT} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} = e^{rT}}$$

Nesse caso, a função quantidade de material radioativo f é $f = g \circ h$, onde $g(x) = e^x$ e $h(x) = rx$. Verifique!

Exemplo 8

Digamos que você tenha 10.000 reais para fazer uma aplicação financeira. Todos os bancos têm a poupança que paga 5% de juros anuais, compostos mensalmente. Entretanto, o Banco A oferece uma aplicação com juros compostos diariamente. Quanto a mais você receberia de juros no fim de um ano, aplicando no Banco A?

Primeiramente, uma aplicação financeira que rende $P\%$ de juros anuais compostos n vezes por ano, após $\frac{1}{n}$ do ano, paga $c \cdot (\frac{r}{n})$ reais sobre o depósito inicial de c reais, onde $r = \frac{P}{100}$ é o percentual escrito como uma fração decimal. Assim, o total recebido é:

$$c + c \cdot (\tfrac{r}{n}) = c \cdot (1 + \tfrac{r}{n}) \text{ reais.}$$

Depois de mais $\frac{1}{n}$ do ano, o banco paga $c \cdot (1 + \frac{r}{n}) \cdot (\frac{r}{n})$ reais de juros, dando um total de:

$$c \cdot (1 + \tfrac{r}{n}) + c \cdot (1 + \tfrac{r}{n}) \cdot (\tfrac{r}{n}) = c \cdot (1 + \tfrac{r}{n})^2.$$

Analogamente, cada vez que o banco paga $P\%$ de juros, o total da conta fica multiplicado por $1 + \frac{r}{n}$. Depois de um ano, a conta tem um total de

$$c \cdot (1 + \tfrac{r}{n})^n.$$

e depois de x anos, tem o total de

$$c \cdot (1 + \tfrac{r}{n})^{nx}.$$

Estamos prontos para determinar quanto você receberia a mais, fazendo a aplicação no Banco A. Usando uma máquina de calcular e a fórmula acima com $r = 0,05$, temos a seguinte tabela:

Freqüência de pagamento	Total em reais
Anualmente ($n = 1$ vez por ano)	$10.500,00$
Semestralmente ($n = 2$ vezes por ano)	$10.506,25$
Trimestralmente ($n = 4$ vezes por ano)	$10.509,45$
Mensalmente ($n = 12$ vezes por ano)	$10.511,61$
Diariamente ($n = 365$ vezes por ano)	$10.512,67$
Hora a hora ($n = 8.760$ vezes por ano)	$10.512,70$
Minuto a minuto ($n = 525.600$ vezes por ano)	$10.512,71$

Assim, você receberia 1 real e 6 centavos a mais aplicando no banco A.

Observe que se o pagamento de juros fosse hora a hora ou minuto a minuto, a diferença no rendimento seria de apenas 1 centavo.

Você deve estar se perguntando: afinal, que relação há entre os juros compostos e a função exponencial? Para entender, vejamos o seguinte exemplo sobre *juros compostos continuamente*.

Exemplo 9

Uma quantia de c reais que rende juros anuais de $P\%$, *compostos continuamente* durante um período de x anos, dá um total de:

$$\boxed{f(x) = ce^{rx} \text{ reais}}$$

De fato, do exemplo anterior, temos o total $f(x) = c \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nx}$, após x anos e uma freqüência de n pagamentos anuais, onde $r = \frac{P}{100}$ é o percentual escrito como uma fração decimal. A expressão juros compostos continuamente significa que n é muito grande.

Fazendo $n = kr$, na expressão acima, obtemos:

$$c \cdot (1 + \tfrac{r}{n})^{nx} = c \cdot (1 + \tfrac{r}{kr})^{krx} = c \cdot \left(\left(1 + \tfrac{1}{k}\right)^k\right)^{rx}.$$

Note que n ser grande é equivalente a k também ser grande, em virtude de r estar fixo.

Aproximação em Matemática é o conceito de *limite*.

A expressão $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ se aproxima de e, quando k assume valores muito grandes e o total recebido de $f(x) = ce^{rx}$.

Usando uma calculadora, determinamos alguns valores dessa expressão.

k	$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$
10	$2,5937424601$
10^2	$2,70481382942153$
10^3	$2,71692393223589$
10^4	$2,71814592682523$
10^5	$2,7182682371745$

O valor de e com 5 casas decimais corretas é $e = 2,71828$. Calculando o valor $(2,71828)^{0,05}$, obtemos $1,05127106101901$. Portanto, o valor recebido após 1 ano de aplicação de 10.000 reais com juros de 5% pagos continuamente é de $10^4 e^{0,05}$ reais, aproximadamente $10.512,71$ reais. Esse valor difere de 1 centavo do valor obtido no exemplo anterior com os juros pagos hora a hora e coincide com os juros pagos minuto a minuto.

Todo o processo de aproximação descrito acima será formalizado no Cálculo I. Lá você aprenderá o conceito de limite. O que vimos acima, significa que:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e.$$

A expressão ao lado deve ser lida como: o limite, quando k tende ao infinito, de $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ é igual a e.

Na **Figura 31.5**, finalizando o estudo da função exponencial, apresentamos o gráfico de $f(x) = e^x$, comparativamente com os gráficos das funções $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 3^x$.

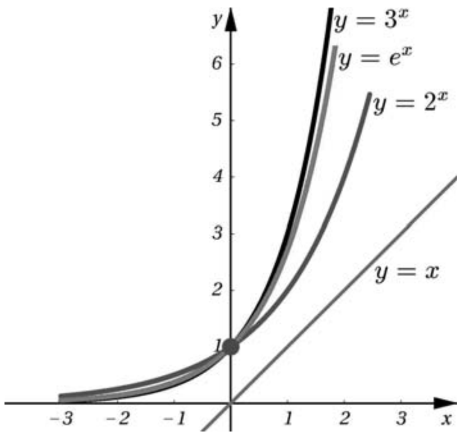


Figura 31.5: Gráficos de $f(x) = e^x$, $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 3^x$.

Observe que sendo $2 < e < 3$, pela propriedade (vii), temos:

$$2^x < e^x < 3^x, \text{ para } x > 0, \quad \text{e} \quad 3^x < e^x < 2^x, \text{ para } x < 0\ .$$

John Napier
1550 - 1617,
Edinburgo, Escócia

Foi o primeiro a publicar uma tábua de logaritmos, inventados para simplificar os cálculos de produtos e quocientes, e não usou expoentes. Correspondem à base $(1-10^{-7})^{10^7}$, cujo valor é aproximadamente $1/e$.

Para saber mais, consulte: `http:www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Napier.html`

Joost Bürgi
1552-1632,
Lichtensteig, Suiça

Era um relojoeiro e construiu importantes instrumentos científicos. Independentemente de Napier, calculou as tábuas de logaritmos na base $(1+10^{-4})^{10^4}$, que é aproximadamente e.

Mais informações em: `http:www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Burgi.html`

Agora vamos estudar a função logaritmo na base a, onde a é um número real positivo e $a \neq 1$.

A função exponencial na base a, $a \neq 1$ e $a > 0$, $f(x) = a^x$ tem como domínio e imagem os intervalos:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (0, \infty),$$

sendo uma função crescente, quando $a > 1$, e decrescente, quando $a < 1$, é sempre uma função injetora.

Assim, cada $v \in \text{Im}(f) = (0, \infty)$ é imagem de um único $u \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, isto é, existe um único $u \in \mathbb{R}$ tal que $v = a^u$. Dizemos que u é o logaritmo de v na base a e escrevemos $u = \log_a v$. Portanto,

$$\boxed{u = \log_a v \quad \text{se, e somente se,} \quad a^u = v, \quad \text{onde} \quad v \in (0,\infty) \quad \text{e} \quad u \in \mathbb{R}}$$

Definição 31.2 (Função logaritmo na base a)
O *logaritmo na base a*, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é a função denotada por $\log_a$ e definida por:

$$\boxed{y = \log_a x \quad \text{se, e somente se,} \quad a^y = x}$$

com domínio e imagem dados por $\text{Dom}(\log_a) = (0, \infty)$ e $\text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$.

