Lista 2: Derivadas Direcionais e Diferenciabilidade

Derivadas Parciais e Direcionais

Nos exercícios 1-5 abaixo, calcule as derivadas direcionais (caso existam), e verifique se $D_{(v_1,\ldots,v_m)}f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_m)$. Caso a igualdade não se verifique em $\mathbf{x}$, verifique se f é contínua em $\mathbf{x}$.

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x^2 - 3xy + xe^y$

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

3) $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \sum_{k=1}^n \exp\left[\frac{k}{1-t}\right] \mathbf{e_k}$$

4) [Bartle, Cap. V, Ex. 20D]

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3-y^2} & \text{se } x^3 - y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

5)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

6) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 2 & \text{se } -2x^2 < y < -x^2 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Prove que, para todo $\mathbf{w} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{0}) = 0$.

b) Prove que **0** **não** é um ponto de máximo ou mínimo local de f, i.e.: em qualquer vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{0}$, existem $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ tais que $f(\mathbf{p}) = 2$ e $f(\mathbf{q}) = 0$.

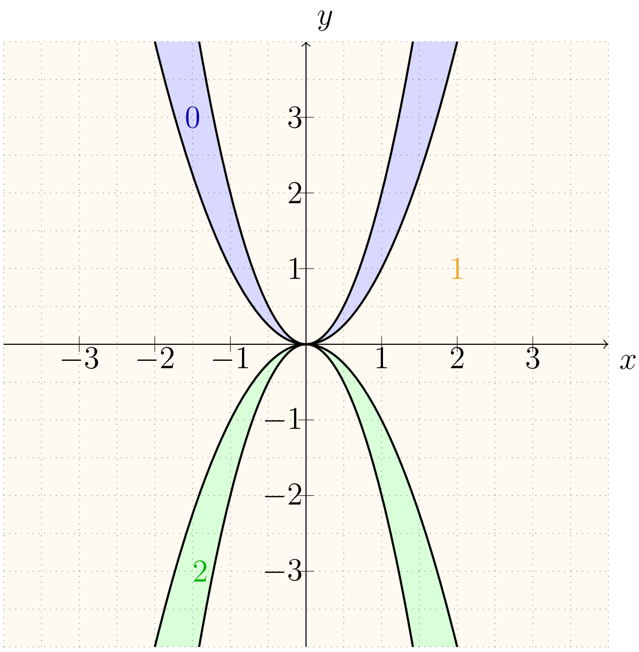

Figura 1

7) Considere o *problema da ciclóide*: uma roda circular de espessura desprezível e raio 1 rola sem deslizar sobre a reta $y = 0$ no plano xy. Suponha que, no instante $t = 0$, o centro da roda se encontre na posição $(0, 1)$ e o ponto mais afastado do chão (inicialmente na posição $(0, 2)$) seja pintado de vermelho. Prove que a velocidade da curva traçada pelo ponto vermelho se anula em um conjunto discreto de tempos. Esboce um pequeno trecho da curva perto de um instante em que sua velocidade se anula.

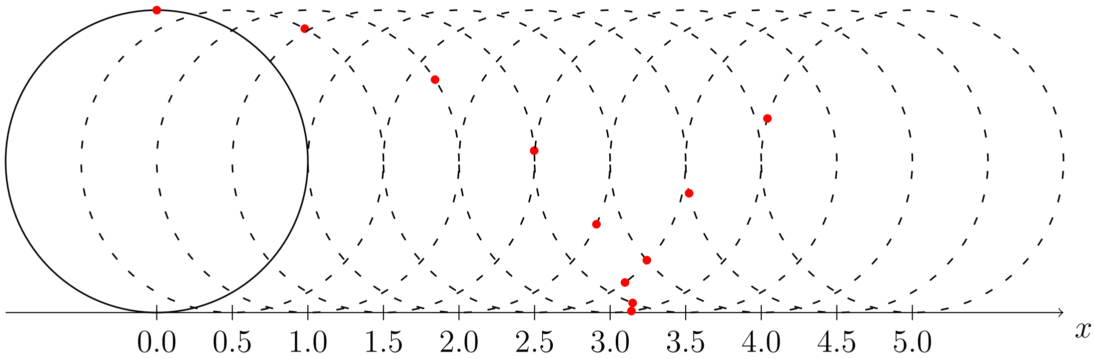

Figura 2

Diferenciabilidade

8) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Prove que f é contínua somente em $\mathbf{0}$.

b) Prove que f é diferenciável em $\mathbf{0}$.

9) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x - y, y^2 + 3x^2)$. Para cada matriz 2×2 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, verifique se existe o limite

$$g(A) := \lim_{(x,y)\to\mathbf{0}} \frac{||f(x,y) - f(\mathbf{0}) - A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)||}{||(x,y)||}$$

Existem matrizes A para as quais $g(A) = 0$? Existe mais de uma? Interprete.

10) [*Vetor Gradiente*] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $\mathbf{p} \in \Omega$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{p}$. Prove que existe um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Mostre que essa propriedade define $\mathbf{u}$ unicamente: $\mathbf{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{p})\right)$. Chamamos $\mathbf{u}$ de *vetor gradiente de f no ponto* $\mathbf{p}$, e o denotamos por $\nabla f(\mathbf{p})$.

11) Sejam $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ qualquer. Prove que T é diferenciável em $\mathbf{p}$ e que $DT(\mathbf{p}) = T$.

