PME 3222

Estática de fluidos

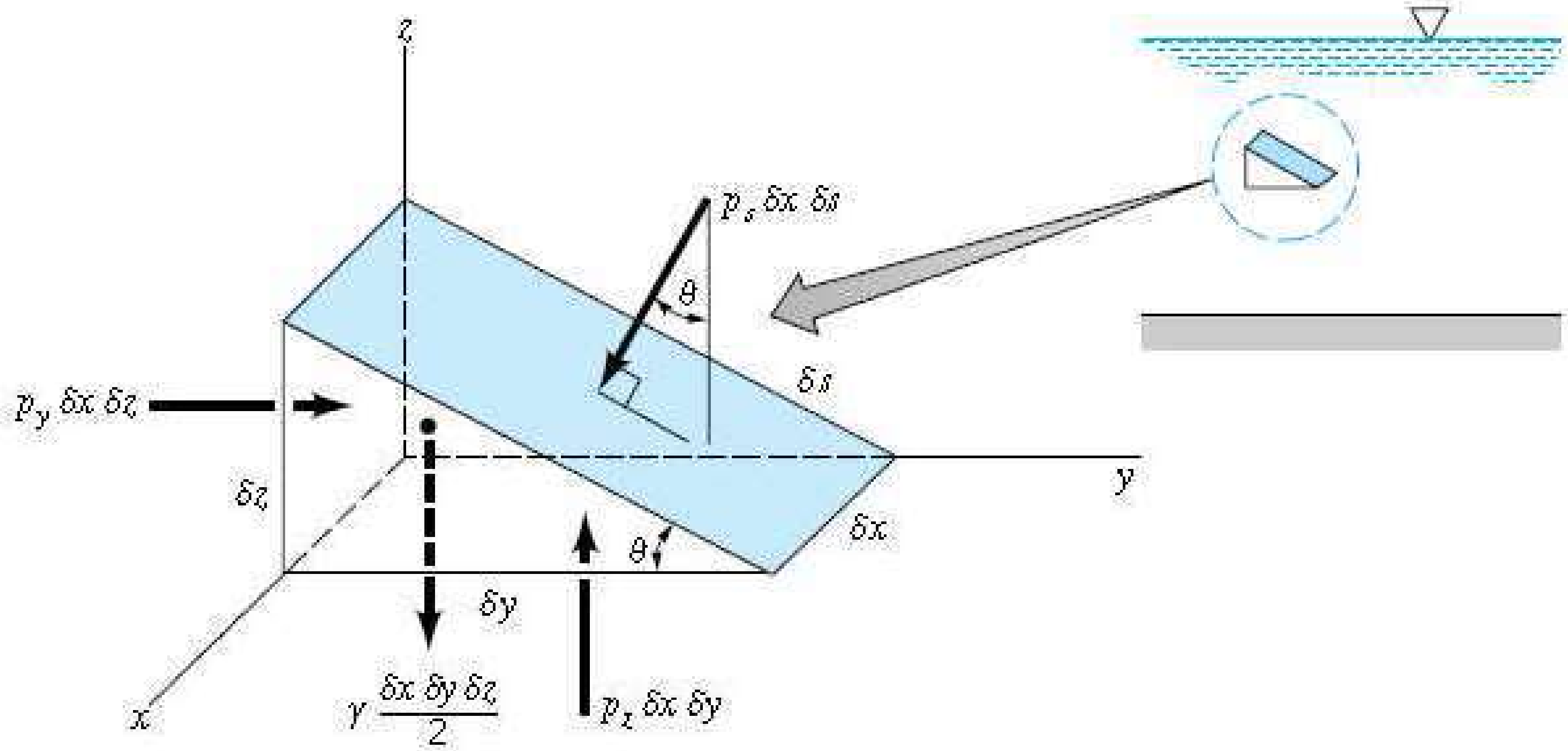
Alberto Hernandez Neto

Pressão num ponto

- Pressão: força normal por unidade de área que atua sobre um ponto fluido em um dado plano
- Processos com fluido estático:
  - Tensões de cisalhamento são nulas
  - Forças de superfície: apenas forças de pressão
- Estudo da pressão: sua variação no meio fluido e seu efeito sobre superfícies imersas

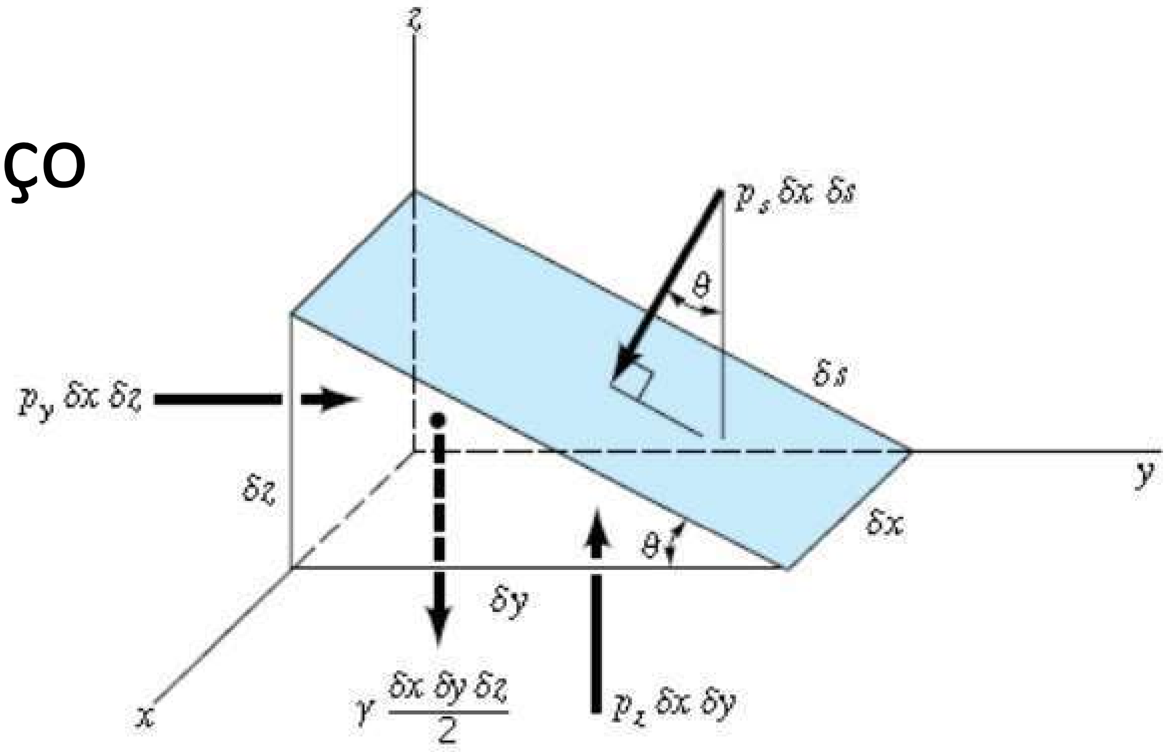
Pressão num ponto

- Considerando um elemento fluido na forma de cunha, com dimensões δx, δy, δz e peso específico ϒ:



Pressão num ponto

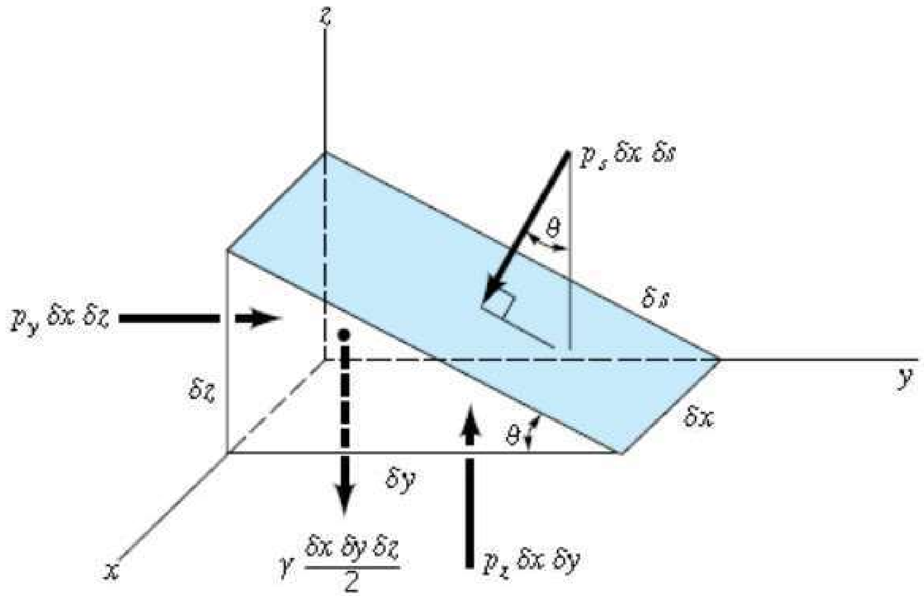
- Realizando o balanço de forças na direção y e z tem-se:



$$\sum F_y = p_y \delta x \delta z - p_s \delta x \delta s sen\theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y$$

$$\sum F_z = p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z$$

Pressão num ponto



Sendo: $\delta_y = \delta s \cos\theta$

$\delta_z = \delta s \,\mathrm{sen}\,\theta$

Tem-se que: $p_y - p_s = \rho \dfrac{\delta y}{2} a_y$

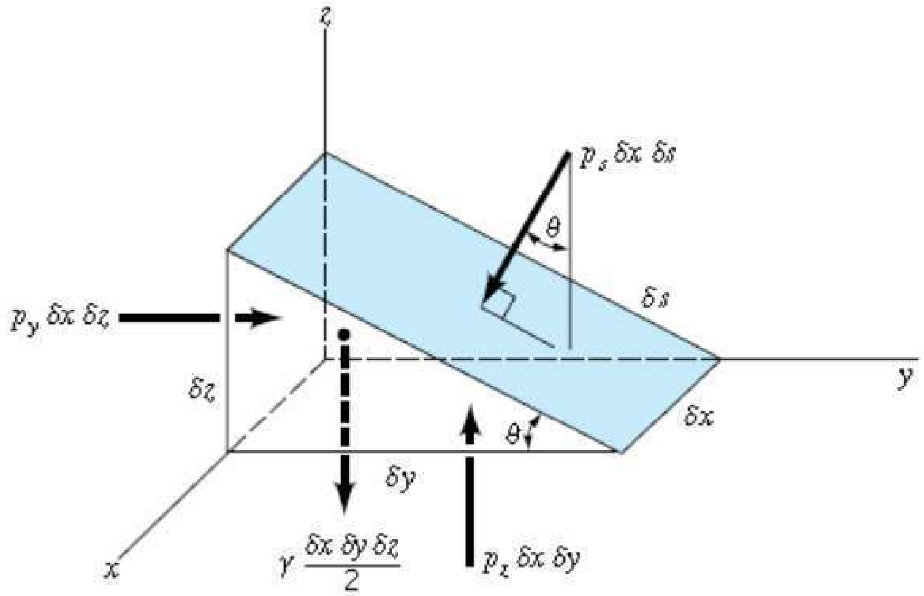
$$p_z - p_s = (\gamma + \rho a_z)\frac{\delta z}{2}$$

Para um ponto: $\delta x \to 0,\ \delta y \to 0,\ \delta z \to 0$

$$\therefore p_y = p_s;\ p_z = p_s$$

Pressão num ponto

- Como θ é arbitrário, tem-se que quando o fluido está em repouso ou quando τ = 0 (sem tensão de cisalhamento):