Exemplo 10

Vamos calcular os valores indicados:

a. $\log_2 16$.

$y = \log_2 16 \iff 16 = 2^y \iff 2^4 = 2^y \iff y = 4$.

b. $\log_2 \frac{1}{32}$.

$y = \log_2 \frac{1}{32} \iff \frac{1}{32} = 2^y \iff 2^{-5} = \frac{1}{32} = 2^y \iff y = -5$.

c. $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

$y = \log_{\frac{1}{3}} 9 \iff 9 = (\frac{1}{3})^y = \frac{1}{3^y} = 3^{-y} \iff 3^2 = 3^{-y} \iff y = -2$.

Quais são as propriedades da função logaritmo?

Para responder, devemos olhar atentamente para a sua definição.

A função logaritmo na base a, $a \neq 1$ e $a > 0$, foi definida a partir da função exponencial na base a. Usando a relação:

$$u = \log_a v \iff v = a^u, \quad v \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad u \in \mathbb{R},$$

podemos escrever as igualdades:

$$\boxed{x = \log_a a^x, \text{ onde } x \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad x = a^{\log_a x}, \text{ onde } x \in (0, \infty)}$$

O significado dessas igualdades é que as funções logaritmo na base a e exponencial na base a são funções inversas uma da outra.

A primeira conseqüência é sabermos esboçar o gráfico do logaritmo na base a fazendo a simetria com respeito à reta $y = x$ do gráfico da função exponencial na base a. Veja as **Figuras 31.6** e **31.7**.

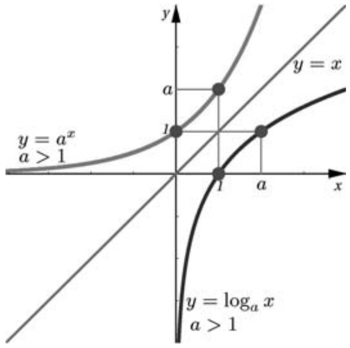


Figura 31.6: $y = \log_a x$ e $y = a^x$ com $a > 1$.

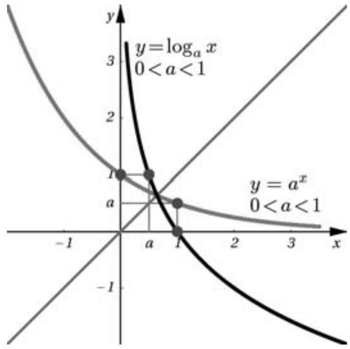


Figura 31.7: $y = \log_a x$ e $y = a^x$ com $0 < a < 1$.

Observe que o logaritmo na base $a > 1$ é uma função crescente, enquanto o logaritmo na base $a < 1$ é uma função decrescente.

O logaritmo na base e, $\log_e$, é conhecido como *logaritmo natural* e é denotado por ln. Temos então:

$$\boxed{y = \ln x,\ x \in (0, \infty) \iff e^y = x,\ y \in \mathbb{R}}$$

Portanto,

$$\boxed{e^{\ln x} = x, \quad x \in (0, \infty), \quad \text{e} \quad \ln e^y = y, \quad y \in \mathbb{R}}$$

As propriedades do logaritmo na base a decorrem das propriedades das potências com base $a \neq 1$ e $a > 0$, conforme veremos a seguir.

Reveja na Aula 27:

as propriedades de uma função que tem inversa, as relações entre a função f e a sua inversa f^{-1} e a relação entre o gráfico de f e o gráfico de f^{-1}.

A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \log_a x$, pois a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de sua função inversa, $f^{-1}(x) = a^x$.

A maior parte das notações que usamos hoje foi introduzida por **Euler**, inclusive a letra e para a base do logaritmo natural, os símbolos $f(x)$ para o valor de uma função e o de $\sum$ para o somatório.

O logaritmo natural... também é conhecido como logaritmo neperiano em homenagem a John Napier.

Por quê?
O sobrenome Napier aparece de diversas maneiras: Napeir, Nepair, Napare, Naper, Nepeir, ..., Neper. Na sua época, a forma mais comum de soletrar seu nome era JHONE NEPER!

Proposição 31.2 (Propriedades do logaritmo na base a)
Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$ números reais quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

(i) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$.

(ii) $\log_a x = 0$ se, e somente se, $x = 1$.

(iii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(iv) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(v) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(vi) Se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$.

(vii) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a x > \log_a y$.

(viii) (Mudança de base) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Demonstração: Usaremos as propriedades das potências, da Proposição 31.1

(i): Segue da propriedade (i) da Proposição 31.1.

(ii): Segue da propriedade (iii) da Proposição 31.1, com $a \neq 1$.

(iii): Tomando $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, temos que $a^u = x$ e $a^v = y$. Pela propriedade (iv) da Proposição 31.1, obtemos

$$xy = a^u a^v = a^{u+v}.$$

Logo, $u + v = \log_a xy$.

(iv): Pela comutatividade da multiplicação de números reais, pela propriedade (v) da Proposição 31.1 e pelo fato do logaritmo na base a e da exponencial na base a serem funções inversas uma da outra, temos

$$a^{y \log_a x} = a^{(\log_a x) y} = (a^{\log_a x})^y = x^y.$$

Portanto, $y \log_a x = \log_a x^y$.

(v): Pelas propriedades (iv) e (v) da Proposição 31.1, pela comutatividade da multiplicação de números reais e pelo fato do logaritmo e da exponencial, ambas na base a, serem funções inversas uma da outra, temos

$$a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a x} a^{-\log_a y} = a^{\log_a x} (a^{\log_a y})^{-1} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y}.$$

Daí segue o resultado.

(vi): É conseqüência da propriedade (viii) da Proposição 31.1 e do logaritmo ser a função inversa da exponencial, ambas na base a.

(vii): É conseqüência da propriedade (ix) da Proposição 31.1 e do logaritmo ser a função inversa da exponencial, ambas na base a.

(viii): Sejam $u = \log_a x$ e $v = \log_b x$. Então, $x = a^u$ e também $x = b^v$. Assim, podemos escrever:

$$v = \log_b x = \log_b a^u = u \log_b a,$$

onde a última igualdade segue da propriedade (iv) desta proposição. De onde temos a fórmula de mudança de base. $\square$

Vamos agora aplicar essas propriedades nos seguintes exemplos.

Exemplo 11

Simplifiquemos as expressões:

a. $\ln \dfrac{e^x}{e^{x-1}}$.

Como $e^x > 0$ e $e^{x-1} > 0$, pela propriedade (v) dos logaritmos e do fato de $f(x) = \ln x$ ser a função inversa de $g(x) = e^x$, temos:

$$\ln \frac{e^x}{e^{x-1}} = \ln e^x - \ln e^{x-1} = x - (x-1) = 1.$$

b. $\log_{10}(x^3 \cdot (0,1)^2)$.

Primeiramente, observe que a expressão está definida apenas para os valores de x tais que $x^3 \cdot (0,1)^2 > 0$. Como $(0,1)^2 > 0$, a desigualdade anterior é equivalente a $x^3 > 0$. Essa última desigualdade é equivalente a $x > 0$. Vamos agora simplificar a expressão dada. Substituindo $(0,1)^2 = 10^{-2}$ e pelas propriedades (iii) e (iv) dos logaritmos obtemos:

$$\log_{10}(x^3 \cdot 10^{-2}) = \log_{10} x^3 + \log_{10} 10^{-2} = 3\log_{10} x - 2\log_{10} 10 = 3\log_{10} x - 2,$$

onde a última igualdade é conseqüência de $\log_{10} 10 = 1$, propriedade (i) do logaritmo.

O matemático inglês **Henry Briggs**, 1561-1639, construiu as tábuas de logaritmo na base 10, após conversações com Napier, iniciadas em 1615.

Exemplo 12

Resolva as equações:

a. $\ln(x^2 - 4) - \ln(x+2) = 0$.