12) Suponha que $B\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ é bilinear: i.e., para quaisquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, as funções $\begin{aligned} B_{\mathbf{x}}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^q \\ \mathbf{w} &\mapsto B(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{aligned}$ e $\begin{aligned} B^{\mathbf{y}}\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^q \\ \mathbf{z} &\mapsto B(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$ são lineares.

Considerando B uma aplicação de $\mathbb{R}^{m+n}$ em $\mathbb{R}^q$:

a) Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||B(\mathbf{x}, \mathbf{y})|| \leq C||\mathbf{x}||\;||\mathbf{y}||$$

Use as normas que quiser em $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q$. Conclua que B é contínua. *Dica*: considere $C_0 = \max\left\{||B(\mathbf{e_i^{(m)}}, \mathbf{e_j^{(n)}})|| \mid i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$.

b) Prove que B é diferenciável em todo ponto e calcule sua diferencial.

Desafios

13) Estude a continuidade e a diferenciabilidade de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^k y^s}{x^m + y^n} & \text{se } (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

onde k, s, m, n são números naturais (≥ 1). Em particular, prove que a função do ex. **5** não é diferenciável em $\mathbf{0}$, apesar de ser contínua e $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$ depender linearmente de $\mathbf{v}$. *Dica*: use a norma $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ para calcular os limites. Use ferramentas gráficas para intuir se a função é ou não contínua, diferenciável, etc. Para provar diferenciabilidade, tente minorar o denominador $||(x,y)||_1 \; |x^m + y^n|$ pela potência de menor expoente; para provar não-diferenciabilidade, encontre uma curva do tipo (t^r, t^p) que transforme o denominador em um múltiplo da potência de expoente $=$ mmc(m,n).

14) Uma aplicação p-*multilinear* é uma função $L\colon \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_p} \to \mathbb{R}^n$ tal que, se $\mathbf{x_1} \in \mathbb{R}^{m_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^{m_2}, \ldots, \mathbf{x_{i-1}} \in \mathbb{R}^{m_{i-1}}, \mathbf{x_{i+1}} \in \mathbb{R}^{m_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x_p} \in \mathbb{R}^{m_p}$ estão fixados, a função

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{i-1}}, \cdot, \mathbf{x_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x_p})\colon \mathbb{R}^{m_i} &\to \mathbb{R}^q \\ \mathbf{z} &\mapsto L(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{z}, \mathbf{x_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x_p}) \end{aligned}$$

é linear (dizemos que L é linear em cada entrada).

Generalize o exercício **12** para o caso p-multilinear. *Dica*: considere um análogo de C_0 do ex. **12**.

15) Considere o espaço vetorial $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ como equivalente a $\mathbb{R}^{n^2}$. Sob essa identificação:

a) Prove que a função $||A||_{op} := \sup\{||A(\mathbf{x})|| \mid ||\mathbf{x}|| = 1\}$ define uma norma em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, chamada *norma de operador*;

b) Prove que $||A(\mathbf{x})|| \leq ||A||_{op}\, ||\mathbf{x}||$;

c) Prove que, se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\quad ||BA||_{op} \leq ||B||_{op}\, ||A||_{op}$;

d) Prove que $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ é invertível}\}$ é aberto;

e) Prove que a aplicação *inversão de matrizes*

$$\begin{aligned} \textbf{Inv}\colon GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto X^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável em X, e que $D\textbf{Inv}(X)(H) = -X^{-1}HX^{-1}$. *Dica*: prove que **Inv** é contínua usando sua expressão

$$\textbf{Inv}(X) = \frac{1}{\det X}(cofX)^T$$

em função da matriz de cofatores de X. Faça o teste de diferenciabilidade com a candidata acima, usando a norma de operador, e multiplicando e "dividindo"por $X + H$. Use a parte **c** do exercício e a continuidade de **Inv** em X para mostrar que $\frac{||r(H)||_{op}}{||H||_{op}} \longrightarrow 0$ quando $H \to$ *0*.

16) [Bartle, Cap. V, Ex. 20.Q] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em todo ponto de Ω. Suponha que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$, que o segmento de reta L unindo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ está contido em Ω e que existe uma constante $M > 0$ tal que $||Df(\mathbf{c})(\mathbf{u})|| \leq M||\mathbf{u}||$ para todo $\mathbf{c} \in L$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Então:

$$||f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})|| \leq M||\mathbf{b} - \mathbf{a}||$$

Essa é a chamada *Desigualdade do Valor Médio*, um resultado muito útil em Análise Multivariada. *Dica*: Use a norma $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{p}|x_i|$ em $\mathbb{R}^p$ $(p = m, n)$ e o Teorema do Valor Médio para funções $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Depois, prove que o resultado não muda se mudamos as normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

17) Use o exercício anterior para provar o seguinte. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto conexo não-vazio e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em todo ponto de Ω com $Df(\mathbf{p}) = \mathit{0}$ (i.e., a transformação linear nula) $\forall\ \mathbf{p} \in \Omega$. Então f é constante. *Dica*: se $f(\mathbf{p_0}) = \mathbf{c}$, o conjunto $\mathcal{N}_{\mathbf{c}}(f) := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}$ é fechado em Ω, por continuidade. Por que $\mathcal{N}_{\mathbf{c}}(f)$ é também aberto?