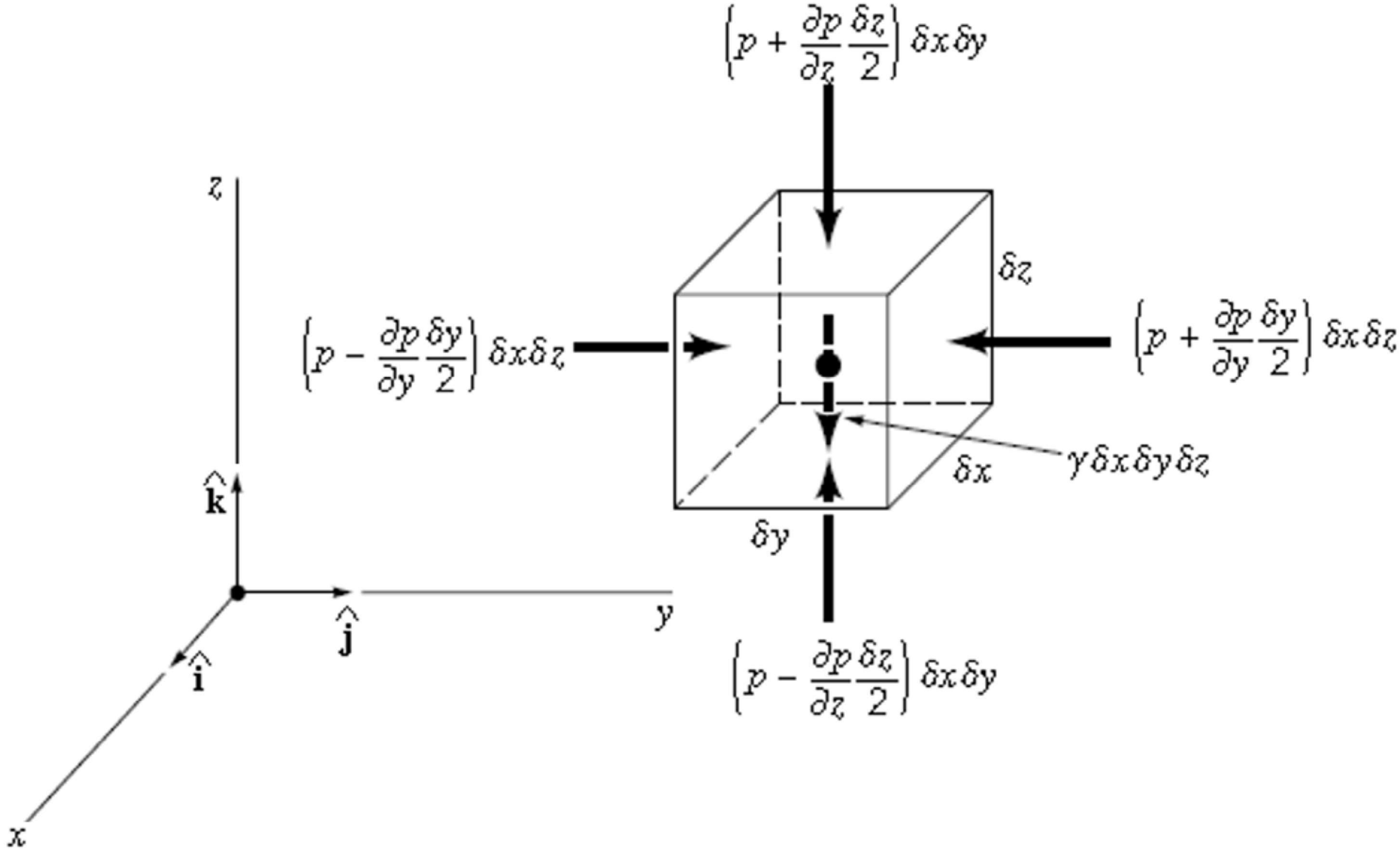


O valor da pressão em um ponto do fluido independe da direção

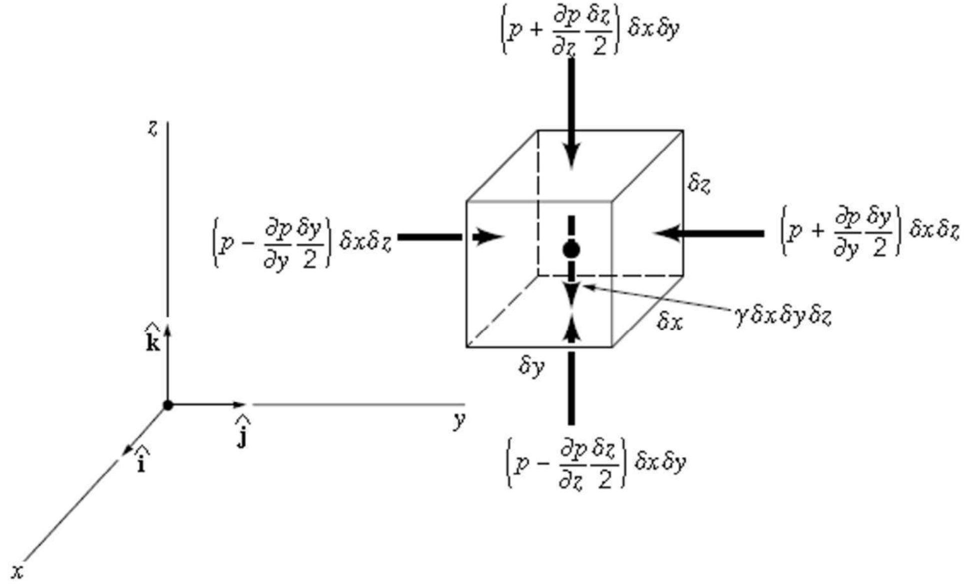
Equação básica do campo de pressão

- Definindo-se um pequeno elemento em um fluido qualquer com:
  - Dimensões elementares δx, δy e δz
  - Pressão no seu centro geométrico igual a p
  - Propriedades fixas e iguais a
    - ρ = massa específica
    - Υ = ρg = peso específico
    - variações da pressão no elemento aproximada por séries de Taylor de ordem 1

Equação básica do campo de pressão



Equação básica do campo de pressão



- Balanço de forças

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x \delta y \delta z \qquad (1)$$

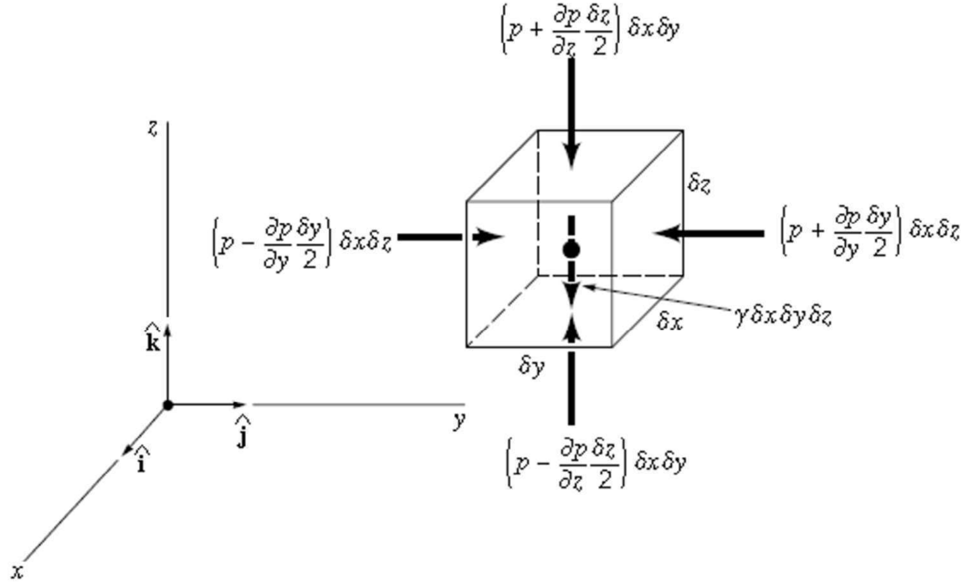
$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z \qquad (2)$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x \delta y \delta z \qquad (3)$$

Equação básica do campo de pressão

- Na forma vetorial

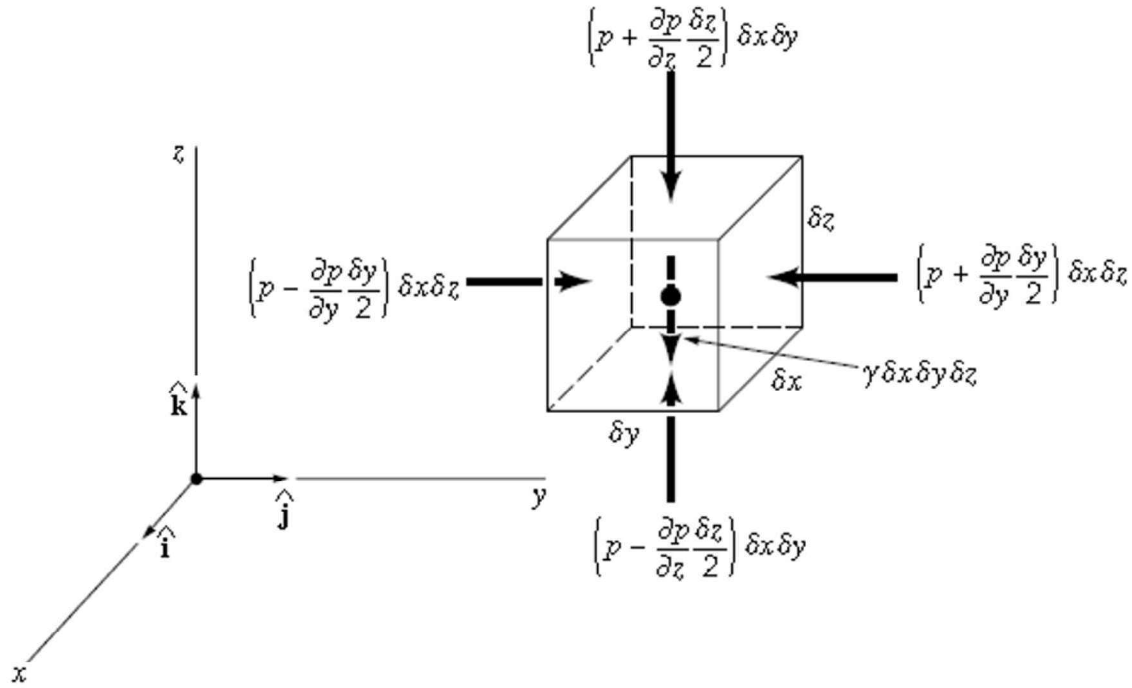
$$\delta \vec{F}_S = \delta F_x \hat{i} + \delta F_y \hat{j} + \delta F_z \hat{k} \quad (4)$$



- Substituindo as eqs. (1), (2) e (3) na eq (4) tem-se:

$$\delta \vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} \right)\delta x \delta y \delta z$$

Equação básica do campo de pressão



$$\delta \vec{F}_S = \underbrace{-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\nabla p}\delta x \delta y \delta z \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \vec{F}_S}{\delta x \delta y \delta z} = \nabla p$$

Equação básica do campo de pressão

- Pode-se descrever as forças de campos gravitacionais (influência dos demais campos desprezada) como:

$$\delta\vec{F}_B = \rho\delta x\delta y\delta z\vec{g}$$

- Pela segunda lei de Newton tem-se que:

$$\sum\delta\vec{F} = \delta m\vec{a}$$

$$\delta\vec{F}_S + \delta\vec{F}_B = \delta m\vec{a}$$

$$-\nabla p\delta x\delta y\delta z + \rho\delta x\delta y\delta z\vec{g} = \rho\delta x\delta y\delta z\vec{a}$$

Equação básica do campo de pressão

- Dividindo a expressão anterior por $\delta x \delta y \delta z$:

$$\boxed{-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}}$$

- Esta é a equação básica que descreve o campo de pressão em fluido

Equação do campo de pressão

- Adotando as seguintes simplificações:

1. Se a aceleração da gravidade *g* não varia com *z*:

$$\vec{g} = -g\hat{k} \quad \Rightarrow \quad -\nabla p + \gamma\hat{k} = \rho\vec{a}$$

2. Se o fluido está em repouso (estático):

$$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla p + \gamma\hat{k} = 0$$

Equação do campo de pressão

- Adotando as seguintes simplificações:

3. Se:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p}{\partial z}=-\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\quad p=p(z)\rightarrow\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dp}{dz}=-\gamma$$

Equação do campo de pressão

- Adotando as seguintes simplificações:
    4. Se ρ for constante (fluido incompressível)

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \gamma \left(z_2 - z_1 \right)$$

Sendo:

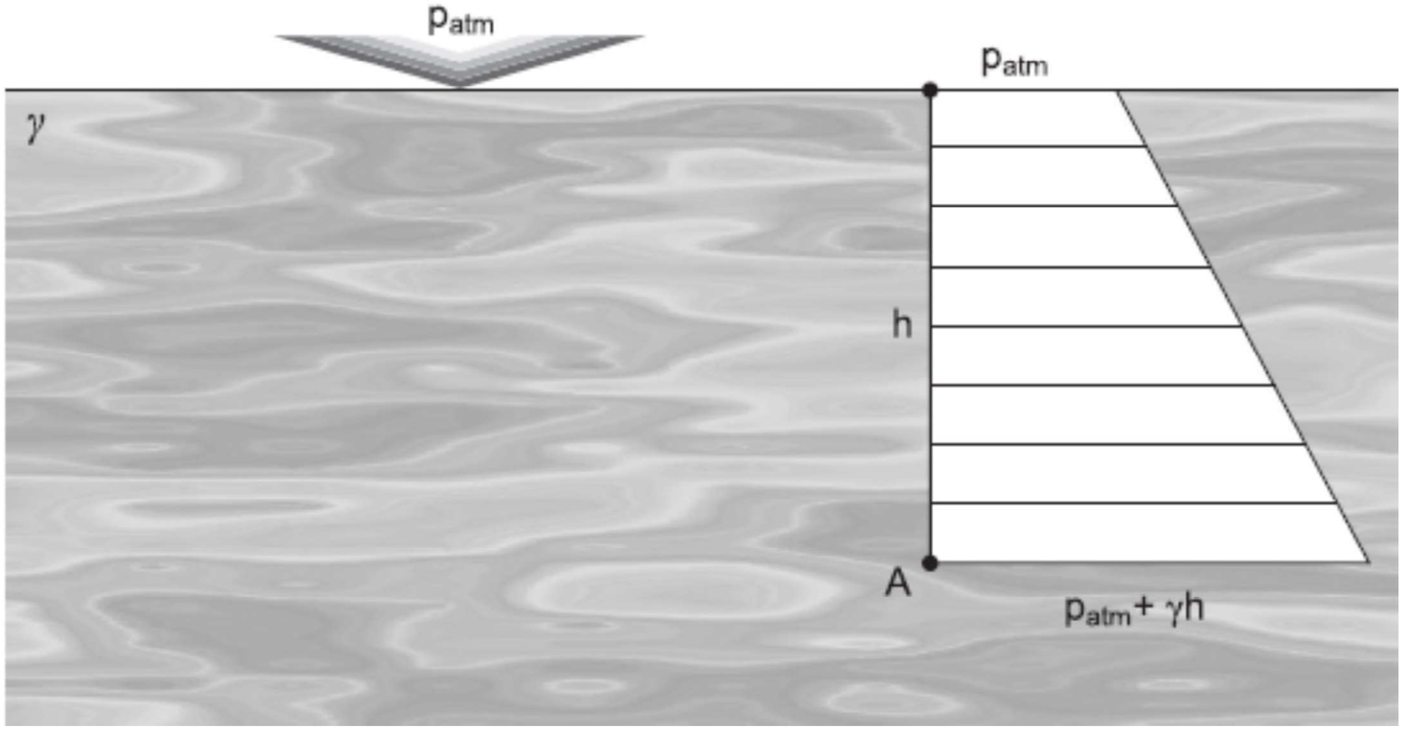
$$h = \left(z_2 - z_1 \right) \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 + \gamma h \quad \Rightarrow$$

Lei de Stevin da Hidrostática

"A diferença entre as pressões de dois pontos de um fluido em equilíbrio (repouso) é igual ao produto entre a densidade do fluido, a aceleração da gravidade e a diferença entre as profundidades dos pontos."

