PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 6 e 9 - 2021

PTC-EPUSP

Valor Esperado e Variância

O valor esperado $E(X)$ de uma variável aleatória X é definido como sendo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ (caso contínuo)}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \text{ (caso discreto).}$$

R_1	Prob
10%	0,5
15%	0,3
25%	0,2

R_1 uniforme entre 10% e 25%

$$f_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{0,15}, & 10\% \leq r \leq 25\% \\ 0, & \end{cases}$$

caso contínuo

Valor Esperado e Variância

Para o caso discreto do exemplo anterior, o valor esperado de R_1 é:

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0,1 \times 0,5 + 0,15 \times 0,3 + 0,25 \times 0,2 \\ &= 14,5\%. \end{aligned}$$

Para o caso contínuo do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \frac{1}{0,15} \int_{0,1}^{0,25} r dr \\ &= \frac{r^2}{0,3} \Big]_{0,1}^{0,25} = 17,5\%. \end{aligned}$$

Exemplos

Uma seguradora paga *R*\$ 30.000,00 em caso de acidente e cobra taxa de *R*\$ 1.000,00. A probabilidade de um acidente é 3%. Qual é o lucro esperado da seguradora?

$$E(L) = 1000 \times 0,97 - 29000 \times 0,03 = 100,00$$

L	Prob
1000	97%
-29000	3%

Exemplos

Considere um jogo em que se paga $R\$ $ 20,00 para entrar, e se joga 3 dados. Se apenas uma das faces der 1 ganha-se $R\$ $ 20,00, se exatamente 2 faces derem 1 ganha-se $R\$ $ 50,00, e se as 3 faces derem 1 ganha-se $R\$ $ 80,00. Qualquer outro resultado não se ganha nada. Qual é o lucro esperado do jogador?

$$\boxed{E(X) = 0 \times \frac{25}{72} + 30 \times \frac{5}{72} + 60 \times \frac{1}{216} - 20 \times \frac{125}{216} = -9,21}$$

3 Dados (nº de 1's)	X	Prob
1	0	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 25/72$
2	30	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = 5/72$
3	60	$(1/6)^3 = 1/216$
0	-20	$(5/6)^3 = 125/216$

"sucesso" em dado dar 1

$n = 3, \; p = \frac{1}{6}$

Exemplos

Para defender um cliente em um processo por danos resultante de um acidente de carro, um advogado deve decidir se cobra honorários fixos de R\$ $7.500,00$ ou de contingência que receberá somente se ganhar o caso. Como o advogado deve estimar as chances de seu cliente se:

A) ele prefere honorários fixos de R\$ $7.500,00$ a uma contingência de R\$ $25.000,00$?

B) ele prefere honorários de contingência de R\$ $60.000,00$ aos honorários fixos de R\$ $7.500,00$?

A) $E(X) = 25000 \times p + 0 \times (1-p) = 25000p < 7500 \Rightarrow p < 0,3,$

B) $E(X) = 60000p > 7500 \Rightarrow p > 75/600 = 0,125.$

Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ binomial com parâmetros n e p

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-\cancel{1}\,i} = np.$$

Exercício!

$X \rightarrow$ geométrica com parâmetro p

$$E(X) = p \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

Exercício!

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x\,dx = \frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)}\left.\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}{2\cancel{(\beta-\alpha)}} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

Valor Esperado e Variância

$X \rightarrow$ distribuição uniforme (α, β)

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{\beta+\alpha}{2}.$$

$X \rightarrow$ exponencial com parâmetro λ

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exercício 7

$X \rightarrow$ distribuição normal com parâmetros μ e σ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\}dx = \mu.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx + \mu$$

$y = x-\mu$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y^2/2\sigma^2} dy} + \mu$$

função ímpar 0

$$= \mu$$