Conjuntos compactos

Definição: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando é limitado e fechado.

Exemplos: $B(a; r)$ não é compacto (não é fechado)

$B[a; r]$ é compacto (é ltdo e fechado)

$S[a; r]$ é compacto

$\mathbb{Z}^n$ é fechado mas não é limitado, logo não é compacto.

Teorema: As seguintes afirmações sobre um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ são equivalentes:

(1) K é compacto

(2) Toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) K é compacto.

Usando o fato de que K é limitado, qualquer sequência de pontos (x_k) de K é uma sequência limitada, logo, possui subsequência convergente, digamos (x_{k_j}), $x_{k_j} \to a \in \mathbb{R}^n$.

Agora, usando o fato de que K é fechado, o limite da sequência $(x_{k_j})_j$ deve pertencer a K, garantindo (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Temos que toda sequência em K admite subsequência convergindo para um ponto de K.

Queremos mostrar que K é limitado e fechado.

Suponha que K não seja limitado, então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in K$ tal que $\|x_k\| > k$. (*)

Considerando a sequência de elementos construída com o argumento (*), (x_k) não possui subsequência convergente, pois nenhuma subsequência é limitada.

Para mostrarmos que K é fechado, consideramos uma sequência convergente de elementos de K, $(x_k) \to a \in \mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que $a \in K$.

Como esta sequência (x_k) possui subsequência convergindo para um ponto de K, isto é, $\exists\ x_{k_j} \to b \in K$, por hipótese, então $b = a$, pois toda subsequência de uma sequência convergente deve convergir para o mesmo ponto de convergência da própria sequência.

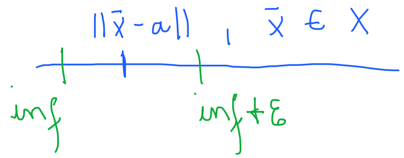
Logo, K é compacto.

Definição: Chama-se distância do ponto $a \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ ao número

$$d(a; X) = \inf\{\|x - a\| : x \in X\}.$$

Pela definição de ínfimo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_k \in X$ tal que

$$d(a;X) \le \|x_k - a\| < d(a,X) + \frac{1}{k},$$



Portanto, $\lim_{k\to\infty}\|x_k - a\| = d(a;X)$

$\inf \le \|\bar{x} - a\| < \inf + \varepsilon$

Tomo $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e coloco $\bar{x} = x_k$

A sequência (x_k) é limitada pois $\|x_k\| \le \underbrace{\|x_k - a\|}_{\text{é conv. portanto ltda}} + \|a\|$.

Logo (x_k) possui uma subsequência convergente, digamos, $x_{k_j} \to x_0$.

Assim, $d(a;X) = \lim_{j\to\infty}\|x_{k_j} - a\| = \|x_0 - a\|$. (os termos da seq. que não estão na subseq. são desnecessários)

$x_0 \in \bar{X}$. Se X for fechado $x_0 \in X$.

Teorema: Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}^n$ existe (pelo menos um) $x_0 \in F$ tal que $\|x_0 - a\| \le \|x - a\|$, $\forall x \in F$.

(a função $f: F \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - a\|$ assume valor mínimo em F)

Definição: Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a distância entre X e Y como

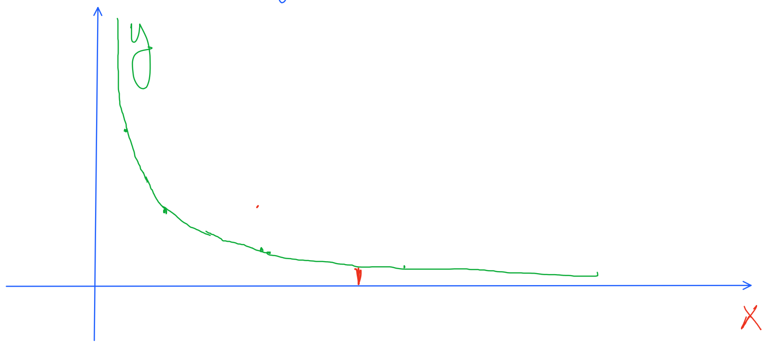
$$d(X,Y) := \inf\{\|x - y\| ; x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Pergunta: Se X e Y são fechados, existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tal que

$$d(X, Y) = \| x_0 - y_0 \| \; ?$$

Resposta: Não vale sempre:

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0\}$ e $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 1/x$ e $x > 0\}$



X e Y são fechados em $\mathbb{R}^2$, $\boxed{\text{disjuntos}}$ e $d(X, Y) = 0$.