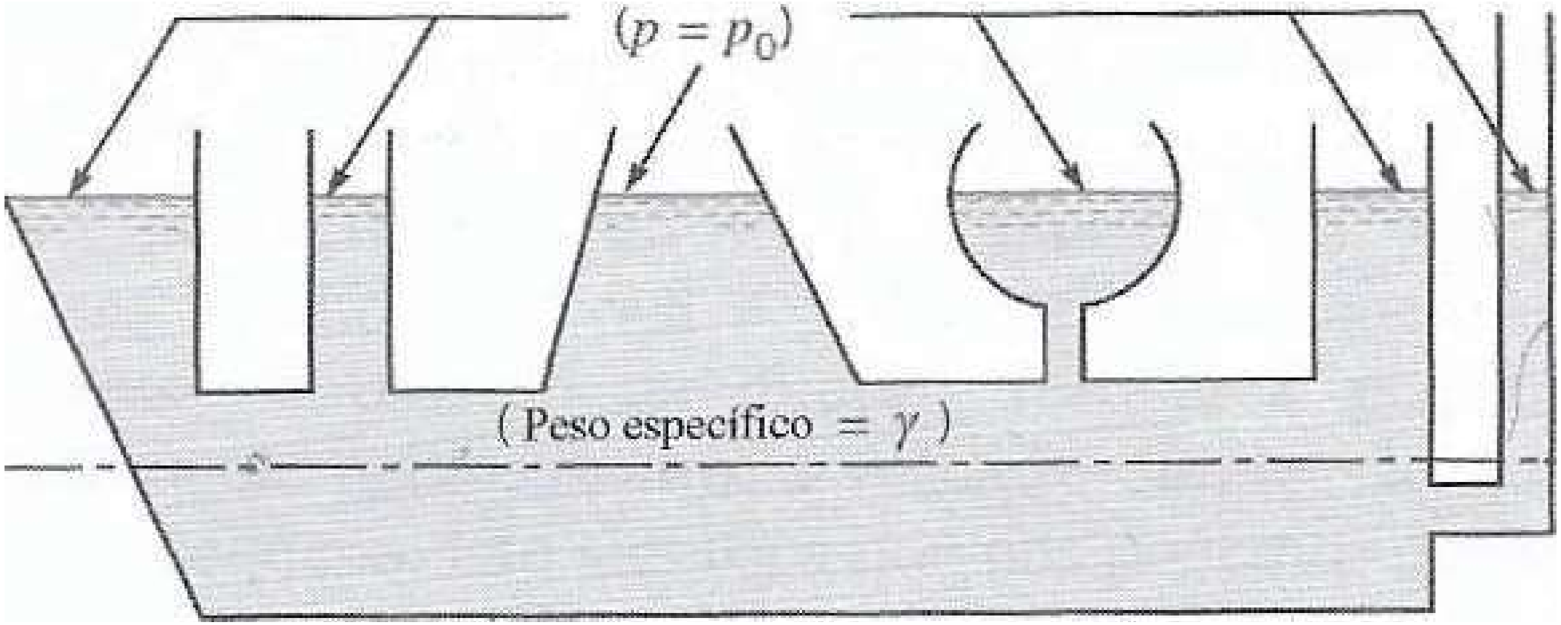
Equação do campo de pressão

$$h = \left(z_2 - z_1\right) = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \text{Carga de Pressão}$$



Pressão em fluido incompressível estático

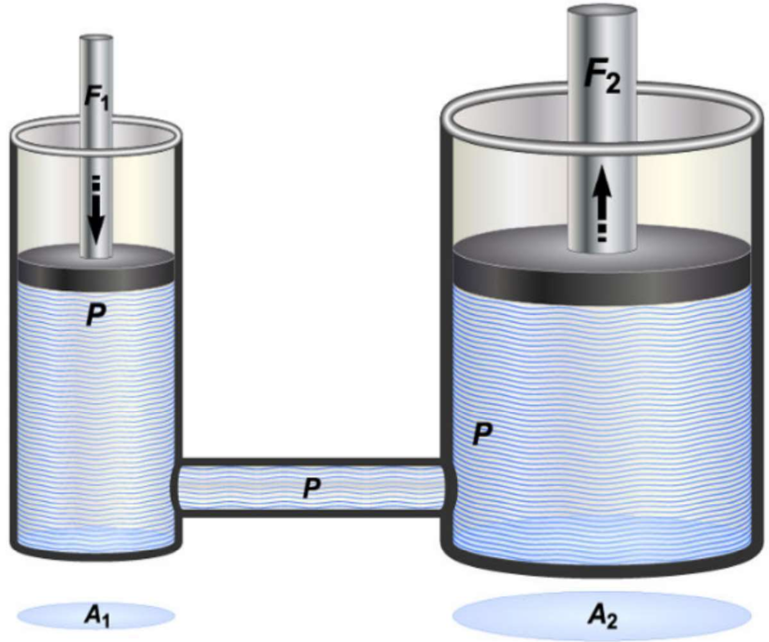
- Consequência da Lei de Stevin
  – Pressão na mesma cota é igual independe do formato do recipiente



Pressão em fluido incompressível estático

- Lei de Pascal

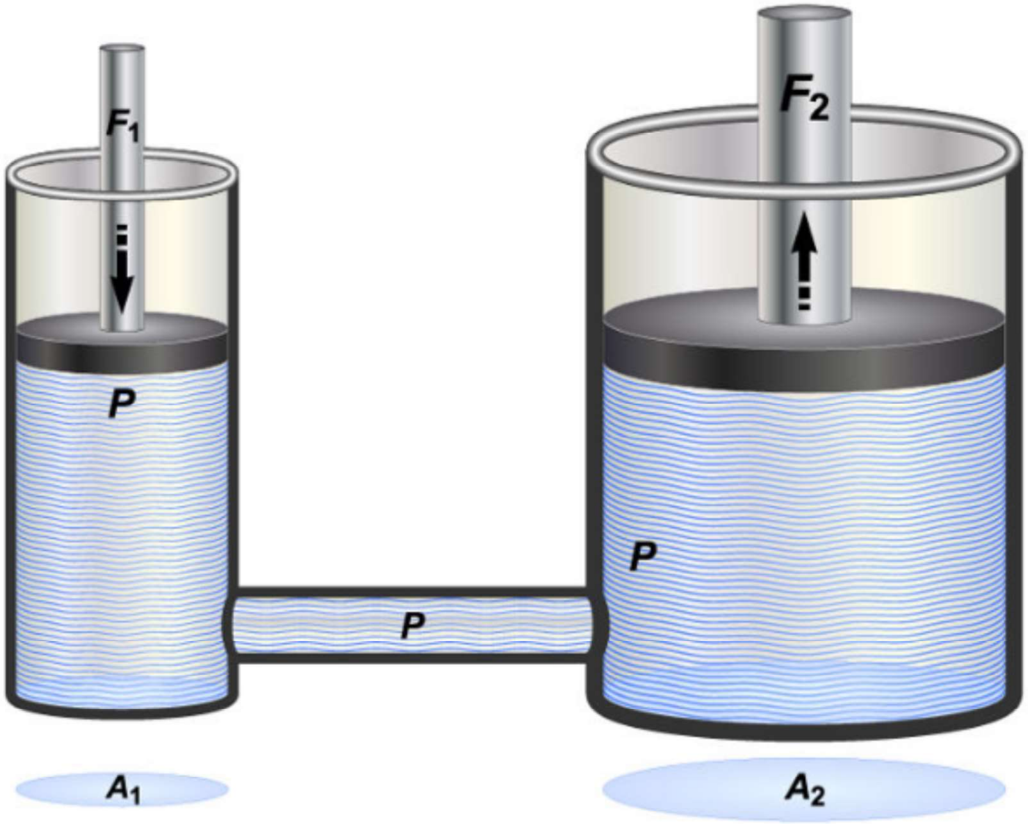
"O aumento da pressão exercida em um líquido em equilíbrio é transmitido integralmente a todos os pontos do líquido bem como às paredes do recipiente em que ele está contido."



Pressão em fluido incompressível estático

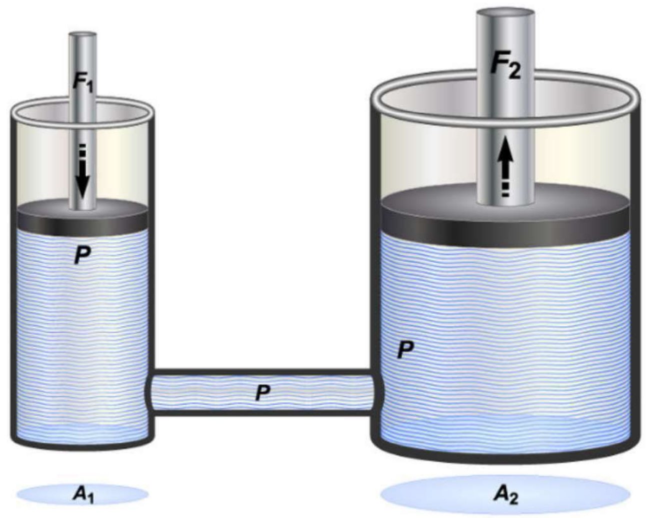
- Lei de Pascal
  - Em termos matemáticos

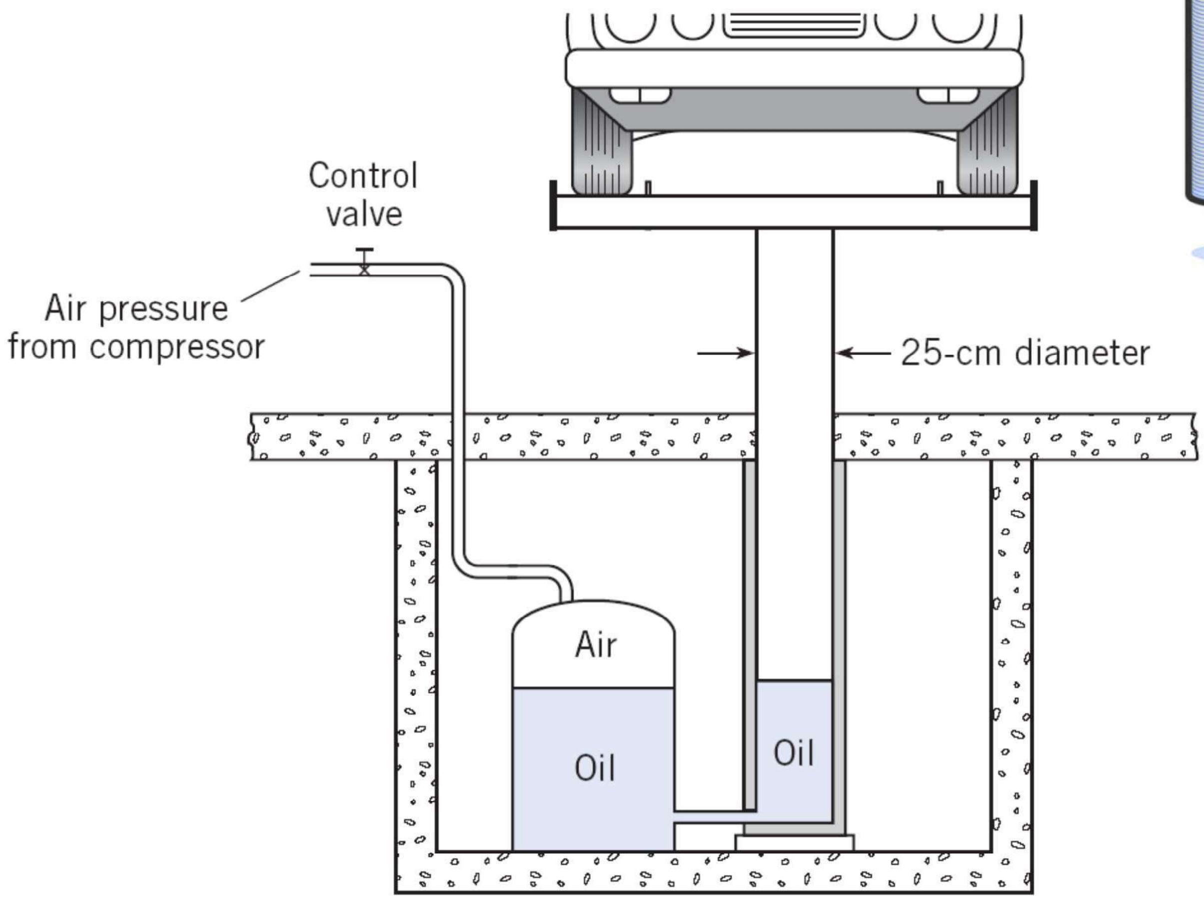
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$



Pressão em fluido incompressível estático

- Uso: Elevadores hidráulicos





Medição de Pressão

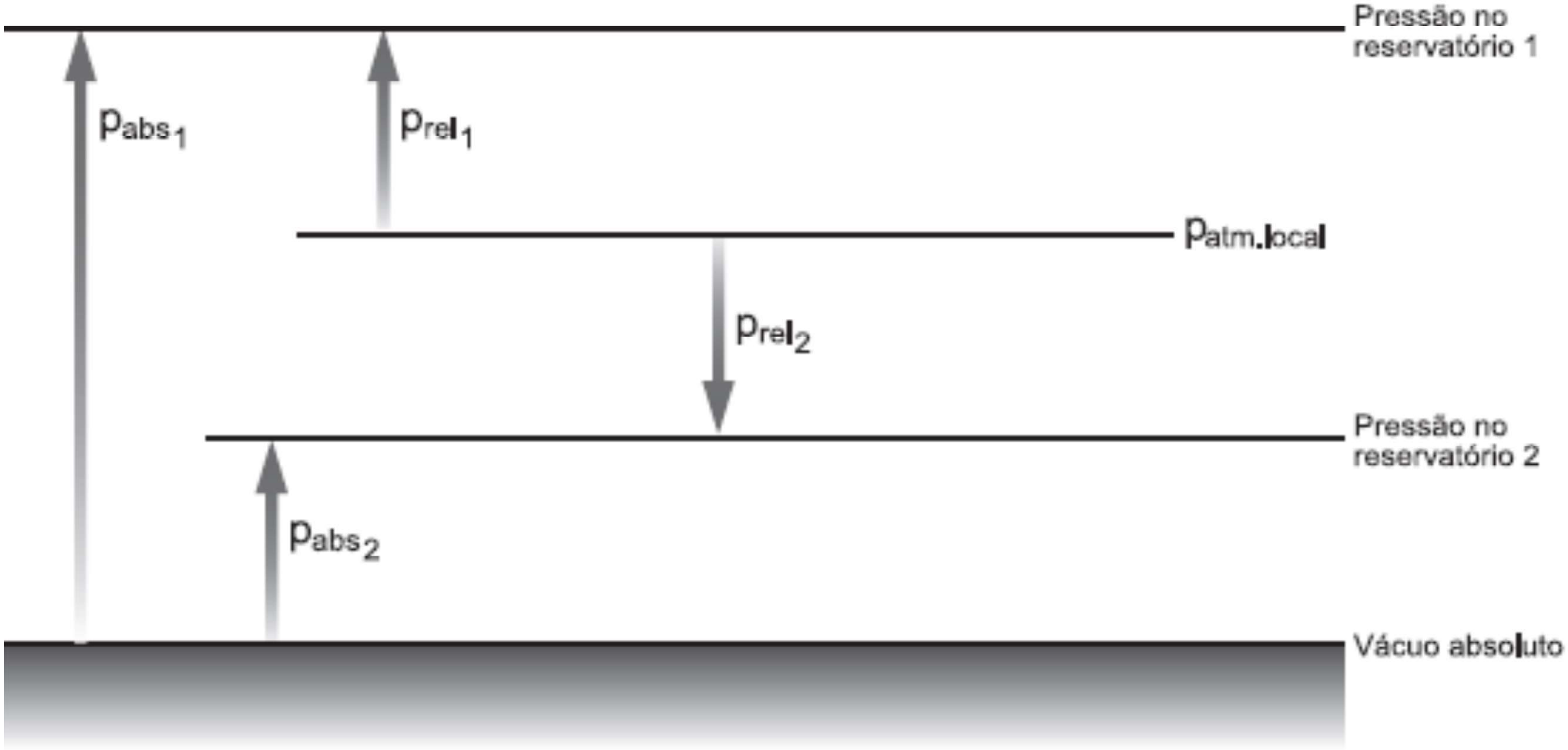
- Valores estabelecidos em relação a uma referência
  - **Atmosfera Padrão**
    - Representação ideal da atmosfera terrestre avaliada numa latitude média e condição ambiental média anual

Propriedades da Atmosfera Padrão (Nível do Mar)*	
Temperatura, T	288,15 K (15 °C)
Pressão, p	101,325 kPa
Massa específica, ρ	1,225 kg/m^3
Peso específico, γ	12,014 N/m^3
Viscosidade, μ	$1{,}789 \times 10^{-5}$ N.s/m^2

* Aceleração da gravidade ao nível do mar = 9,807 m/s^2

Medição de Pressão

- Valores estabelecidos em relação a uma referência
  - Unidades: Pa = N/m^2 (SI), psi, bar, altura de coluna de líquido (m.c.a ou mH_2O, mmHg, mmH_2O), etc.

