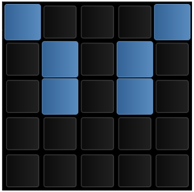
SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-3 – Lights off (sistemas lineares)

Prof. Miguel Frasson

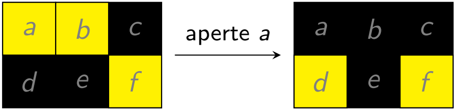
Abril de 2021

jogo *Lights off*

- O tabulairo do jogo é tipicamente 5×5.



- Ao apertar um botão, troca-se o estado do botão e de seus vizinhos acima, abaixo, à esquerda e à direita.



- O objetivo é apagar todas as luzes.

Lights off

- O jogo *Lights off* pode ser resolvido com sistemas lineares, com números em $\mathbb{Z}^2 = \{0, 1\}$.
- O jogo (e uma explicação) está em `https://www.icmc.usp.br/~frasson/ALED/games/luzes.html`
- Tem versões para desktop e celulares.
- Requisitos:
  - sistemas lineares por escalonamento
  - corpo $\mathbb{Z}^2 = \{0, 1\}$ (vamos ensinar agora)

O corpo $\mathbb{Z}^2$

- Precisamos modelar o ligar e desligar de luzes com uma ferramenta fácil
- podemos associar
  - $0 =$ desligado
  - $1 =$ ligado
- O conjunto $\mathbb{Z}^2 = \{0, 1\}$ faz exatamente o que queremos.
- Em $\mathbb{Z}^2$, somar 1 troca o estado!
  - $0 + 1 = 1$
  - $1 + 1 = 0$

O corpo $\mathbb{Z}^2$

- Soma e multiplicação:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- Note que "todo elemento" $\neq 0$ (sisto é, o 1) tem inverso: o inverso de 1 é 1: $1 \times 1 = 1$
- Subtrair também é fácil: $-1 = 1$
- Então $\mathbb{Z}^2$ é um corpo, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$
- e por isso podemos resolver sistemas com esses números.

Treinando operar em $\mathbb{Z}^2$

- Par $=$ zero

$$1+1+1+1+1+1 = (1+1)+(1+1)+(1+1) = 0+0+0 = 0$$

- Ímpar $=$ um

$$1+1+1+1+1 = (1+1)+(1+1)+1 = 0+0+1 = 1$$

- $A + A = 2A = 0A = 0$

Modelando o jogo

- Vamos começar com o jogo 2×3.
- Vamos dar nomes a, b, c, d, e, f aos botões

a	b	c
d	e	f

- como vamos mexer com sistemas, o estado do jogo será um vetor coluna

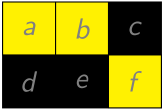
$$x = \begin{pmatrix} \text{estado de } a \\ \text{estado de } b \\ \text{estado de } c \\ \text{estado de } d \\ \text{estado de } e \\ \text{estado de } f \end{pmatrix}$$

Exemplo

O estado

$$x = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}$$

representa

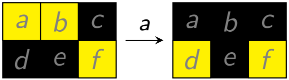


Apertando um botão

- Vimos que somar 1 troca o estado de um botão.
- Podemos modelar o aperto de um botão com a soma de um vetor com 1 nas entradas das luzes que devem trocar.
- Exemplo: ao apertar o botão a, somamos

$$\text{ação}_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{\text{inicial}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ação}_a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{\text{final}}}$$



Lights off como sistema

- Cada coluna da matriz de ações A é a ação do botão correspondente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se cada letra a, b, c, d, e, f (com valor em $\mathbb{Z}^2$) indica se o botão foi apertado e

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}^T$$

então AX é o vetor das luzes que trocam.

- Exemplo: apertar só o botão a é representado por $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $AX = \text{ação}_a$

Lights off como sistema

- O estado inicial é x_0.
- O estado final (luzes apagadas) é 0.
- As luzes que trocam é AX
- Portanto (lembre que em $\mathbb{Z}^2$, $-x = x$):

$$x_0 + AX = 0 \implies AX = -x_0 = x_0$$

- ou seja, temos o sistema linear em $\mathbb{Z}^2$: $AX = x_0$

Vamos resolver o jogo!

- Usaremos letras maiúsculas para as entradas o estado inicial x_0

$$x_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}$$

- Assim, o sistema $AX = x_0$ tem a matriz aumentada $[A|x_0]$:

$$[A|x_0] = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & A \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & C \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & E \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & F \end{array}\right)$$

Escalonando. . .