Teorema: Sejam $K, F \subset \mathbb{R}^n$, K compacto e F fechado.
Existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $\|x_0 - y_0\| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x \in K$ e $y \in F$.

Demonstração: Da definição de dist(K, F), existem sequências $(x_K) \in K$ e $(y_K) \in F$ tais que $\lim_{K \to \infty} \|x_K - y_K\| = \text{dist}(K, F)$

Como K é compacto, (x_K) admite subsequência convergente para $x_0 \in K$.
Consideramos os índices desta subseq.
Como $\|y_K\| = \underbrace{\|x_K - y_K\|}_{\text{conv.}} + \underbrace{\|x_K\|}_{\text{ltdo pois } K \text{ é ltdo}}$, (y_K) é limitada e, portanto,
admite subsequência convergente $y_K \to y_0 \in F$ (F é fechado).

olhando para os índices dados pela subseq. de y_k.

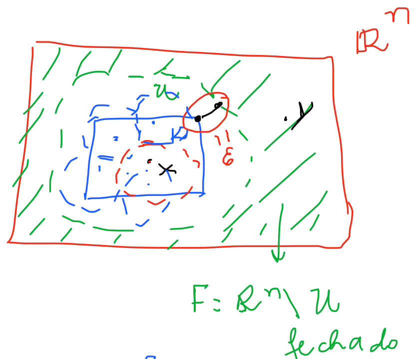
Assim, $\|x_0 - y_0\| = \lim \|x_k - y_k\| = \underbrace{d(K, F)} \leq \|x - y\|$, $\forall\ x \in K$ e $\forall\ y \in F$.

Corolário: Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda $B(x, \varepsilon)$, com $x \in K$, está contida em U.

Demonstração:

Sejam $x_0 \in K$ e $y_0 \in F = \mathbb{R}^n \setminus U$ (fechado) tais que

$$\|\overset{\in K}{x_0} - \overset{\in F}{y_0}\| \leq \boxed{\|x - y\|} \quad \forall\ x \in K \text{ e } \forall\ y \in F.$$



Seja $\varepsilon = \|x_0 - y_0\|$. Como $K \subset U$, então $\underline{K \cap F = \emptyset}$ e $\varepsilon > 0$.

Logo, se $x \in K$ e $y \notin U$ então $\|x - y\| > \varepsilon$, isto é, $\underbrace{B(x, \varepsilon) \subset U}_{\|y - x\| < \varepsilon}$.

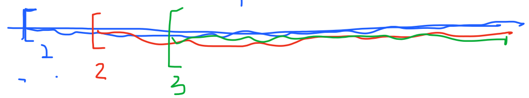
Teorema de Cantor: Sejam $K_1 \supset K_2 \supset \ldots K_k \supset \ldots$ uma sequência decrescente de conjuntos compactos não vazios de $\mathbb{R}^n$.

Existe pelo menos um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ que pertence a todos os K_k, isto é,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$$

Observação: Se os conjuntos forem apenas fechados, isto pode não ser verdade.

$F_K = [K, +\infty)$ em $\mathbb{R}$, $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_K \supset \dots$



$\bigcap_{K=1}^{\infty} F_K = \emptyset$. Entretanto, se um deles é limitado, o resultado é válido.

Demonstração: Para cada $K \in \mathbb{N}$, vamos escolher um elemento $x_K \in K_K$.
Como são compactos, a sequência (x_K) é ltda, logo possui subsequência convergente, digamos $(x_n)_{n \in N'}$ e $\lim_{n \in N'} x_n = a$.

Afirmamos que $a \in K_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

De fato, pois dado $j \in \mathbb{N}$, se $j < n$ então $K_n \subset K_j$. Em particular se $n \in N'$ e $n > j$, $K_n \subset K_j$.

Assim, se $n \in N'$ e $n > j$ então $x_n \in K_j$. Assim, como K_j é fechado e $\lim_{n \in N'} x_n = a$, $a \in K_j$.

Como j foi arbitrário, $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$

Aplicações Contínuas

Nesta seção vamos considerar aplicações

$$f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

Observe que cada $f_i : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ e são chamadas de funções coordenadas de f. Podemos denotar f por $(f_1, f_2, \dots, f_n)$

Definição: Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in X$. Dizemos que f é contínua em a se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$ com $\|x - a\| < \delta$, então $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ . .