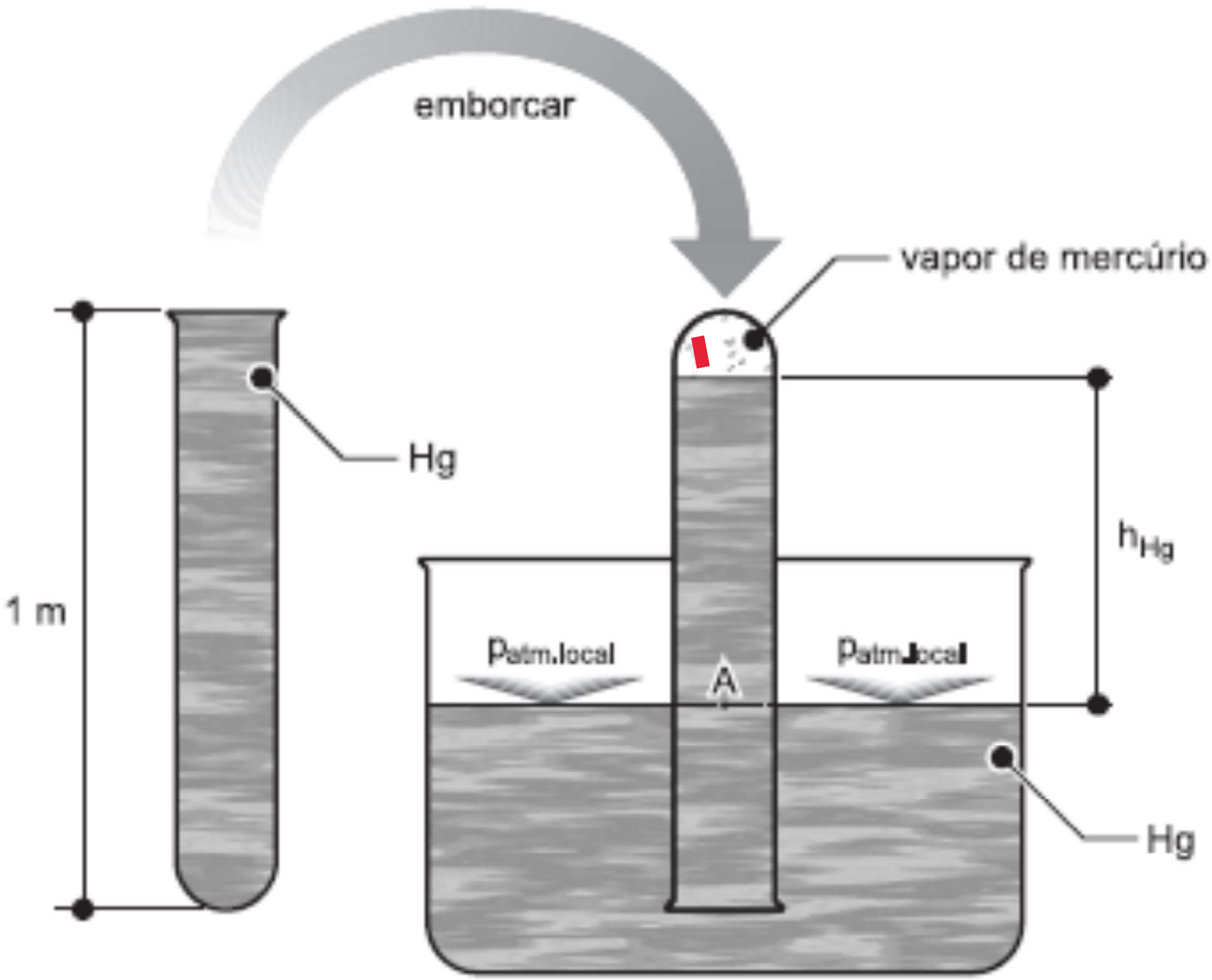


Medição de Pressão

- Pressão atmosférica: barômetro de mercúrio

$$p_{atm} = \underbrace{p_{vapor}}_{desprezível} + \gamma_{Hg} h$$

$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

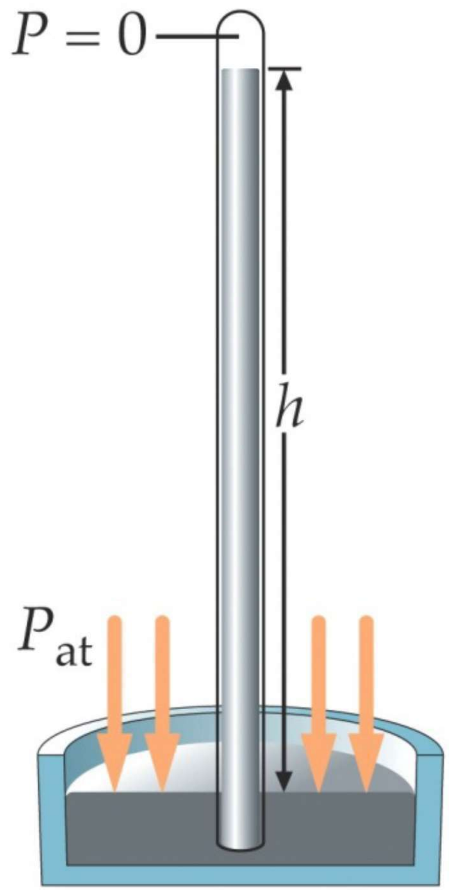


Ao nível do mar: p_{atm}= 760 mmHg = 10,33 mH_2O

Medição de Pressão

- Valores da pressão atmosférica em diferentes unidades

$$
\begin{aligned}
p_{atm} &= 101.325 \text{ Pa } \left(Pascal\right) \\
&= 1{,}0 \text{ atm } \ (atmosfera) \\
&= 1{,}01325 \text{ bar} \\
&= 760 \text{ mmHg} \\
&= 10{,}33 \text{ mH}_2\text{O} \\
&= 1{,}0332 \ \text{kgf}/\text{cm}^2 \\
&= 14{,}7 \text{ psi}
\end{aligned}
$$



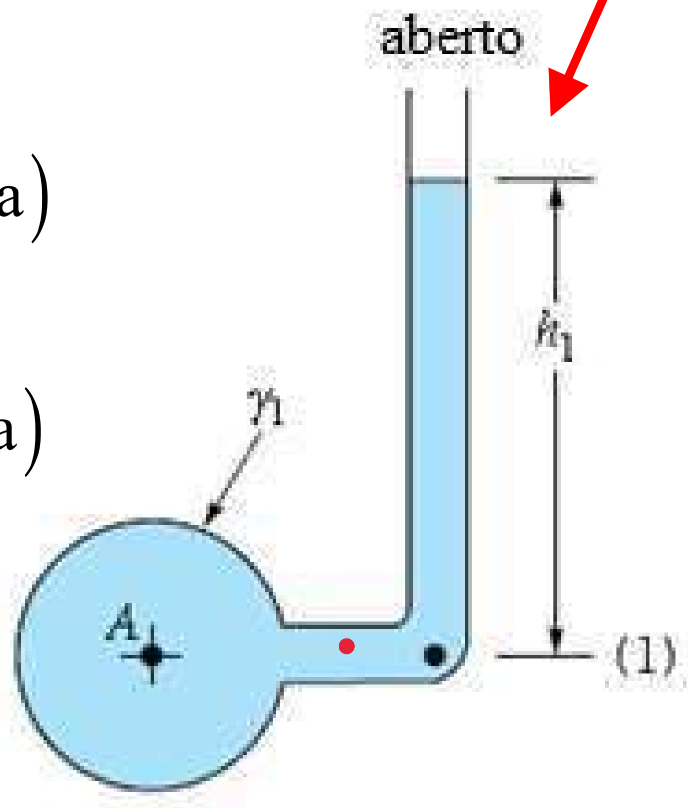
Manometria

- Manômetro:
  - Medição da pressão relativa

Tubo piezométrico

$$p_A = p_O + \gamma_1 h_1$$
(pressão absoluta)

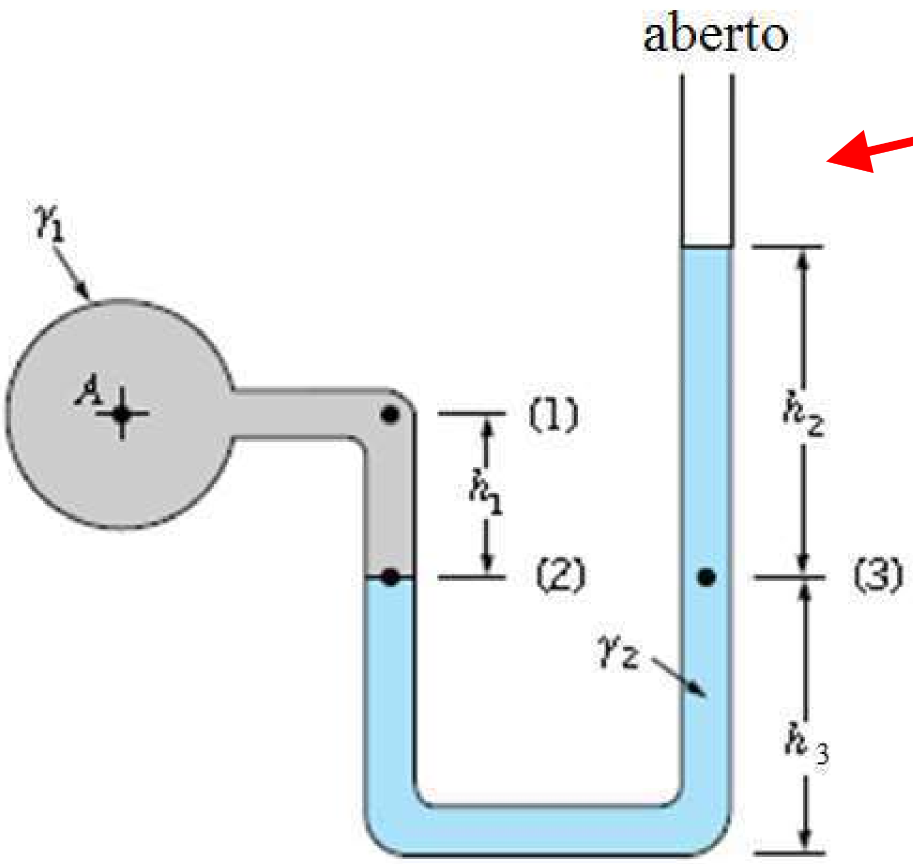
$$p_A = \gamma_1 h_1$$
(pressão relativa)



Restrições:

- $p_A > p_{atm}$
- p_A não pode ser muito grande
- Fluido do recipiente tem que ser líquido

Manometria



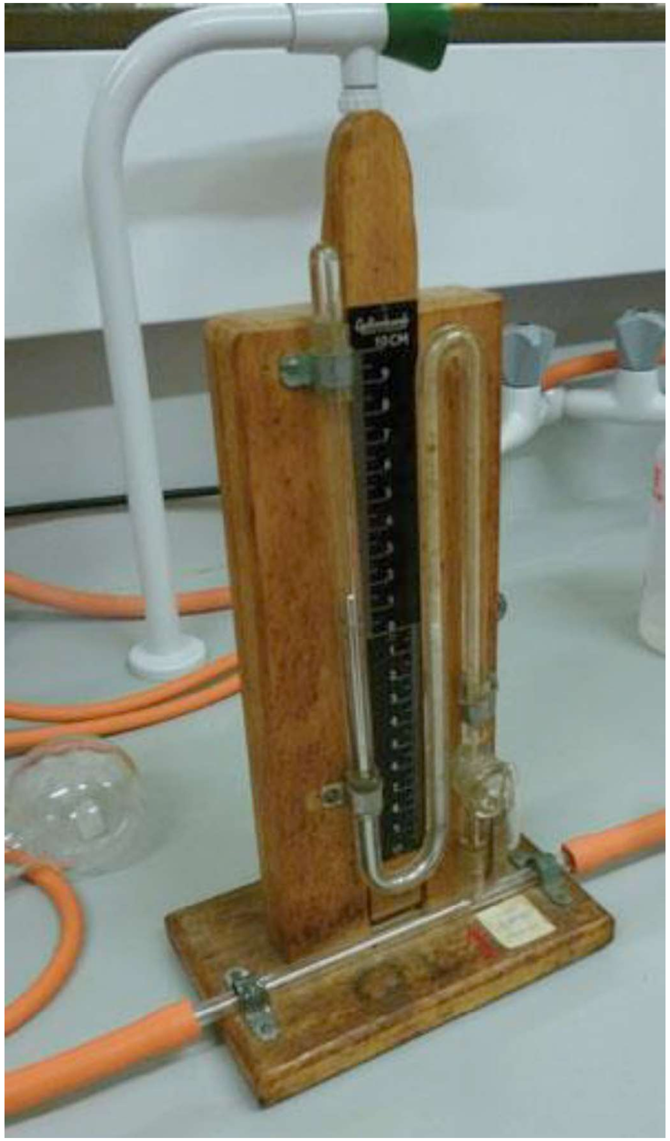
Manômetro com tubo em U

$$p_A = p_1$$
$$p_1 = p_2 - \gamma_1 h_1$$
$$p_2 = p_3$$
$$p_3 = p_{atm} + \gamma_2 h_2$$
$$p_1 = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + p_{atm}$$

- Fluido manométrico pode ser diferente do fluido do recipiente
- Se o fluido do recipiente for um gás, o seu peso específico pode ser desprezado