Para a igualdade estar definida, devemos ter $x^2 - 4 > 0$ e $x + 2 > 0$. Como
$x^2 - 4 > 0$ e $x + 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ e $x \in (-2, \infty) \iff x \in (2, \infty)$, então a solução da igualdade, se existir, deve pertencer ao intervalo $(2, \infty)$.

Pelas propriedades (v) e (ii) dos logarimos, temos:

$0 = \ln(x^2 - 4) - \ln(x+2) = \ln \dfrac{x^2-4}{x+2} = \ln \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \ln(x - 2) \iff x - 2 = 1 \iff x = 3$.

b. $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 2$.

A expressão acima está definida apenas para valores de x tais que $x - 4 > 0$ e $x + 4 > 0$, isto é, $x \in (4, \infty) \cap (-4, \infty) = (4, \infty)$. Portanto, se x é solução da igualdade, então $x \in (4, \infty)$.

Agora vamos resolver. Pela propriedade (iii), temos:

$$2 = \log_3(x-4) + \log_3(x+4) = \log_3(x-4)(x+4) = \log_3(x^2 - 16).$$

Da igualdade acima e pela definição da função logaritmo na base 3, obtemos que $x^2 - 16 = 3^2$. Logo, $x^2 = 25$. Portanto, $x = -5$ ou $x = 5$. Como a solução pertence ao intervalo $(4, \infty)$, devemos descartar o valor $x = -5$ e apenas $x = 5$ satisfaz a igualdade proposta.

Finalizamos com um problema da prática cotidiana.

Exemplo 13

Uma substância radioativa está decaindo (ou desintegrando) de acordo com a fórmula $f(x) = 80e^{-0,2x}$, onde $f(x)$ é a quantidade de material em gramas após x anos. Usando uma calculadora e sabendo que $2,7182 < e < 2,7183$, determine: quanto há de substância radioativa após 3 anos e qual a meia-vida dessa substância?

Para a primeira questão, temos $f(3) = 80e^{(-0,2)\cdot 3} = 80e^{-0,6}$. Usando uma calculadora e o valor de $e = 2,718$, com 3 casas decimais corretas, obtemos $f(3) = 80 \times (0,5488457790367) = 43,907662322936$ gramas.

A quantidade inicial é $f(0) = 80$. Seja T a meia-vida. Então,

$$\frac{f(0)}{2} = f(T) \Longleftrightarrow 40 = 80e^{-0,2T}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = e^{-0,2T} \Longleftrightarrow \ln\frac{1}{2} = -0,2T \Longleftrightarrow -\ln 2 = -0,2T \Longleftrightarrow T = \frac{\ln 2}{0,2}.$$

Usando uma calculadora, determinamos $T = \dfrac{\ln 2}{0,2} = \dfrac{0,693}{0,2} = 3,465$. Logo, a meia-vida T é de aproximadamente $3,46$ anos.

Resumo

Você aprendeu as funções exponencial na base a e logaritmo na base a, suas propriedades, seus gráficos, e que uma é a função inversa da outra.

Exercícios

1. Resolva:
$y = \log_9 81$, $\log_a 8 = \frac{3}{4}$, $\log_{49} x = -\frac{1}{2}$ e $\log_b(\log_b(nx)) = 1, n > 0$.

2. Ache o valor de x:

   a. $\frac{1}{5^{x-1}} = 125$ b. $10^{x^2} = 2$

   c. $(\frac{25}{9})^x = \frac{3}{5}$ d. $(\frac{5}{3})^x = \frac{125}{27}$

   e. $(0,01)^x = 1000$ f. $e^{(3x+5)} = 100$

   g. $e^{\ln(1-x)} = 2x$ h. $\frac{1}{2}\ln(x+4) = \ln(x+2)$

   i. $e^{\ln(6x^2-4)} = 5x$ j. $\ln x = \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln 8$

   k. $\ln(x^2 + x - 2) = \ln x + \ln(x-1)$ l. $e^{-2\ln x} = 25x^2$

   m. $\log_{10}(x^3 - 1) - \log_{10}(x^2 + x + 1) = 1$ n. $10^{\mathrm{sen}(2x-\frac{\pi}{4})} = 1$

   o. $\log_4 \frac{1}{4} = \mathrm{tg}(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$

3. Simplifique:
   a. $\ln(e^{3x})$ b. $e^{\ln\sqrt{x}}$ c. $\ln(x^3 \cdot e^2)$ d. $\left(e^{\ln x}\right)^2$

4. Calcule: $\log_2(\log_4 256)$ e $\log_{\frac{3}{4}}(\log_{\frac{1}{27}}(\frac{1}{81}))$.

5. Determine o domínio de f:
   a. $f(x) = \log_{10}(x-3)$ b. $f(x) = \ln(2x-1)$ c. $f(x) = \ln(\ln x)$

   d. $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ e. $f(x) = \log_2(x^2-1) - \log_2(x+1)$

   f. $f(x) = \log_3(\mathrm{arcsen}(1-x^2))$

6. Dê o domínio de $f(x)$ e determine a sua função inversa:
   a. $f(x) = 2^{x+1}$ b. $f(x) = \log_3(x+1)$

7. Esboce o gráfico de f, faça a simetria do gráfico de f com respeito à reta $y = x$, para obter o gráfico da função inversa f^{-1}, e escreva a fórmula de f^{-1}:
   a. $f(x) = 4^x$ b. $f(x) = 5^x$ c. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d. $f(x) = (0,1)^x$

8. Determine o domínio e o sinal de $f(x)$:
   a. $f(x) = 1+\ln x$ b. $f(x) = e^{2x} - x^3e^{2x}$ c. $f(x) = -3x^2e^{-3x} + 2xe^{-3x}$

9. Esboce os gráficos de f e g no mesmo sistema de coordenadas:
   a. $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ e $g(x) = 2^{\frac{x}{2}} - 3$ b. $f(x) = 8^x$ e $g(x) = 8^{x-2} + 3$

10. Dê o domínio de $f(x)$ e esboce o seu gráfico:

a. $f(x) = \log_{10} x$ **b.** $f(x) = \log_{10}(-x)$ **c.** $f(x) = -\log_{10} x$

d. $f(x) = |\log_{10} x|$ **e.** $f(x) = \log_{10} |x|$ **f.** $f(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x+1)$

11. Explique como o gráfico de $g(x)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x) = \ln x$:

a. $g(x) = \ln(ex)$ **b.** $g(x) = \ln \frac{x}{e}$ **c.** $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

d. $g(x) = \ln x^{-3}$ **e.** $g(x) = \ln \sqrt{x}$ **f.** $g(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x+1)$

12. Considere a cultura de bactérias do Exemplo 6. Determine, usando uma calculadora, quanto tempo levará para essa cultura atingir o total de 100.000 bactérias.

13. Sabendo que a meia-vida do carbono-14 é de 5.750 anos, determine a idade do esqueleto de um animal que contém $\frac{1}{3}$ da quantidade original de carbono-14, ao ser encontrado.

14. Determine quanto tempo levará para que um investidor triplique a quantia de 1.000 reais, aplicada a uma taxa de juros anuais de 10%, compostos continuamente.

Auto-avaliação

Você entendeu bem as funções exponencial na base a e logaritmo na base a, onde $a \neq 1, a > 0$, suas propriedades, seus gráficos e a relação entre elas? É bom não esquecer que o logaritmo e a exponencial na mesma base são funções inversas uma da outra. Os Exercícios de 1 a 4 trabalham as propriedades dessas funções. Os Exercícios de 5 a 11, além das propriedades das funções logaritmo e exponencial, envolvem composição de funções e a resolução de desigualdades. Os três últimos problemas são de aplicações. Se tiver dificuldades, releia a aula com atenção, refaça os exemplos e volte aos exercícios. Persistindo a dúvida, procure o tutor no pólo. Na próxima Aula faremos uma revisão do conteúdo do Pré-Cálculo.

Aula 32 – Funções-aplicações

Objetivos

- Utilizar os conceitos aprendidos na modelagem e resolução de problemas.
- Relacionar os conceitos de outras áreas da Matemática.
- Modelar problemas da prática cotidiana com o uso de funções reais de variável real.