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&1&0&0&A\\
1&1&1&0&1&0&B\\
0&1&1&0&0&1&C\\
1&0&0&1&1&0&D\\
0&1&0&1&1&1&E\\
0&0&1&0&1&1&F
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&1&0&0&A\\
0&1&1&0&0&1&C\\
0&0&1&1&1&0&A+B\\
0&1&0&0&1&0&A+D\\
0&1&0&1&1&1&E\\
0&0&1&0&1&1&F
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&1&0&0&A\\
0&1&1&0&0&1&C\\
0&0&1&1&1&0&A+B\\
0&0&1&0&1&1&A+C+D\\
0&0&1&1&1&0&C+E\\
0&0&1&0&1&1&F
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&1&0&0&A\\
0&1&1&0&0&1&C\\
0&0&1&1&1&0&A+B\\
0&0&0&1&0&1&B+C+D\\
0&0&0&0&0&0&A+B+C+E\\
0&0&0&1&0&1&A+B+F
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&1&0&0&A\\
0&1&1&0&0&1&C\\
0&0&1&1&1&0&A+B\\
0&0&0&1&0&1&B+C+D\\
0&0&0&0&0&0&A+B+C+E\\
0&0&0&0&0&0&A+C+D+F
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&0&0&1&A+B+C+D\\
0&1&1&0&0&1&C\\
0&0&1&0&1&1&A+C+D\\
0&0&0&1&0&1&B+C+D\\
0&0&0&0&0&0&A+B+C+E\\
0&0&0&0&0&0&B+D+E+F
\end{array}\right)
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&1&0&0&0&1&A+B+C+D\\
0&1&0&0&1&0&A+D\\
0&0&1&0&1&1&A+C+D\\
0&0&0&1&0&1&B+C+D\\
0&0&0&0&0&0&A+B+C+E\\
0&0&0&0&0&0&B+D+E+F
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1&0&0&0&1&1&B+C\\
0&1&0&0&1&0&A+D\\
0&0&1&0&1&1&A+C+D\\
0&0&0&1&0&1&B+C+D\\
0&0&0&0&0&0&A+B+C+E\\
0&0&0&0&0&0&B+D+E+F
\end{array}\right)
$$

Conclusões para o caso 2×3

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & A \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & C \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & E \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & F \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & B+C \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & A+D \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & A+C+D \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & B+C+D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A+B+C+E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B+D+E+F \end{array}\right)$$

- Condições para sistema possível (linhas nulas):

$$A + B + C + E = 0, \qquad B + D + E + F = 0.$$

- variáveis livres: e, f (não confundir com E e F de x_0)
- variáveis calculadas:

$$a = e + f + B + C$$
$$b = e + A + D$$
$$c = e + f + A + C + D$$
$$d = f + B + C + D$$

Podemos fazer o mesmo outros casos

- As mesmas ideias podem ser usadas para outros casos, como 3×3 e o clássico 5×5
- No caso 3×3 são 9 variáveis: $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

- No caso 5×5 são 25 variáveis: $a, b, c, \ldots, w, x, y$.

Lights off, caso 3×3

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & D \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & E \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & F \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & G \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & I
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A+C+F+G+H \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E+G+H+I \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A+C+D+H+I \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C+E+F+I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B+D+E+F+H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A+D+E+G \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & A+B+F+G+I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A+B+C+E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & B+C+D+G+I
\end{array}\right)$$

O sistema 3×3 é sempre possível!

Caso 3×3, técnica "apagar acima"

- 1ª linha: $[A + C + F + G + H \quad E + G + H + I \quad A + C + D + H + I]$
- Pensando um pouco, só necessitamos resolver a primeira linha, e indo da segunda linha para baixo sempre apagando o que está aceso na linha anterior, técnica chamada "apagar acima". Eventualmente só fica a última linha com luzes acesas.
- Todas acesas de início: 1ª linha $= [1 \quad 0 \quad 1]$.

3ª linha: $\boxed{G} \boxed{H} \boxed{I}$

- Num jogo qualquer, use "apagar acima", e então use a 1ª linha: $[G + H \quad G + H + I \quad H + I]$ ou

[1º+2º   1º+2º+3º   2º+3º]

Lights off, caso 5×5

- 25 variáveis, de a até y.

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t
u	v	w	x	y

Caso 5×5, matriz aumentada

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc|ccccc|c}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&A\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&B\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&C\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&D\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&E\\
\hline
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&F\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&G\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&H\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&J\\
\hline
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&K\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&L\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&M\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&N\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&O\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&P\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&Q\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&R\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&S\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&T\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&U\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&V\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&W\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&X\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&Y
\end{array}\right)
$$