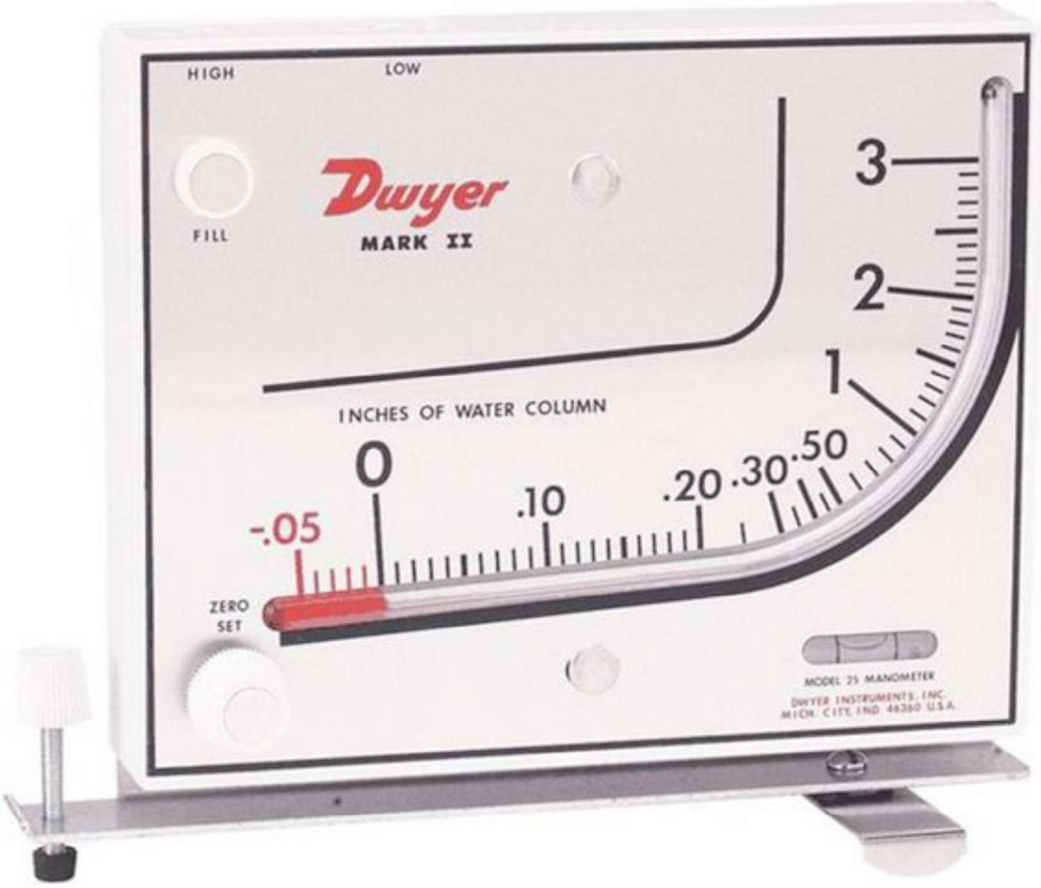
Manometria

Manômetros
com tubo
em U



Manometria

Manômetros de coluna inclinada



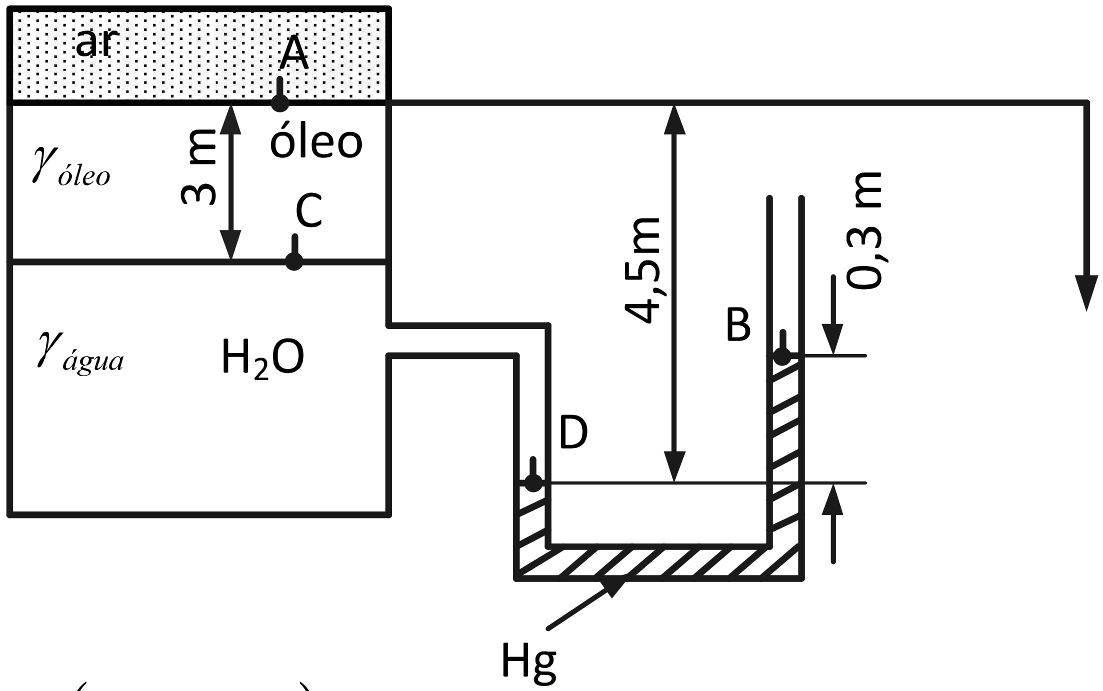
Exercício 1

Calcular a pressão efetiva em A, kgf/cm²

$$\gamma_{óleo} = 800\, kgf/m^3$$

$$\gamma_{água} = 1.000\, kgf/m^3$$

$$\gamma_{Hg} = 13.600\, kgf/m^3$$



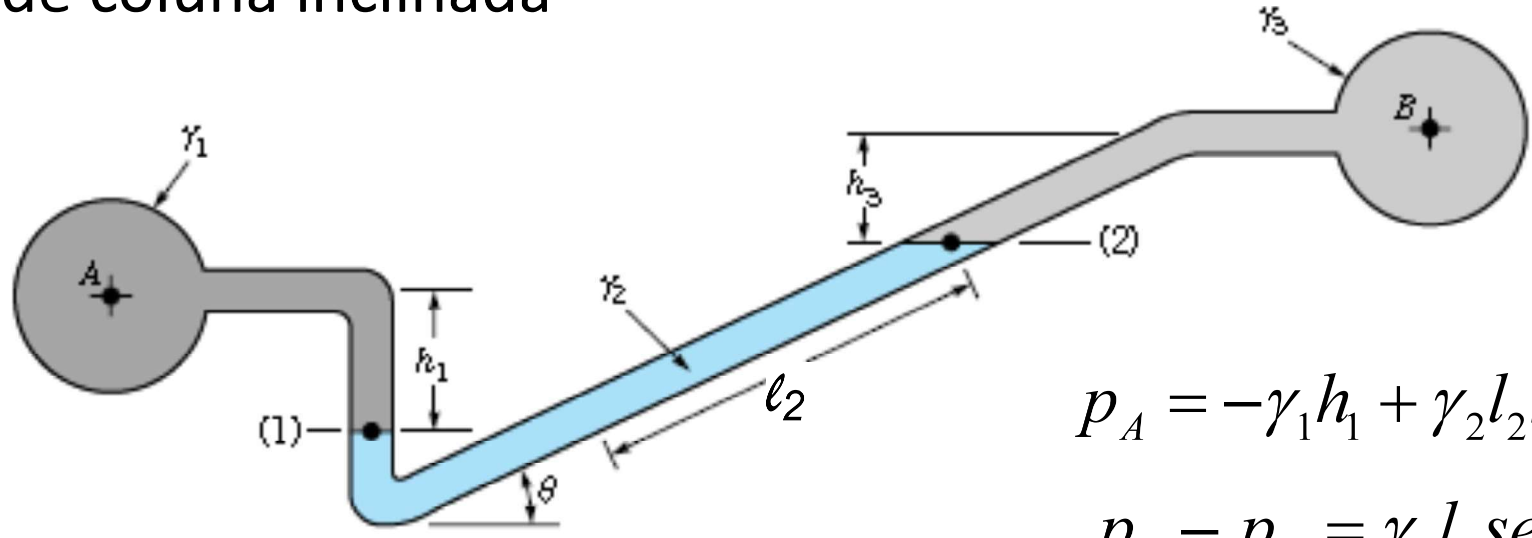
$$p_A = -\gamma_{óleo} h_C - \gamma_{água}\left(h_D - h_C\right) + \gamma_{Hg}\left(h_D - h_B\right)$$

$$p_A = -800 \times 3 - 1.000\left(4,5-3\right) + 13.600\left(0,3\right) = 180\,\mathrm{kgf/m^2}$$

$$p_A = 0,018\,\mathrm{kgf/cm^2}$$

Exercício 2

Avaliação da pressão em manômetro de coluna inclinada



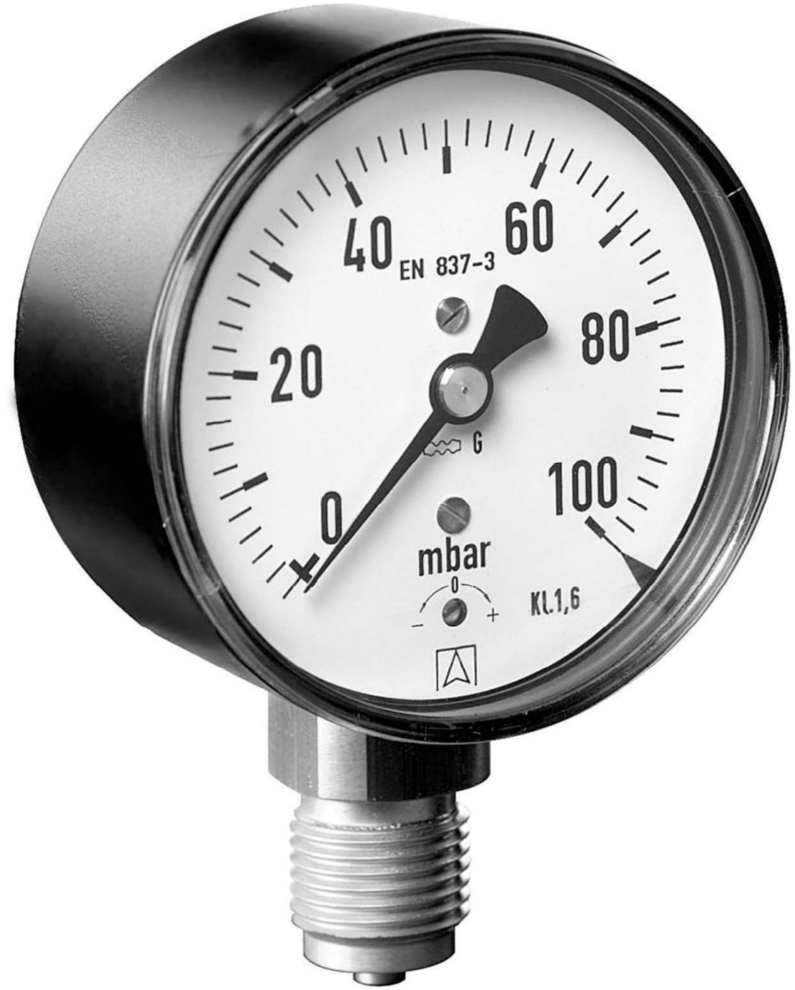
$$p_A = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 l_2 sen\theta + \gamma_3 h_3 + p_B$$

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 sen\theta - \gamma_1 h_1 + \gamma_3 h_3$$

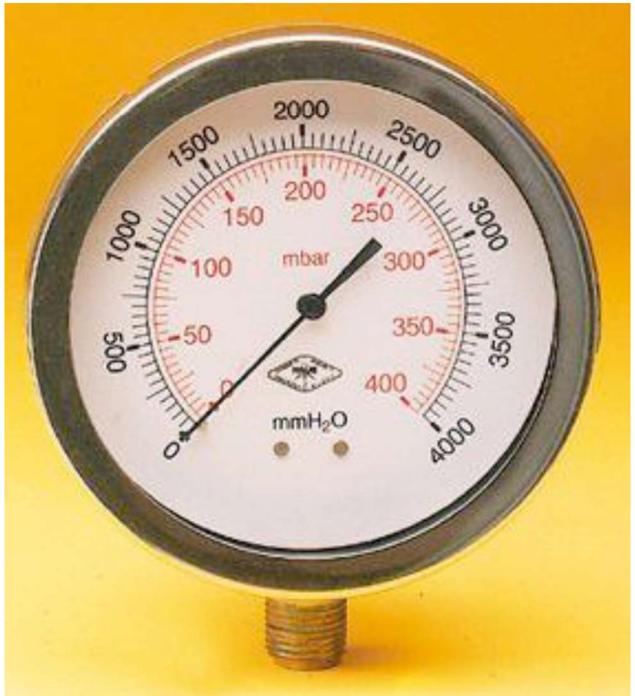
Se os fluidos em 1 e 3 forem gases: $\gamma_1 h_1 = \gamma_3 h_3 = 0$

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 sen\theta \Rightarrow l_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 sen\theta}$$