No estudo das funções reais de variável real, você pode observar que a descrição de problemas do nosso cotidiano é feita com o auxílio das funções. O entendimento das funções reais de variável real requer: compreensão dos números racionais e reais e suas propriedades; comparação de números; resolução de desigualdades; fatoração de polinômios com coeficientes reais e aprendizado de sistema de coordenadas e algumas curvas planas para a representação gráfica de funções.

Nesta aula, nosso último encontro, vamos elaborar modelos matemáticos, relacionando os conceitos aqui apresentados com outras áreas da Matemática. Com isso, aproveitaremos também para fazer uma revisão da matéria.

ATENÇÃO: Você deve tentar resolver os exemplos, antes de conferir a solução. Para isso, indicamos a seqüência de ações a ser seguida:

- Leia todo o enunciado com atenção, apenas tomando conhecimento do problema proposto.
- Releia e tente equacionar.
- Depois confira a sua solução com a apresentada.

Mãos à obra!

Exemplo 6

Um atleta começa no ponto A, corre até o ponto P e então, corre até D.

As posições dos pontos A, B, C, D e P estão descritas na **Figura 32.1**, além disso: P está situado na reta passando por B e C e entre esses pontos; a distância de A a B é de $8\,km$, a de D a C, de $15\,km$, e a de B a C, de $30\,km$; e as retas por A e B e por D e C são perpendiculares à reta por B e C.

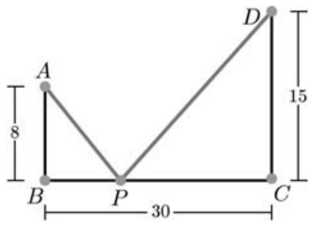


Figura 32.1: Percurso do atleta.

a. Escreva a distância total percorrida d como uma função da distância entre B e P. Dê o domínio da função d.

Seja $x = d(B, P)$ a distância entre B e P em quilômetros. Pelas condições impostas ao ponto P, observamos que $0 \leq x \leq 30$.

Escrevemos $d = d_1 + d_2$, onde $d_1 = d(A, P)$ e $d_2 = d(P, D)$. Vamos determinar as funções d_1 e d_2 em função de x.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $d_1(x) = \sqrt{x^2 + 8^2} = \sqrt{x^2 + 64}$ e $d_2(x) = \sqrt{(30 - x)^2 + (15)^2} = \sqrt{900 - 60x + x^2 + 225} = \sqrt{x^2 - 60x + 1125}$.

Logo, $d(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{x^2 - 60x + 1125}$, com $\text{Dom}(d) = [0, 30]$.

b. Sabendo que a velocidade média no percurso de A a P é de 12 km/h e, de 15 km/h de P a D, determine o tempo t de percurso como uma função da distância entre B e P e dê o domínio da função t.

Seja t_1 o tempo de percurso entre A e P e t_2, entre P e D, dados em horas. Então, a função t é dada por: $t = t_1 + t_2$. Vamos determinar t_1 e t_2 como funções de x. Usando os valores de d_1 e d_2 calculados no item anterior, temos:

A função tempo é a soma de duas funções.

Não esqueça ... velocidade$\times$ tempo =distância.

$$t_1(x) = \frac{d_1(x)}{12} \quad \text{e} \quad t_2(x) = \frac{d_2(x)}{15}.$$

Portanto, $t(x) = \dfrac{1}{12}\sqrt{x^2 + 64} + \dfrac{1}{15}\sqrt{x^2 - 60x + 1125}$.

É claro que $\text{Dom}(t) = [0, 30]$.

c. Determine o tempo de percurso, com aproximação de uma casa decimal, quando a distância entre B e P é de 6 km.

Quando $x = 6$, obtemos o tempo de percurso, em horas:

$$t(6) = \frac{\sqrt{6^2+8^2}}{12} + \frac{\sqrt{6^2-6\times60+1125}}{15} = \frac{\sqrt{100}}{12} + \frac{\sqrt{801}}{15} = \frac{5}{6} + \frac{28{,}3}{15} = 0{,}8 + 1{,}8 = 2{,}6\,.$$

Use a calculadora dos computadores do pólo, para fazer os cálculos.

Exemplo 7

Um painel, na forma de um triângulo equilátero, é construído perpendicularmente ao plano do círculo de equação $x^2 + y^2 = 16$, com um de seus lados coincidindo com a corda do círculo perpendicularmente ao eixo x, conforme a **Figura 32.2**.

Determine a área do painel como uma função de x e dê o seu domínio, sendo a unidade de medida 1 metro.

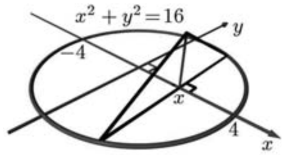


Figura 32.2: Visualização do painel triangular.

Os pontos do círculo situados nos quadrantes I e II têm coordenada $y \geq 0$ e satisfazem $y^2 = 16 - x^2$.

Portanto, o comprimento de metade da corda, que é a metade do comprimento do lado do triângulo equilátero, é dada pela função $\sqrt{16-x^2}$, $x \in [-4,4]$.

A área A do triângulo é $A = \frac{1}{2} b \times h$, onde b é o lado e h é a altura medida pelo vértice oposto ao lado. Já determinamos que $b(x) = 2\sqrt{16-x^2}$.

A altura é $h = b \operatorname{sen} 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2} b$ e $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} b^2$.

Reveja na Geometria Básica o cálculo de áreas de figuras planas.

Portanto, $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b(x))^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{16-x^2})^2 = \sqrt{3}(16-x^2)$, $x \in [-4,4]$.

Exemplo 8

Um homem de 1 metro e 80 centímetros se afasta de um poste de iluminação de 4,5 metros a uma velocidade de $3\,m/s$. Sabendo que, inicialmente, ele se encontra a 10 metros do poste, determine em cada instante de tempo t: a distância do homem ao poste, o tamanho da sua sombra e a distância da sua cabeça à lâmpada.

Na **Figura 32.3** AB é a sombra, BE é o homem, CD é o poste, D é a lâmpada e E é a cabeça do homem.

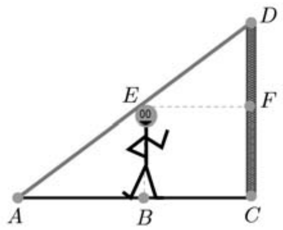


Figura 32.3: Posição relativa do homem e do poste.

Após t segundos o homem se afastou $3t$ metros da sua posição inicial de 10 metros do poste. Portanto, a sua distância $d = d(B,C)$ ao poste em metros é $d(t) = 10 + 3t$, $t \geq 0$.

Seja agora $y = d(A,B)$ o comprimento da sombra no instante t segundos. Como os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABE$ são semelhantes, temos:

$$\frac{d(C,D)}{d(A,B)+d(B,C)} = \frac{d(B,E)}{d(A,B)} \iff \frac{4{,}5}{y+d} = \frac{1{,}8}{y}.$$

Portanto, $(4{,}5)y = 1{,}8(y+d)$, isto é, $y = \dfrac{1{,}8}{2{,}7}d = \dfrac{2}{3}d$. Sendo $d(t) = 10+3t$, obtemos $y(t) = \dfrac{2}{3}(10+3t)$, com $t \geq 0$.

Consideremos $r = d(E, D)$. Tome o ponto F no poste tal que $d(C, F) = 1,8$. Então, $d(D, F) = 2,7$ e $r^2 = d^2 + (2,7)^2$. Assim, $r = \sqrt{d^2 + 7,29} = \sqrt{(10 + 3t)^2 + 7,29}$ e $r(t) = \sqrt{9t^2 + 60t + 107,29}$, $t \geq 0$.

Exemplo 9

O salário médio em reais de uma empresa, após x anos de trabalho, é dado pela função $f(x) = 300(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7})$. Sabendo que um trabalhador é demitido após 35 anos de trabalho, determine após quantos anos de trabalho o salário médio na empresa será de 1.800 reais.