Caso 5 × 5, matriz aumentada escalonada

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc|l}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1& B+C+D+H+J+N+O+T \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& A+B+D+E+G+M+N+O+S \\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1& A+C+D+E+F+H+I+M+N+P+Q+R+S+T+V \\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& A+D+F+G+H+J+K+L+N+O+P+Q+R+T+U+X \\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1& B+C+E+F+K+M+O+R+T+U+V \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1& C+E+G+H+J+M+S+T \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& B+D+F+G+I+J+N+P+Q+R+V \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1& A+B+D+I+J+K+L+N+U+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& B+D+F+G+I+J+L+R+S+T+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1& A+B+C+D+G+H+J+L+M+N+P+Q+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& E+I+J+M+O+P+Q+R+S+V \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& B+C+D+F+H+J+K+L+N+O+P+Q+R+T+U+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& B+C+E+F+J+K+M+N+R+U+V \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& A+B+C+G+I+M+N+O+S \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0& A+B+E+H+I+J+K+N+O+P+Q+S+U \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1& B+D+F+G+I+J+L+N+U+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0& B+F+G+H+N+P+Q+S+T+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1& C+E+G+H+J+K+M+P+Q+S+T+U \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0& D+H+I+J+L+P+Q+S+T+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1& A+B+D+E+K+L+N+O+U+V+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1& D+E+H+L+M+O+P+R+T+U+V \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0& B+E+F+G+H+I+J+M+N+O+P+R+T+U+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1& D+H+I+J+L+P+Q+S+T+V \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& B+C+D+F+H+J+K+L+N+O+P+R+T+V+W+X \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0& A+B+D+E+K+L+N+O+U+V+X+Y
\end{array}\right)
$$

Caso 5 × 5, matriz aumentada escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
\cdots & 0 & 1 & B+C+D+H+J+N+O+T \\
\cdots & 1 & 0 & A+B+D+E+G+M+N+O+S \\
\cdots & 1 & 1 & A+C+D+E+F+H+I+M+N+P+Q+R+S+T+V \\
\cdots & 1 & 0 & A+D+F+G+H+J+K+L+N+O+P+Q+R+T+U+X \\
\cdots & 0 & 1 & B+C+E+F+K+M+O+R+T+U+V \\
\cdots & 1 & 1 & C+E+G+H+J+M+S+T \\
\cdots & 0 & 0 & B+D+F+G+I+J+N+P+Q+R+V \\
\cdots & 1 & 1 & A+B+D+I+J+K+L+N+U+V+X \\
\cdots & 0 & 0 & B+D+F+G+I+J+L+R+S+T+X \\
\cdots & 1 & 1 & A+B+C+D+G+H+J+L+M+N+P+Q+V+X \\
\cdots & 1 & 0 & E+I+J+M+O+P+Q+R+S+V \\
\cdots & 1 & 0 & B+C+D+F+H+J+K+L+N+O+P+Q+R+T+U+X \\
\cdots & 0 & 0 & B+C+E+F+J+K+M+N+R+U+V \\
\cdots & 1 & 0 & A+B+C+G+I+M+N+O+S \\
\cdots & 1 & 0 & A+B+E+H+I+J+K+N+O+P+Q+S+U \\
\cdots & 1 & 1 & B+D+F+G+I+J+L+N+U+V+X \\
\cdots & 0 & 0 & B+F+G+H+N+P+Q+S+T+V+X \\
\cdots & 1 & 1 & C+E+G+H+J+K+M+P+Q+S+T+U \\
\cdots & 0 & 0 & D+H+I+J+L+P+Q+S+T+V+X \\
\cdots & 1 & 1 & A+B+D+E+K+L+N+O+U+V+X \\
\cdots & 0 & 1 & D+E+H+L+M+O+P+R+T+U+V \\
\cdots & 1 & 0 & B+E+F+G+H+I+J+M+N+O+P+R+T+U+X \\
\cdots & 1 & 1 & D+H+I+J+L+P+Q+S+T+V \\
\cdots & 0 & 0 & B+C+D+F+H+J+K+L+N+O+P+R+T+V+W+X \\
\cdots & 0 & 0 & A+B+D+E+K+L+N+O+U+V+X+Y
\end{array}\right)$$

Caso 5×5, técnica "apagar acima"

- 1ª linha:

$$
\begin{aligned}
a &= y+B+C+D+H+J+N+O+T \\
b &= x+A+B+D+E+G+M+N+O+S \\
c &= x+y+A+C+D+E+F+H+I+M+N+P+Q+R+S+T+V \\
d &= x+A+D+F+G+H+J+K+L+N+O+P+Q+R+T+U+X \\
e &= y+B+C+E+F+K+M+O+R+T+U+V
\end{aligned}
$$

- Usando "apagar acima", $A = B = \cdots = T = 0$.

5ª linha: $\boxed{U}\boxed{V}\boxed{W}\boxed{X}\boxed{Y}$

- A 1ª linha fica

$$[y, \quad x, \quad x+y+V, \quad x+U+X, \quad y+U+V]$$

- Há muitos U acima. Para facilitar, vamos fazer $x = y = U$.
  A 1ª linha: $[U \quad U \quad V \quad X \quad V]$ ou $[1^{\text{o}} \quad 1^{\text{o}} \quad 2^{\text{o}} \quad 4^{\text{o}} \quad 2^{\text{o}}]$