Manometria

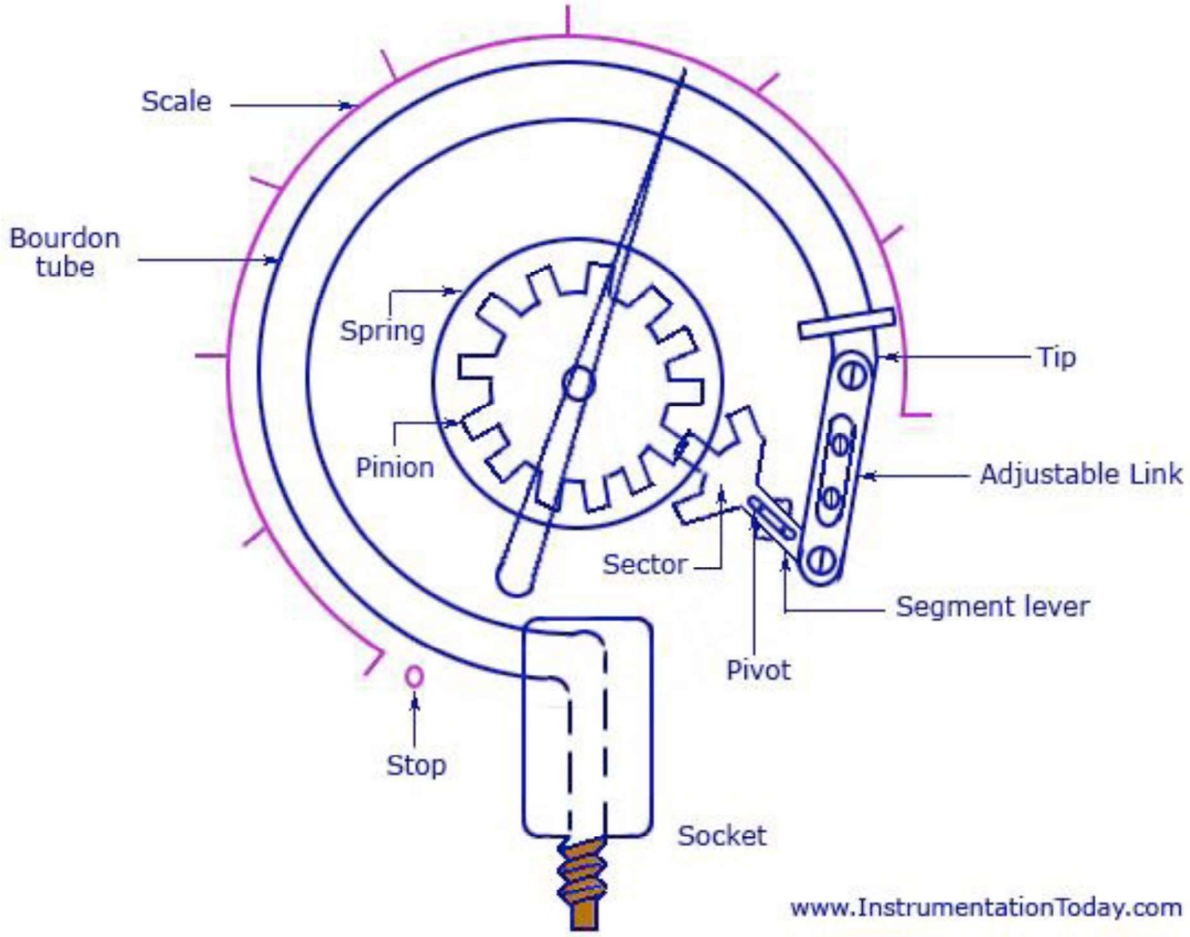


Manômetros de Bourdon



Manometria

Manômetro de Bourdon



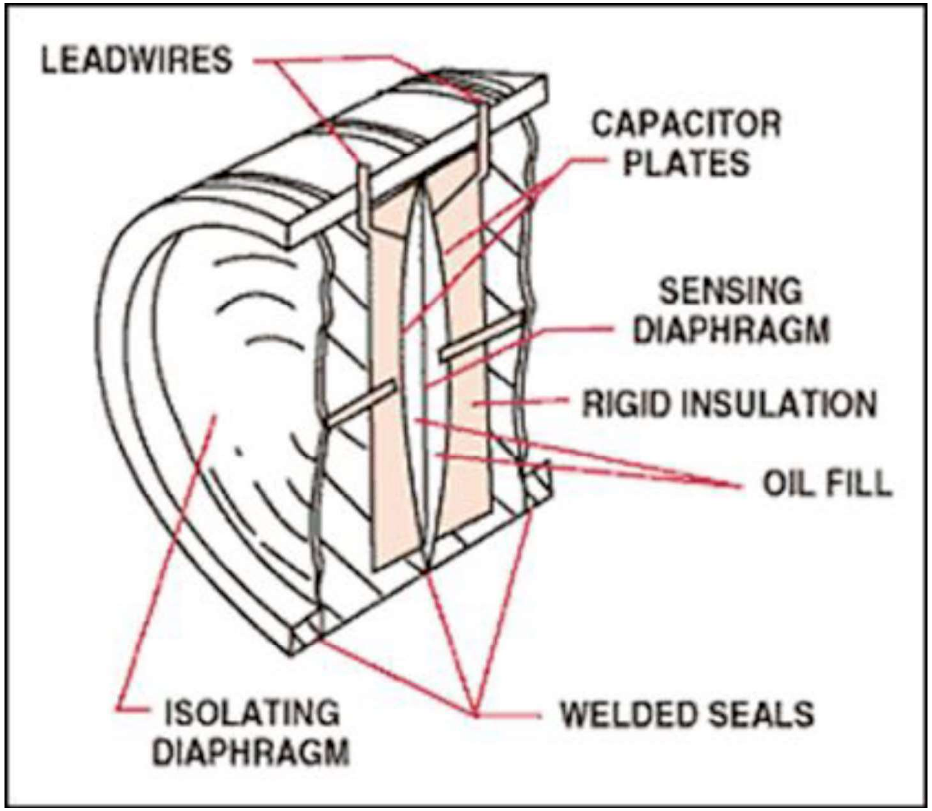
Bourdon Tube Pressure Gauge

Manometria

Manômetros digitais

Manometria

Manômetros digitais

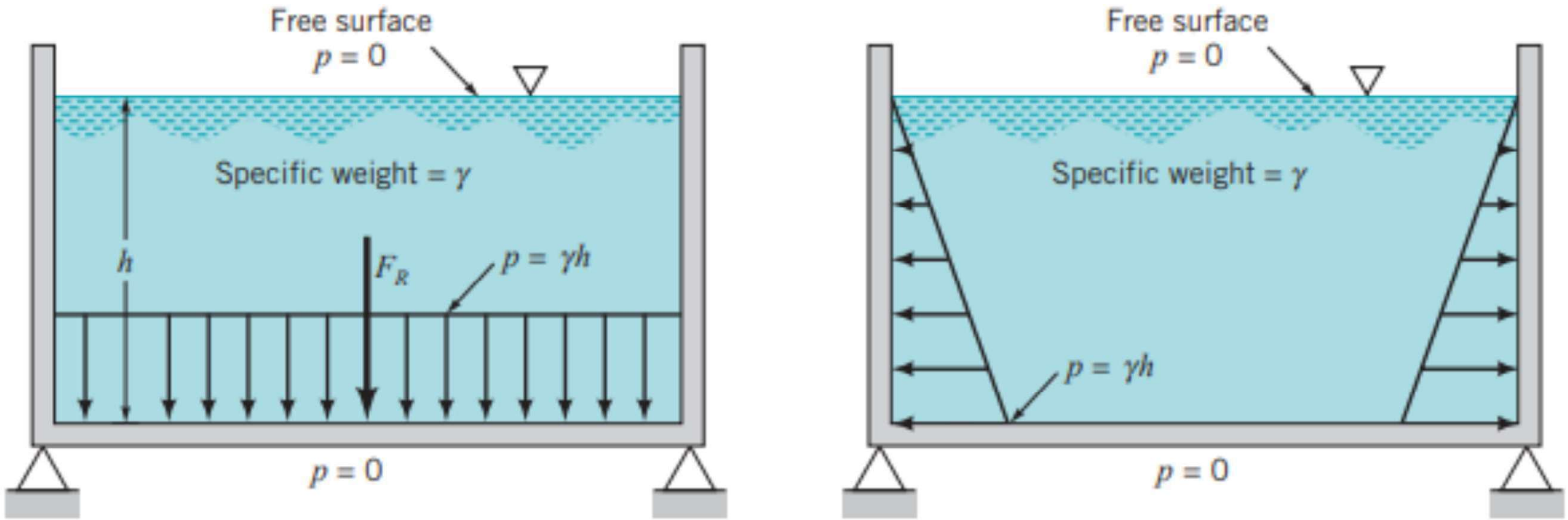


Manometria

Transdutores de pressão

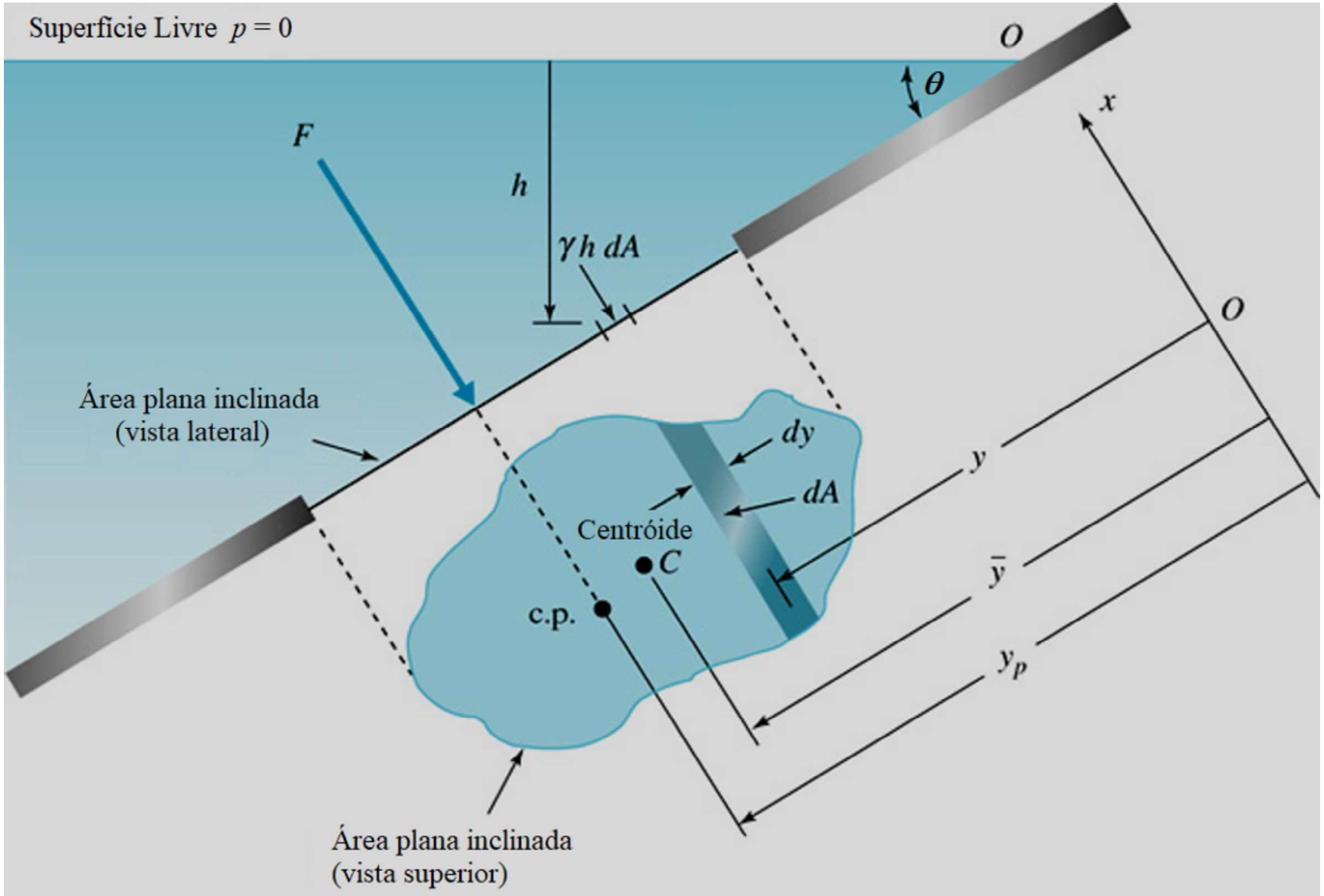
Força Hidrostática em superfícies planas

- Distribuição de pressões em um reservatório aberto
  - Dois métodos de resolução
    - Método dos momentos de 1ª e 2ª ordem
    - Método dos Prismas de Pressão



Força em superfícies planas

- Método dos momentos de 1ª e 2ª ordem
  - Centróide (C): propriedade matemática da área
  - Centro de Pressão (cp): local de ação da força resultante



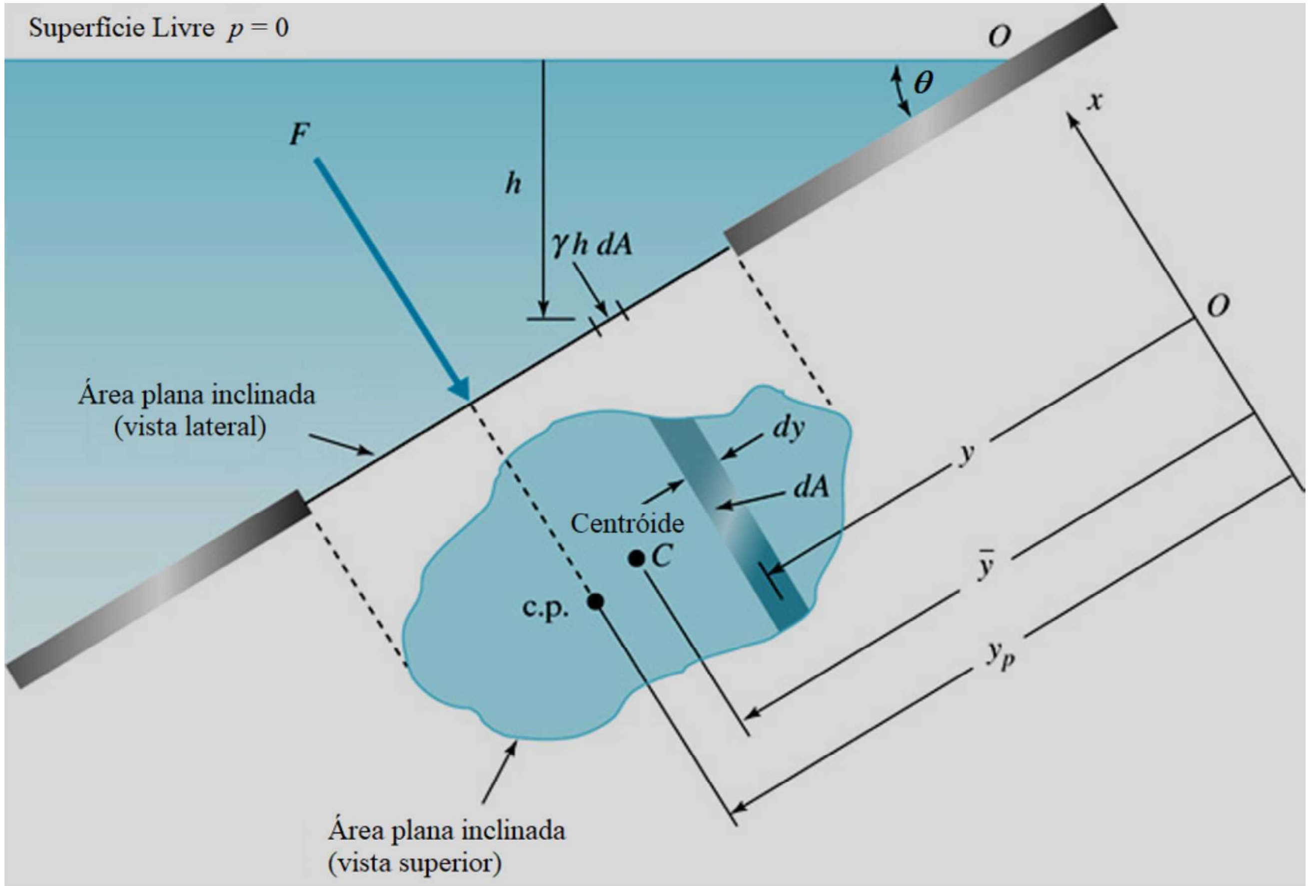
Força em superfícies planas

- Método dos momentos de 1ª e 2ª ordem

$$F_R = \int_A \gamma h \, dA$$

$$= \int_A \gamma y \operatorname{sen}\theta \, dA$$

$$= \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y \, dA$$



Essa integral é o Momento de 1ª ordem da área em relação ao eixo x

Força em superfícies planas

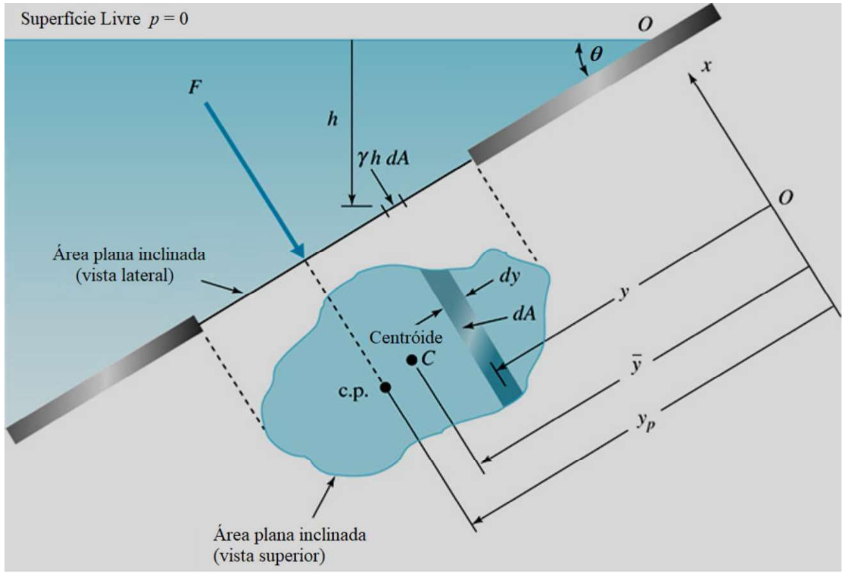
- Método dos momentos de 1ª e 2ª ordem

$$F_R = \gamma \mathrm{sen}\theta \int_A y\, dA$$

  – Como a integral é o Momento de 1ª ordem da área em relação ao eixo x, pode-se escrever