No problema, note que o domínio de f é o intervalo $[0, 35]$. Devemos achar os pontos x do domínio de f, tais que sua imagem por f é 1.800, isto é:

$$300(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7}) = 1.800.$$

Essa igualdade é equivalente a $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7} = 6$, que reescrevemos como $\sqrt{4x+1} = 6 - \sqrt{x+7}$. Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$4x + 1 = 36 - 12\sqrt{x+7} + (x+7) \Longrightarrow (4x+1) - 36 - (x+7) = -12\sqrt{x+7}$$
$$\Longleftrightarrow 3x - 42 = -12\sqrt{x+7} \Longleftrightarrow x - 14 = -4\sqrt{x+7}.$$

Atenção:
Ao elevarmos ao quadrado, podemos introduzir novas soluções ao problema proposto.

Elevando ao quadrado, temos:

$$x^2 - 28x + 196 = 16(x+7) = 16x + 112 \Longleftrightarrow x^2 - 44x + 84 = 0.$$

O discriminante dessa equação é $\Delta = (44)^2 - 4 \cdot 84 = 1936 - 336 = 1600$. Logo, $\sqrt{\Delta} = 40$ e as suas raízes são: $x_1 = \dfrac{44-40}{2} = 2$ e $x_2 = \dfrac{44+40}{2} = 42$. Como $\text{Dom}(f) = [0, 35]$, a raiz 42 deve ser descartada e a resposta do problema é $x = 2$ anos.

Exemplo 10

Uma empresa, após x anos de funcionamento, tem em caixa para investimento o montante em dólares presumido de $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 1}{\sqrt{x+1}} + 4x\sqrt{x+1}$. Determine quando a empresa começará a dar lucro.

Primeiramente, a fórmula $f(x)$ está definida para $x > -1$, entretanto, pelo problema proposto, o domínio de f é o intervalo $[0, \infty)$. Devemos determinar quais os valores de $x \geq 0$, tais que $f(x) \geq 0$. Reescrevemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 8x - 1}{\sqrt{x+1}} + 4x\sqrt{x+1} = \frac{(x^2 - 8x - 1) + 4x(x+1)}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x^2 - 8x - 1 + 4x^2 + 4x}{\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2 - 4x - 1}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}.$$

Portanto, $f(x) \geq 0$, com $x \geq 0$, é equivalente a $\dfrac{5x^2 - 4x - 1}{\sqrt{x+1}} \geq 0$, com $x \geq 0$.

A expressão à esquerda da última desigualdade tem denominador positivo. Logo, essa desigualdade é equivalente a $5x^2 - 4x - 1 \geq 0$, com $x \geq 0$. O discriminante desse trinômio do 2º grau é $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 36$.

Assim, $\sqrt{\Delta} = 6$ e as suas raízes são: $x_1 = \dfrac{4-6}{10} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}$ e $x_2 = \dfrac{4+6}{10} = 1$.

Como $a = 5 > 0$, os valores do trinômio são negativos entre as raízes e não-negativos em$(-\infty, -\frac{1}{5}] \cup [1, \infty)$.

Fazendo a interseção do intervalo $[0, \infty)$ com $(-\infty, -\frac{1}{5}] \cup [1, \infty)$, obtemos o intervalo $[1, \infty)$. Portanto, a partir do primeiro ano de funcionamento a empresa é lucrativa.

Apêndice

Encerramos o nosso trabalho nesse semestre letivo, apresentando para os alunos curiosos um modelo de crescimento populacional, que é uma aplicação muito interessante da teoria das funções reais, sua operação de composição e representação gráfica.

Iteração de funções

Quando pensamos numa função $f(x)$ como sendo uma máquina ou um processo, o número x é a entrada do processo e o valor $f(x)$, a saída. Suponhamos que o processo produz saídas que, por sua vez, podem ser tomadas como entradas do mesmo processo. Isto é, na nossa linguagem, $f(\text{Dom}(f)) \subset \text{Dom}(f)$.

Então podemos reavaliar o processo na saída $f(x)$, o que significa avaliar $f(f(x)) = (f \circ f)(x)$ que, por sua vez, pode ser tomado como entrada, dando lugar a $(f \circ f \circ f)(x)$, depois a $(f \circ f \circ f \circ f)(x)$ e assim sucessivamente.

Um procedimento como esse é chamado *iteração da função f*. Assim, $f(x)$ é a *primeira iterada* de f em x, $f(f(x))$ é a *segunda iterada* de f em x, e assim por diante.

Dessa forma, dado $a \in \text{Dom}(f)$, o processo de iteração dá lugar à seqüência:

$$x_0 = a\,,\ x_1 = f(a)\,,\ x_2 = f(f(a))\,, \ldots,\ x_n = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))))\,,\ \ldots\ ,$$

Iteração
A palavra *iterar* vem do Latim *iteratus* que significa repetir. Os modelos matemáticos baseados na iteração de uma ou mais funções são a ferramenta fundamental para entendermos os processos evolutivos (que sofrem mudanças com o passar do tempo) sejam esses fenômenos naturais, físicos, econômicos, de comportamento social etc. A Matemática que estuda esse tipo de processo é, hoje em dia, denominada Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Essa é uma das áreas mais fecundas e nobres da Matemática moderna, seus avanços e técnicas envolvem e unificam as diversas teorias matemáticas e físicas.

denominada a *órbita positiva* de a, que descreve a história futura do processo quando aplicado à entrada inicial $x_0 = a$. A entrada inicial é também chamada de *valor inicial*, *estado inicial*, *valor semente*, *configuração inicial* etc., dependendo do contexto em que a função f esteja sendo considerada.

A expressão

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}, \quad n \geq 0,$$

é a *relação recursiva* ou *de recorrência* que descreve o processo.

Um problema muito importante na teoria que estuda a iteração de funções (chamada Teoria dos Sistemas Dinâmicos) é o de predizer o comportamento de um processo iterativo a médio e longo prazos, isto é, quando a quantidade de iterados (que aqui designamos por n) é muito grande.

Thomas R. Malthus
1766-1834, Inglaterra
Economista político, esteve sempre preocupado com o declínio das condições de vida do seu povo. Chegou a criticar a irresponsabilidade da classe baixa da Inglaterra, sugerindo que os pobres não deveriam ter mais filhos do que fossem capazes de sustentar. Publicou, em 1798, o *Ensaio sobre o princípio das populações*, estudado por Charles Darwin, antes de ele escrever sobre as origens das espécies. Veja `www.ucmp.berkeley.edu/history/malthus.html`

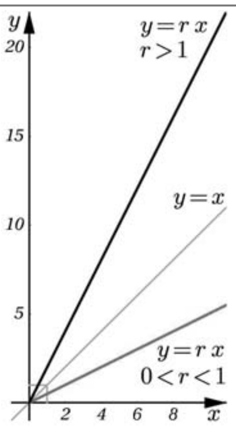


Figura 32.4: $f(x) = rx$, $r > 0$.

O crescimento populacional

Em 1798, o economista inglês *Thomas Malthus*, publicou o seu *Ensaio sobre o princípio das populações.* Nesse trabalho, foi estabelecido um primeiro modelo matemático de crescimento populacional, denominado irrestrito, a partir do qual Malthus concluiu que a população humana cresce geometricamente assim, enquanto a quantidade de alimento disponível cresce apenas aritmeticamente, mais cedo ou mais tarde, a humanidade iria mergulhar na miséria e na fome. Hoje em dia, vemos que as predições de Malthus não estão muito longe da nossa realidade.

No seu modelo, Malthus supõe que a quantidade de indivíduos de uma determinada espécie de seres vivos, aumenta ou diminui, de geração em geração, proporcionalmente à quantidade de indivíduos existentes na espécie. Isto é, se a população tem x indivíduos, então na geração seguinte, haverá rx indivíduos, onde r é uma constante positiva, que depende apenas da espécie de seres vivos em questão e é chamada *fator Malthusiano* da espécie.