(Para toda bola aberta B com centro em $f(a)$, em $\mathbb{R}^n$, existe uma bola aberta B' com centro em a, em $\mathbb{R}^m$, tal que $f(B' \cap X) \subset B$).

(para cada bola aberta $B(f(a), \varepsilon)$, existe uma bola aberta $B(a, \delta) \,/\, f(B(a,\delta) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon$

Se f é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos simplesmente que f é uma função contínua.

OBS: Se a é um ponto isolado de X, então $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em a.

Por ser ponto isolado, $\exists\, \delta > 0 \,/\, B(a, \delta) \cap X = \{a\}$, assim, $\forall\, \varepsilon > 0$ dado,

$$f(B(a,\delta)\cap X) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

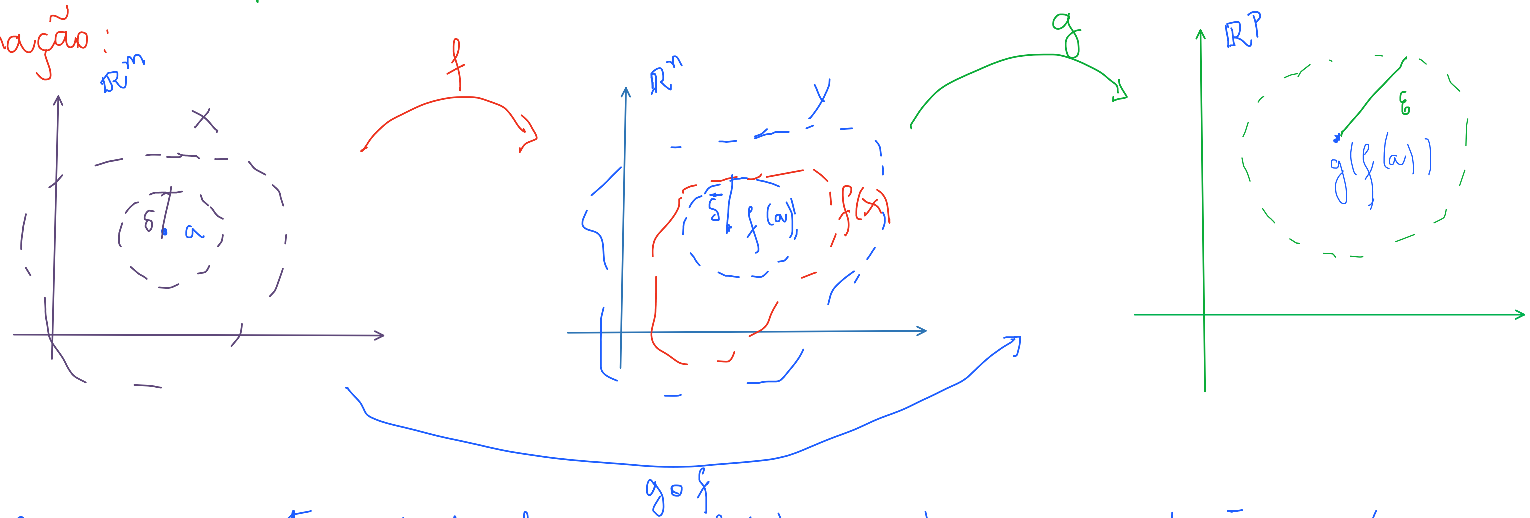
se $\|x - a\| < \delta$ e $x \in X$ então $x = a \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| = 0 < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$.

Antes de darmos alguns exemplos de aplicações contínuas, vamos estabelecer alguns resultados:

Teorema: Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}^n$ com $f(X) \subset Y$ e $g: Y \to \mathbb{R}^p$. Se f é contínua no ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto $f(a)$ então $g \circ f: X \to \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a.

(composta de duas aplicações contínuas é contínua)

Demonstração:



Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade da g em $f(a)$ garante que existe $\bar{\delta} > 0$ /

$y \in Y$ e $\|y - f(a)\| < \bar{\delta} \Rightarrow \|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon$.

Para este $\tilde{\delta} > 0$, a continuidade da f em a garante que existe $\delta > 0$ /

$x \in X$ e $\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \tilde{\delta}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, considere $\delta = \delta(\tilde{\delta})$ com $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon)$ /

se $x \in X$ e $\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| g(f(x)) - f(a) \| < \varepsilon$.