$$\int_A y\, dA = y_c A$$

Coordenada do centróide

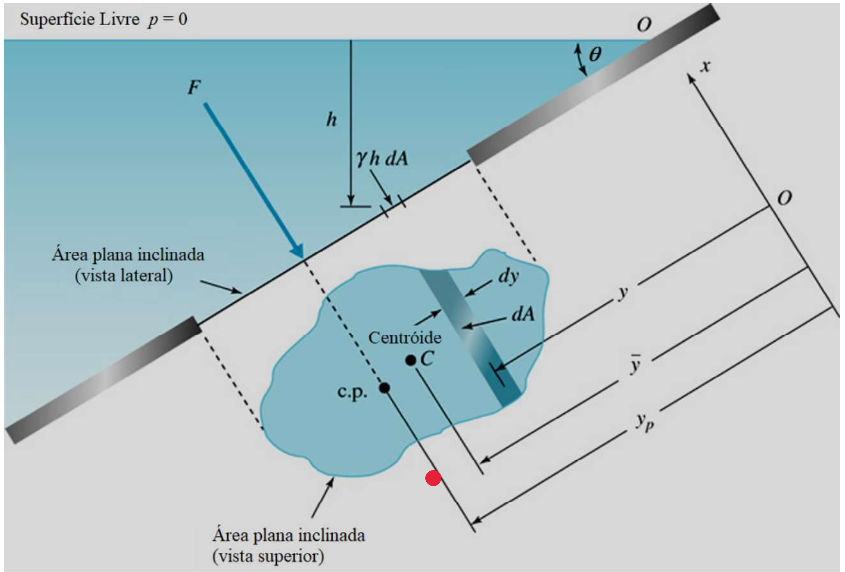


  – E assim

$$F_R = \gamma A y_c \mathrm{sen}\theta = \gamma h_c A$$

Força em superfícies planas

- A linha de ação da força resultante, y_r, pode ser determinada pela soma dos momentos em relação a x
  - momento da força resultante = momentos das forças de pressão



$$F_R y_R = \int_A y\, dF = \int_A \gamma \operatorname{sen}\theta\, y_c^2\, dA$$

- Como

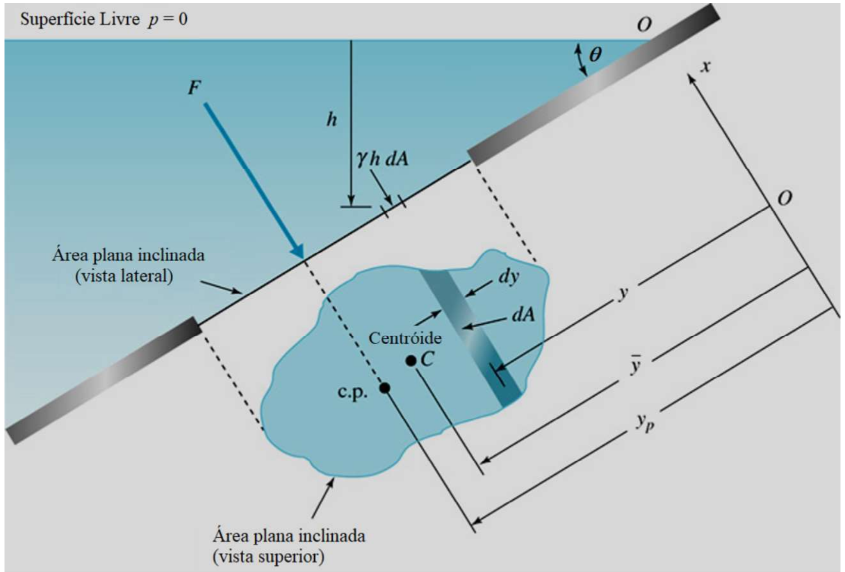
$$F_R = \gamma \operatorname{sen}\theta\, y_c A \quad \Rightarrow \quad y_R = \frac{\int_A y^2\, dA}{y_c A}$$

Momento de 2ª ordem da superfície *A*, ou momento de inércia ***I_x***

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$$

Força em superfícies planas

- Pelo teorema dos eixos paralelos temos



$$I_x = I_{xc} + Ay_c^2$$

$$y_R = \underbrace{\frac{I_{xc}}{y_c A}}_{>0} + y_c$$

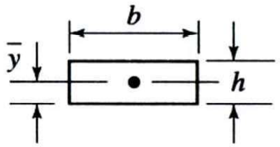
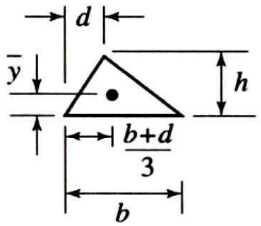
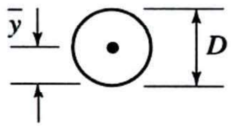
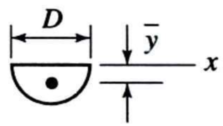
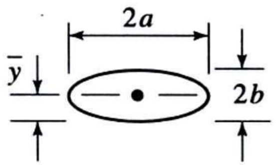
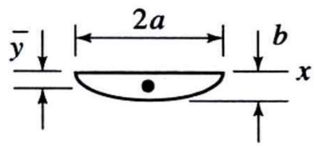
Ponto de aplicação estará sempre abaixo da cota do centróide

- De forma análoga para a coordenada x_r

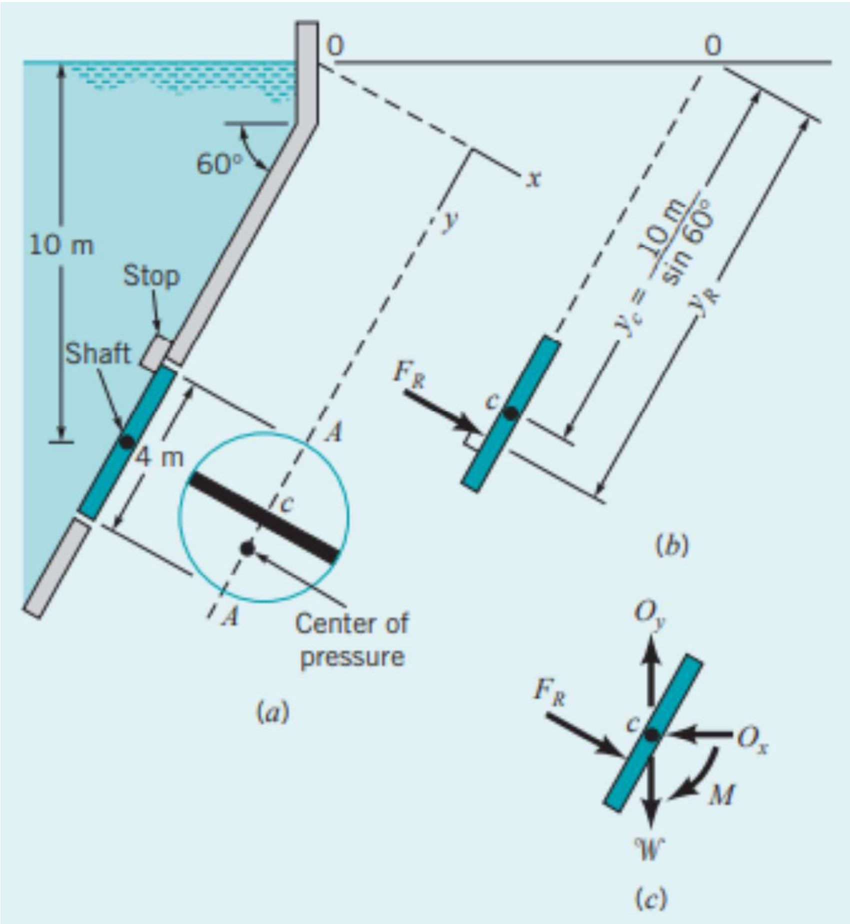
$$x_R = \frac{\dfrac{\int xy\, dA}{A}}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A} \Rightarrow x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

Forças em superfícies planas

- Propriedades geométricas de algumas superfícies

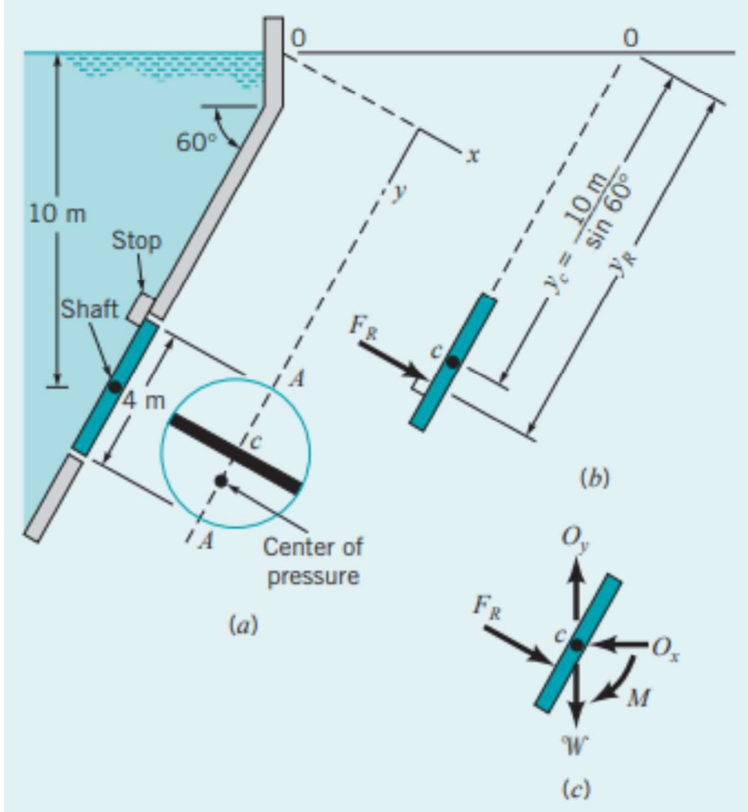
	Esboço	*Área*	*Centróide*	*Segundo momento*
Retângulo		bh	$\bar{y} = h/2$	$\bar{I} = bh^3/12$ $\bar{I}_{xy} = 0$
Triângulo		$bh/2$	$\bar{y} = h/3$	$\bar{I} = bh^3/36$ $\bar{I}_{xy} = (b - 2d)bh^3/72$
Círculo		$\pi D^2/4$	$\bar{y} = r$	$\bar{I} = \pi D^4/64$
Semicírculo		$\pi D^2/8$	$\bar{y} = 4r/3\pi$	$I_x = \pi D^4/128$
Elipse		πab	$\bar{y} = b$	$\bar{I} = \pi ab^3/4$
Semielipse		$\pi ab/2$	$\bar{y} = 4b/3\pi$	$I_x = \pi ab^3/8$

Exercício 3



1. Determine a magnitude e a força resultante da exercida pela água sobre a comporta circular com 4m de diâmetro.
2. Determine o momento a ser aplicado no eixo para abrir a comporta.

Exercício 3



$$F_R = \gamma h_c A = 9{,}8.10^3 \times 10 \times \frac{\pi.4^2}{4} = 1{,}23.10^6 \text{N}$$

Ponto de aplicação

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \quad \text{e} \quad x_R = \frac{I_{xy_c}}{y_c A} + x_c \quad (\text{por simetria})$$

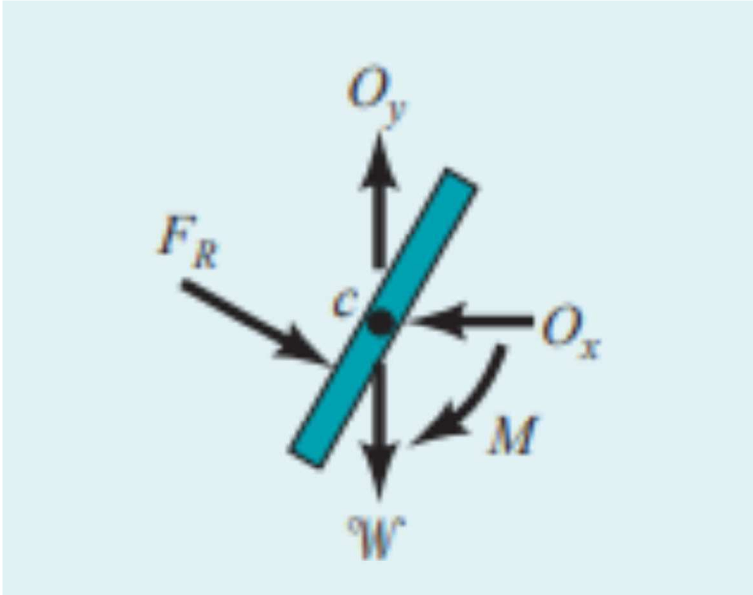
$$\text{da tabela } I_{x_c} = \frac{\pi R^4}{4} \text{ e } y_c = \frac{10}{\text{sen } 60} \rightarrow y_R = 11{,}6\text{m}$$

$$y_R - y_c = 11{,}6 - \frac{10}{\text{sen } 60} = 0{,}0866$$, um pouco abaixo do centróide, o que implica que o batente está forçado.