Dessa forma, se a população de seres de uma determinada espécie contém $x_0 = c$ indivíduos, então a geração seguinte terá $f(x_0) = rx_0$ indivíduos, duas gerações após haverá $f(f(x_0)) = r^2x_0$ indivíduos, e assim por diante. Dessa forma, é obtida uma *relação de recorrência* que permite determinar a quantidade de indivíduos da população em qualquer geração posterior:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = c \\ x_k = f(x_{k-1}) = rx_{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, k > 0 \end{cases}}$$

Na **Figura 32.4** mostramos os gráficos da função $f(x) = rx$ com $r > 1$ e com $0 < r < 1$. Note que o caso em que $r = 1$, correspondendo à reta diagonal $y = x$ não é interessante pois, em se tratando de crescimento populacional, indica que a população é mantida sempre constante. Fora esse caso desinteressante, temos o caso $0 < r < 1$ e o caso $r > 1$ cuja análise gráfica de iteração é mostrada nas **Figuras 32.5** e **32.6**, tomando $x_0 = c$ como população inicial.

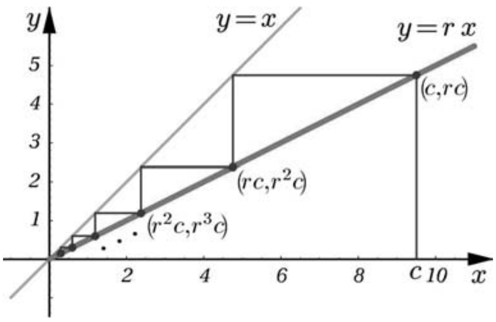


Figura 32.5: Caso $0 < r < 1$.

A partir desses gráficos podemos concluir que, se $0 < r < 1$, então a população diminui de geração em geração, tendendo à extinção e, se $r > 1$, a população aumenta gradativamente de geração em geração.

Obviamente, o modelo de Malthus não corresponde à realidade, pois há fatores externos (falta de alimento, efeitos predatórios, mudanças no meio ambiente etc.) que não são levados em consideração. Além disso, observe que, quando $r > 1$, a população pode crescer ilimitadamente, o que é fisicamente impossível.

No entanto, em 1845, o matemático belga *Pierre François Verhulst*, descreveu um modelo alternativo ao de Malthus, o chamado *modelo populacional restrito*, que descrevemos da seguinte maneira:

• O meio ambiente, ou sistema, pode suportar no máximo P indivíduos de uma determinada espécie. Isto é, se P_n designa a quantidade de indivíduos da espécie na geração n, então $P_n \leq P$. Assim, se designamos por $x_n = \dfrac{P_n}{P}$ a porcentagem de indivíduos da espécie na geração n, temos $0 \leq x_n \leq 1$.

• A porcentagem de indivíduos x_n da $n-$ésima geração é proporcional tanto à porcentagem de indivíduos existentes na geração anterior x_{n-1} quanto à porcentagem de indivíduos que o sistema ainda pode suportar na geração anterior $1 - x_{n-1}$.

Com essas considerações, obtemos a relação de recorrência que descreve o crescimento ou decaimento da população:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = c\,, \quad c \in (0,1] \\ x_n = a x_{n-1}(1 - x_{n-1})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, n > 0\,, \end{cases}}$$

sendo a uma constante positiva que depende das condições ecológicas do meio ambiente onde habita a espécie. Esse é o chamado *modelo logístico* de

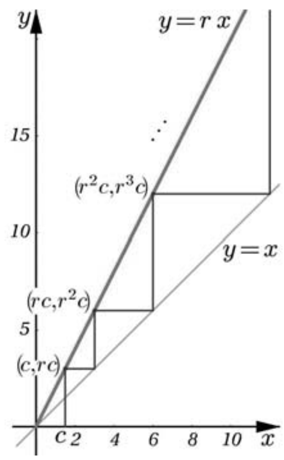


Figura 32.6: Caso $r > 1$.

Pierre François Verhulst
804-1849, Bélgica
Doutorou-se em Matemática na Universidade de Ghent em 1825. Foi professor da Universidade Livre de Bruxelas, onde ensinou Mecânica Celeste, Probabilidade, Geometria e Astronomia. Em 1846, mostrou que as forças que fazem crescer a população agem proporcionalmente à razão do excesso de população com respeito ao total, deduzindo assim a equação diferencial que descreve o crescimento, o chamado *modelo de Verhulst*. Usou o seu modelo para predizer a população da Bélgica, obtendo o valor estável de 9.400.000 habitantes. De fato, em 1994, a Bélgica tinha 10.118.000 habitantes. Tomando em consideração o fator imigrantes, vemos que o resultado de Verhulst não está muito longe da realidade.

crescimento populacional. Observe que a recorrência consiste em iterar a função $f_a(x) = ax(1-x)$, $x \in [0,1]$, chamada *função logística*.

O gráfico da curva $y = ax(1-x)$, $a > 0$ é uma parábola voltada para baixo, passa pelos pontos de abscissa $x = 0$ e $x = 1$, e alcança a sua altura máxima $\frac{a}{4}$ quando $x = \frac{1}{2}$. Na **Figura 32.7** mostramos alguns gráficos de $f_a(x) = ax(1-x)$ no intervalo $[0,1]$, com diferentes valores de a. Observe que, como $\mathrm{Dom}(f_a) = [0,1]$, para podermos efetuar as iterações de f_a, devemos garantir que a imagem de f_a esteja contida no seu domínio. Isto é, impomos a condição $f_a([0,1]) \subset [0,1]$, que equivale a exigir que $f_a(x) \in [0,1]$, para todo $x \in [0,1]$. Lembrando que $f_a(x) \leq f_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$, vemos que basta exigir a condição $\frac{a}{4} \leq 1$, isto é, $a \leq 4$.

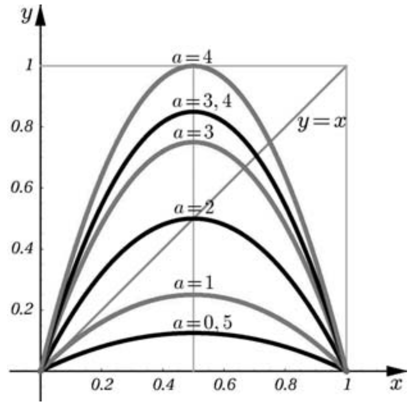


Figura 32.7: Gráficos de $f_a(x) = ax(1-x)$.

Na **Figura 32.7** vemos que algumas das parábolas intersectam a diagonal (gráfico da reta $y = x$). Isto é, há valores de $a \in [0,4]$, tais que a equação $f_a(x) = x$ possui uma solução $x = x_a \neq 0$.

Quando isso acontece dizemos que x_a é um *ponto fixo* ou *ponto de equilíbrio* de f_a, pois a igualdade $f_a(x_a) = x_a$ significa que o valor x_a é imutável durante todo o processo e temos:

$$f_a(x_a) = x_a\,,\ f_a(f_a(x_a)) = x_a\,,\ f_a(f_a(f_a(x_a))) = x_a \text{ etc.}$$

Note que $f_a(x) = x$ equivale a $ax(1-x) = x$, isto é, $x(a(1-x)-1) = 0$. Logo, $x = 0$ ou $a(1-x) - 1 = 0$. Daí, $x = 0$ ou $x = x_a = 1 - \dfrac{1}{a}$. Além disso, para garantir que $x_a \in (0,1)$, devemos exigir que a verifique a desigualdade $0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$. Assim, concluímos que $a > 1$.

Portanto, se $1 < a \leq 4$, a função f_a possui dois pontos fixos $x = 0$ e $x = x_a = 1 - \frac{1}{a}$ no intervalo $[0,1]$. Se $0 < a \leq 1$, o único ponto fixo de f_a no intervalo $[0,1]$ é $x = 0$.

Com os nossos conhecimentos sobre o processo de iteração gráfica, vamos desenhar o diagrama de iteração de f_a para diferentes valores de a, tomando, em cada um dos casos, dois valores iniciais c para a população.

Na margem, mostramos como se comportam os iterados de c por f_a perto do valor de equilíbrio do sistema.

Caso $0 < a \leq 1$.

Nesse caso, observamos que a quantidade de indivíduos da população vai diminuindo rapidamente, de geração em geração, qualquer que seja a quantidade de indivíduos na população inicial.