Para dimensionar o motor/redutor para abrir a comporta e sangrar o reservatório, calcula-se o momento ou torque

$\sum M_c = 0$ e portanto $F_R * (y_R - y_c) = 1{,}23.10^6 . 0{,}0866 = 1{,}07.10^5 Nm$

Exercício 3



- O momento necessário para abrir a comporta vem do balanço de momentos no eixo da comporta

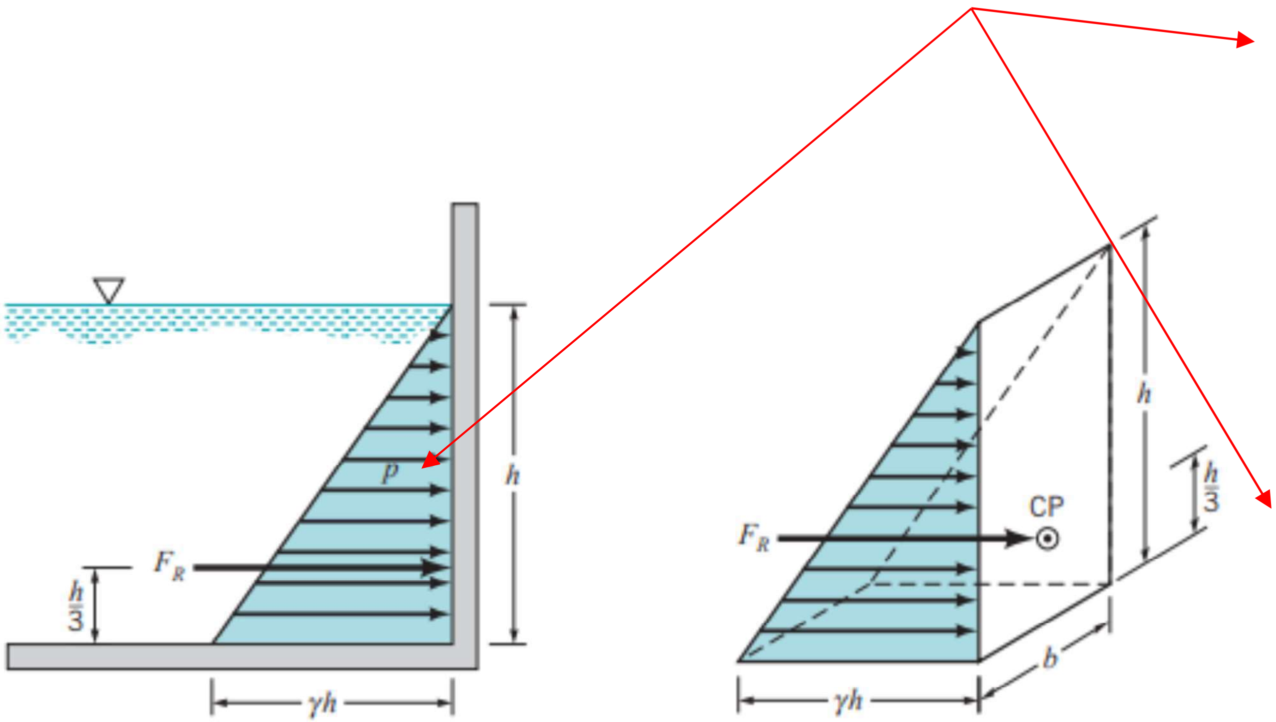
$$\Sigma M_c = M_{abertura} - M_{F_R} = 0$$

$$M_{abertura} = F_R\left(y_R - y_c\right) = 1,23\times10^6\left(0,0866\right)$$

$$M_{abertura} = 1,07\times10^5\,\mathrm{N.m}$$

Força em superfícies planas

- Método do prisma de pressões
  - mais simples para superfícies retangulares



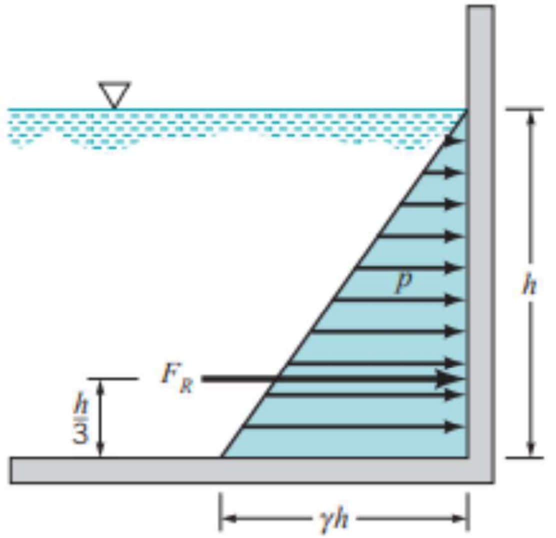
- P varia linearmente com profundidade ($p = \gamma h$)
- p_{efet} = 0 na superfície
- p_{media} ocorre em plano h/3 na distribuição triangular

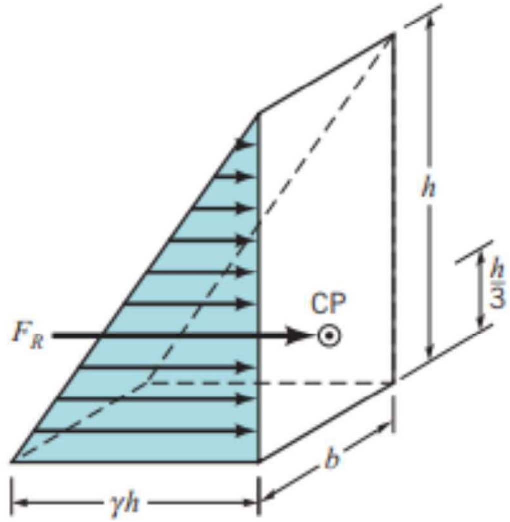
Força em superfícies planas

- Método do prisma de pressões
  - Força que atua na área

$$F_R = p_{média} \times \text{área} = \frac{\gamma h}{2} \times bh$$

$$= \text{volume do prisma do prisma de pressão}$$

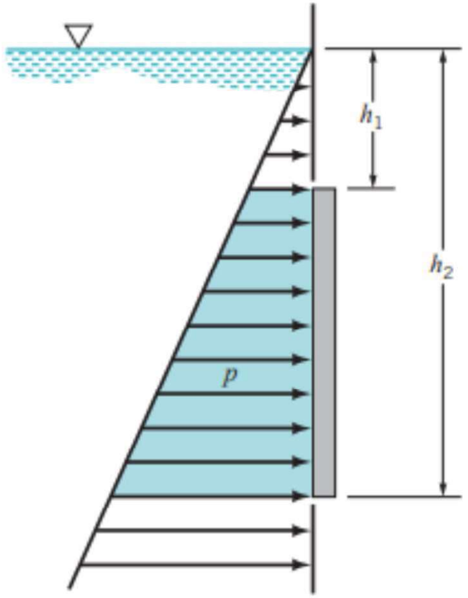


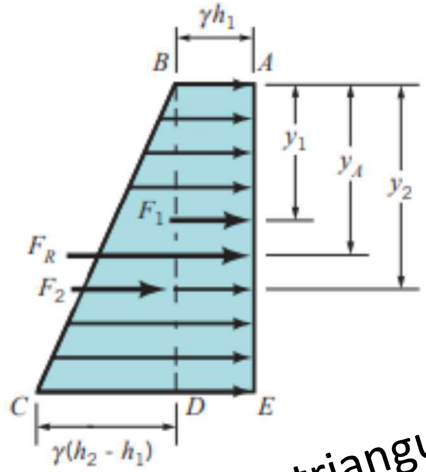


- P varia linearmente com profundidade ($p = \gamma h$)
- p_{efet} = 0 na superfície
- p_{media} ocorre em plano *h/3* na distribuição triangular

Força em superfícies planas

- Método do prisma de pressões
  - abordagem tb vale quando a superfície está toda submersa





Distribuição triangular de pressões $= \gamma(h_2 - h_1).h_2.b$

Distribuição retangular de pressões $= \gamma h_1.h_1.b$

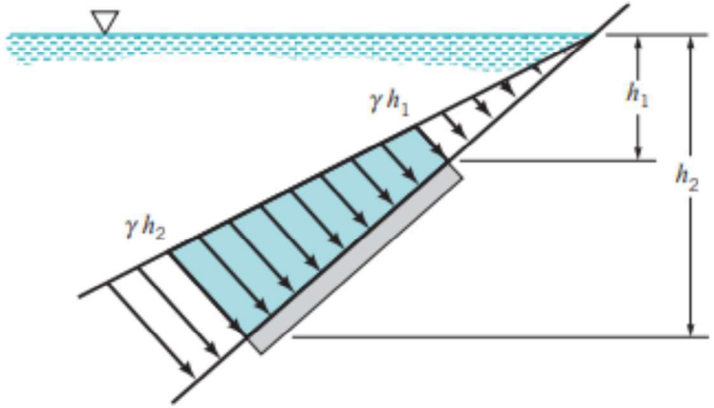
$$F_R = F_1 + F_2 \quad (\Delta + \square)$$

A localização de F_R é determinada a partir do momento em relação a um eixo

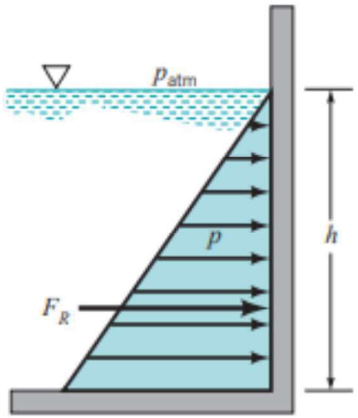
$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

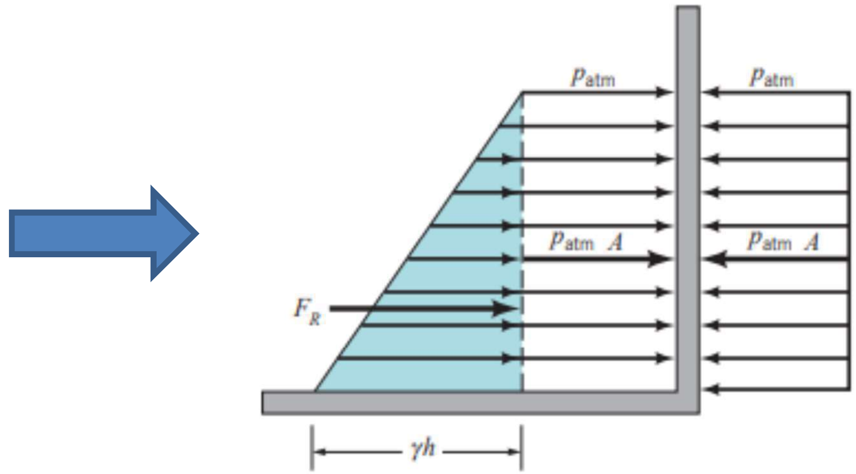
Força em Superfícies Planas

- Superfícies inclinadas



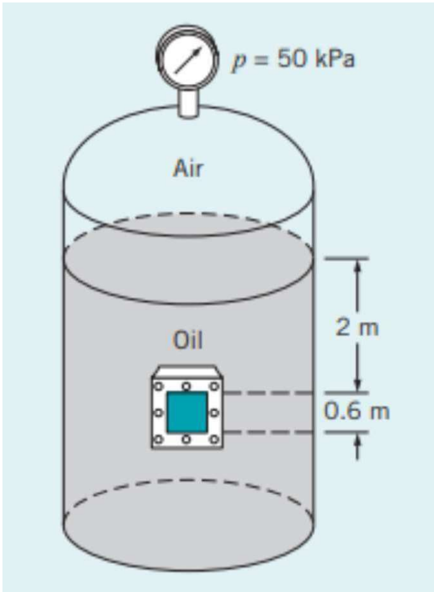
- Efeito de p_{atm}

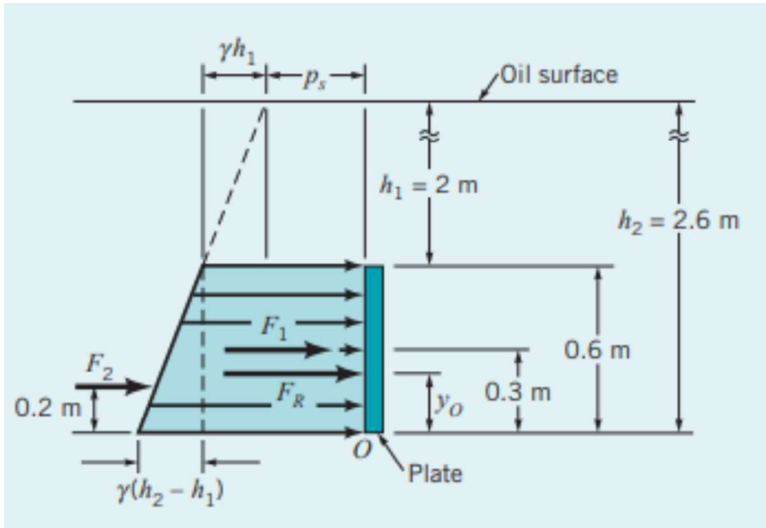




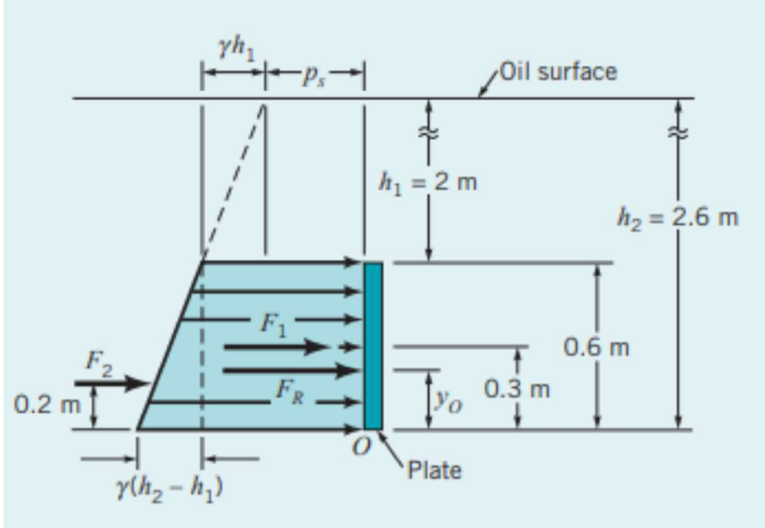
Exercício 4

- Tanque pressurizado com ar contém óleo (densidade = 0,9) e possui uma vigia para limpeza e inspeção com 0,6 x 0,6 m². Qual a magnitude e localização da força nesta placa?





Exercício 4



Como $d_{óleo} = 0{,}9$

$$\Rightarrow \rho_{óleo} = 0{,}9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$$

Cálculo da força:

$$F_1 = \left(p_{gás} + \rho g h_1\right) A = \left(50 \times 10^3 + 0{,}9 \times 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2\right) \cdot 0{,}36 = 24{,}4 \times 10^3 \text{N}$$

$$F_2 = \rho g \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right) A = 0{,}9 \times 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{0{,}6}{2} \cdot 0{,}36 = 0{,}95 \times 10^3 \text{N}$$

$$F_R = F_1 + F_2 = 25{,}35 \times 10^3 \text{N}$$

Exercício 4

A localização vertical do ponto de aplicação da força F_R é obtida a partir da soma dos momentos em relação ao eixo que passa pelo ponto *O*:

$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

$$\therefore y_R = \frac{24,4 \times 10^3 \cdot 0,3 + 0,95 \times 10^3 \cdot 0,2}{25,35 \times 10^3}$$

$$y_R = 0,296\text{m}$$