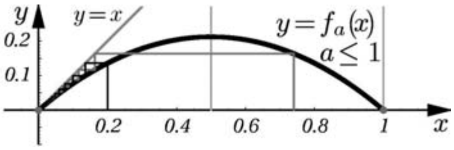


Figura 32.10: Caso $0 < a \leq 1$.

Portanto, se $0 < a \leq 1$, a população tende à extinção a longo prazo.

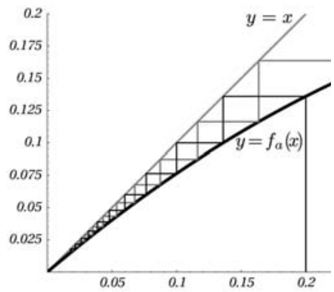


Figura 32.8: Detalhe da **Figura 32.10**.

Caso $1 < a \leq 2$.

A quantidade de indivíduos da população aproxima-se, rapidamente, de um valor de equilíbrio positivo, sem importar qual foi a quantidade inicial de indivíduos, onde $c \neq 0$ e $c \neq 1$. Isto é, os iterados de c por f_a: $f_a(c)$, $f_a(f_a(c))$, $f_a(f_a(f_a(c))), \ldots$, aproximam-se do valor $1 - \frac{1}{a}$ conforme o tempo passa. Se $c > 1 - \frac{1}{a}$ a quantidade de indivíduos diminui, e aumenta, se $c < 1 - \frac{1}{a}$.

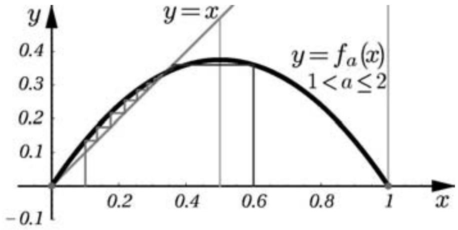


Figura 32.11: Caso $1 < a \leq 2$.

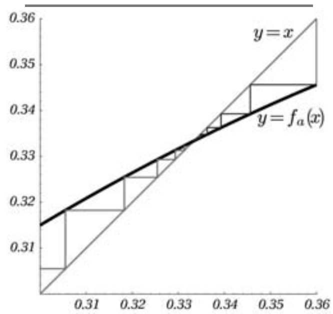


Figura 32.9: Detalhe da **Figura 32.11**.

Caso $2 < a \leq 3$.

Nessa situação, conforme o tempo passa, a quantidade de indivíduos da população se aproxima, também, do valor de equilíbrio $1 - \frac{1}{a}$, qualquer que seja o valor da quantidade inicial $c \in (0,1)$. No entanto, quando os iterados de c já estão próximos do valor de equilíbrio, acontece um fenômeno de oscilação, isto é, ora a população é maior, ora é menor em gerações contíguas. Nesse caso, dizemos que o valor de equilíbrio $1 - \frac{1}{a}$ é estável e indica, do ponto de vista biológico, que a natureza e a espécie da população estão em harmonia.

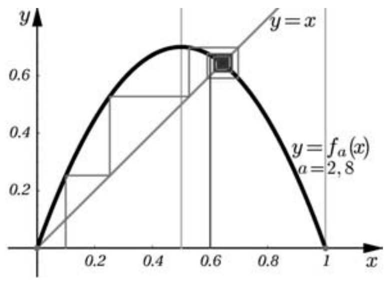


Figura 32.12: Caso $2 < a \leq 3$.

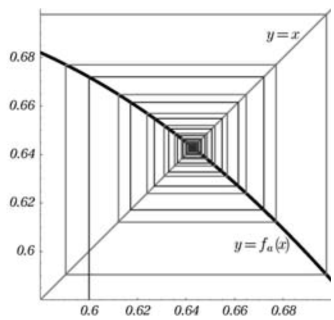


Figura 32.13: Detalhe da **Figura 32.12**.

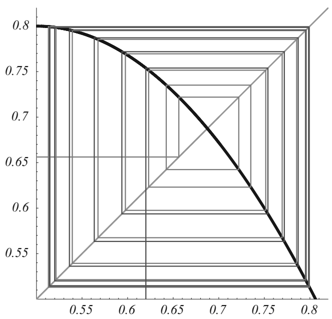


Figura 32.15: Detalhe da **Figura 32.14**.

Caso $3 < a < 4$.

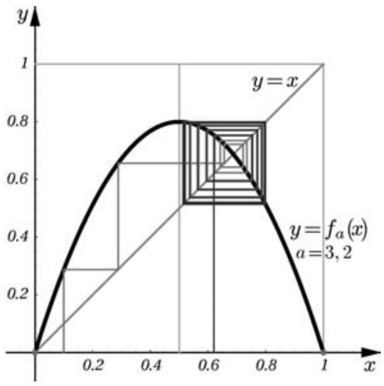


Figura 32.14: Caso $3 < a < 4$.

Na **Figura 32.14** vemos o diagrama de iteração de f_a para $a = 3{,}2$. Observamos que os valores dos iterados de c têm um comportamento bem diferente daquele do caso anterior. Não importando o valor de c desde que diferente de 0, de 1 e do valor de equilíbrio $1 - \frac{1}{a} \approx 0,6875$, os iterados se aproximam de dois valores α e β, tais que $f_a(\alpha) = \beta$ e $f_a(\beta) = \alpha$, que podem ser determinados resolvendo a equação $f_a(f_a(x)) = x$. Isto é, ambos são pontos fixos de $f_a \circ f_a$. Na **Figura 32.14** escolhemos um valor c longe do valor de equilíbrio e um valor c próximo dele. Dizemos então que o valor de equilíbrio $1 - \frac{1}{a}$ é *instável*, pois é sensível a pequenos distúrbios no valor inicial c.

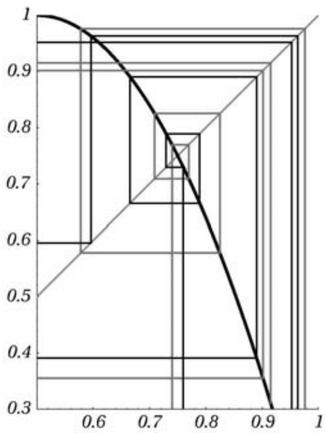


Figura 32.16: Detalhe da **Figura 32.17**.

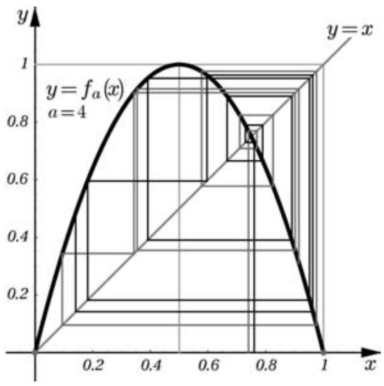


Figura 32.17: Caso $a = 4$.

Conforme a vai aumentando, a dinâmica da população torna-se cada vez mais complexa, até chegar a uma situação caótica quando $a = 4$. Nesse caso, para a maioria dos valores $c \in (0,1)$ diferentes de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, se observa que a população poderá ter praticamente qualquer quantidade de indivíduos nas próximas gerações. Mais ainda, considerando valores de c muito próximos, observamos que (veja a **Figura 32.17**) ao cabo de um tempo, as gerações seguintes correspondentes terão quantidades de indivíduos completamente diferentes. Isto é, o sistema é sensível a pequenas mudanças na condição inicial.

Resumo

Você viu como a teoria aprendida no Pré-Cálculo é aplicada para resolver problemas do nosso cotidiano.

Exercícios

Para resolver o exercício 1 e os itens b e c do exercício 3, você irá precisar do auxílio de uma calculadora. Se você não tem uma, use a dos computadores do pólo.

1. Uma curva de uma estrada é um arco de um círculo de 250 metros de diâmetro. Sabendo que a curva tem 50 metros de comprimento, determine em quantos graus a estrada muda sua direção.

2. Determine o ponto P do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ situado a uma distância de $3\sqrt{5}$ do ponto A do eixo x de abscissa 3. Esboce o gráfico de f e marque os pontos A e P, para visualizar geometricamente a sua solução.

3. Uma estátua de 140 centímetros está sobre um pedestal de $3,8$ metros.
a. Determine o ângulo de visão (veja a **Figura 32.18**) de uma pessoa com os olhos situados a $1,6$ metros do chão, em função da sua distância ao pedestal.

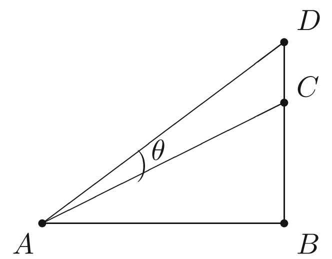


Figura 32.18: Ângulo de visão θ.

Na **Figura 32.18**, o ponto A representa a posição dos olhos da pessoa, o segmento CD é a estátua, o segmento BC é parte do pedestal e θ é o ângulo de visão.

b. A que distância do pedestal a pessoa deve ficar para que o seu ângulo de visão seja de 15 graus?

c. Qual o ângulo de visão, se a pessoa está a 4 metros do pedestal?

4. Uma antena parabólica de televisão foi construída girando a parábola de equação $y = \dfrac{1}{15}x^2, \quad -5 \leq x \leq 5$, em torno do seu eixo de simetria. Onde deve ser colocado o receptor? Qual a sua distância do bordo superior da antena, sabendo que a unidade de medida é em metros?

5. O denominador de uma certa fração é 1 unidade a mais do que o valor do numerador. Se o numerador aumenta de $\frac{5}{2}$, o valor da nova fração é igual ao inverso da fração inicial. Qual a fração inicial?

6. Na **Figura 32.19**, a reta passando por A e C é a margem de um rio, a distância entre A e C é de $18\,km$ e o ponto B é um ponto da margem. O ponto P representa o local de partida no rio de um nadador, que nada à velocidade de $4,5\,km/h$ ao longo da hipotenusa PB, e está situado a $7,5\,km$ do ponto A da margem. Do ponto B ao ponto C, na margem do rio, ele caminha a uma velocidade de $9\,km/h$.

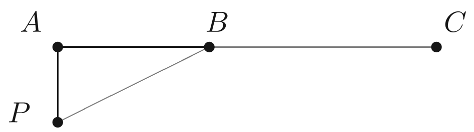


Figura 32.19: Percurso de um atleta.

a. Determine o tempo total t de percurso como uma função da distância entre os pontos A e B.

b. Calcule o tempo de percurso quando a distância entre A e B é $6\,km$, com uma aproximação de uma casa decimal.

7. Um triângulo retângulo isósceles é construído perpendicularmente ao plano do círculo de equação $x^2+y^2=16$, com um dos seus lados iguais coincidindo com a corda perpendicular ao eixo x (adapte a figura do Exemplo 7). Determine a sua área como uma função de x e dê o seu domínio.

8. Um galpão será construído num terreno retangular e tem a forma de um setor circular de raio igual a 50 metros inscrito no retângulo (veja a **Figura 32.20**). Determine:
a. A área do galpão, em função do ângulo do setor circular.
b. A área do galpão, em função da largura do terreno.
c. A área não construída do terreno, em função do ângulo do setor circular.
d. A área não construída do terreno, em função da largura do terreno.
e. A área do galpão, quando a área do terreno for de 2500 metros quadrados.

Atenção no item e!
O ângulo do setor circular é 2θ e um lado do terreno retangular está fixado.

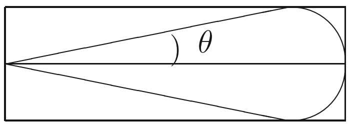


Figura 32.20: Galpão.

9. Um pasto tem a forma da **Figura 32.21**. Uma cerca de 28 quilômetros será construída, ligando os pontos P, Q, R, S e T. Qual deve ser a distância entre P e Q para que a área do retângulo $PQRS$ seja a maior possível, sabendo que a distância entre S e T é de 4 quilômetros?

10. Determine:

a. $\cos\theta$, sabendo que $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ e $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{3}$.

b. $\operatorname{tg}\theta$, sabendo que $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ e $\sec\theta=\dfrac{5}{3}$.

11. Determine, caso existam, os pontos de interseção dos gráficos de f e g:
a. $f(x)=\sqrt{x^2-5}$, $\;g(x)=2$.

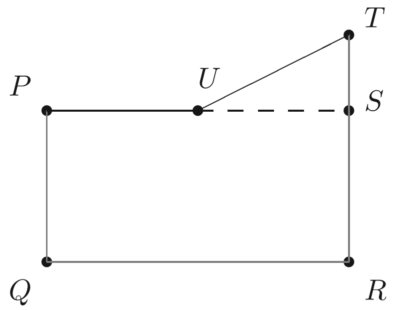


Figura 32.21: Pasto.

b. $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = 5 - \sqrt{x}$.
c. $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = 4 + x$.
d. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \sqrt{1-2x}$.

12. Esboce os gráficos das funções f e g do exercício anterior, no mesmo sistema de coordenadas e visualize a solução de cada item do exercício anterior.

13. Determine o domínio de f, os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos x e y, caso existam, e estude o sinal de f:

a. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$. **b.** $f(x) = (x+4)\sqrt[3]{x-2}$.

c. $f(x) = \dfrac{4-x}{4\sqrt{x^3}}$. **d.** $f(x) = \dfrac{5(x+10)^2 - 10x(x+10)}{(x+10)^4}$.

e. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{x-1}}$.

14. Discuta como o gráfico de $f(x) = \sqrt{2-x}$ pode ser obtido a partir do gráfico de $g(x) = \sqrt{x-2}$.

15. Determine $\text{Dom}(f)$ e os pontos $x \in \text{Dom}(f)$ cuja imagem é y_0:

a. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{5x+4}{2}}$, $y_0 = 3$. **b.** $f(x) = \sqrt[4]{1-3x}$, $y_0 = \dfrac{1}{2}$.

c. $f(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{x}$, $y_0 = 7$.

16. A chamada *regra da mecânica* para determinar a raiz quadrada de um número a é um procedimento conhecido há 4000 anos pelos matemáticos sumérios, sendo talvez o modelo recursivo mais antigo de que se tem conhecimento. Veja como funciona.

Suponha que se deseja determinar a raiz quadrada de um número não-negativo a. Comece com um palpite $x_0 > 0$ e calcule x_1 como sendo a média aritmética entre x_0 e $\dfrac{a}{x_0}$. Substitua x_0 por x_1, calcule x_2 como sendo a média aritmética entre x_1 e $\dfrac{a}{x_1}$. Substitua x_1 por x_2, repita o procedimento para determinar x_3 e assim por diante. Isto é, os valores x_n são determinados a partir da escolha do valor x_0 e da relação recursiva:

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 0 \end{cases}$$

a. Faça uma análise da função $f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, cuja iteração produz a relação recursiva da regra da mecânica. Verifique, gráfica e analiticamente, que $x = \sqrt{a}$ é um ponto fixo de f_a, com $a > 0$.

b. Use a regra da mecânica para determinar aproximações de $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ (calcule apenas 5 iterações escolhendo $x_0 = 1$).

c. Mostre que $f_a(x)$ está mais próximo de $\sqrt{a}$ do que x. Isto é, mostre que $|f_a(x) - \sqrt{a}| < |f_a(x) - x|$.

Auto-avaliação

Você entendeu bem as curvas planas, os polinômios com coeficientes reais e o conceito de função? Sabe quais são os elementos necessários para a construção de uma função? Fez sem dificuldade todos os exercícios da aula? Compreendeu bem o que é uma função real de variável real, sua representação gráfica, suas operações de adição, multiplicação e composição? Sabe determinar (quando ela existir) a inversa de uma função?

Estude as funções trigonométricas e suas inversas e as funções exponencial e logaritmo. Reflita sobre todos os conceitos apresentados e não deixe suas dúvidas para depois. É hora de se preparar para a segunda avaliação presencial.

ISBN 85-7648-359-9
9788576483595

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL