

ZAB0461 - Cálculo IV

15ª Lista de Exercícios

1) Resolva a equação diferencial e encontre a solução do problema de condução de calor

$$100 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \text{sen } 2\pi x - \text{sen } 5\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

2) Resolva a equação diferencial e encontre a solução do problema de condução de calor

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 2\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) - \text{sen } \pi x + 4\text{sen} 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Considere a condução de calor em uma barra com 40 cm cujas extremidades são mantidas a temperatura de 0 °C para todo $t > 0$. Em cada um dos problemas a seguir, encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ se a distribuição de temperatura inicial da barra é a função dada. Suponha $\alpha^2 = 1$.

3) $u(x,0) = 50, \quad 0 \leq x < 40$

4) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ 50, & 10 \leq x \leq 30 \\ 0, & 30 < x \leq 40 \end{cases}$

Em cada um dos problemas a seguir, encontre a solução do estado estacionário da equação de calor que satisfaz o conjunto de condições de contorno.

5) $u(0,t) = 10, \quad u(50,t) = 40$

6) $u(0,t) = 30, \quad u(40,t) = -20$

7) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$

8) $u(0,t) = T, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + u(L,t) = 0$

9) Considere uma barra de alumínio, com 20 cm de comprimento, inicialmente a uma temperatura uniforme de 25 °C. Suponha que no instante $t = 0$ s a extremidade $x = 0$ cm é esfriada a 0 °C, enquanto a extremidade $x = 20$ cm é aquecida a 60 °C, e ambas são mantidas, daí para frente, a essas temperaturas. Escreva e resolva a equação de calor. Encontre a temperatura em função da posição e do tempo. Faça o gráfico de u em função de x para $t = 0$, $t \rightarrow \infty$, e para um valor qualquer de t .

10) (a) Suponha que as extremidades de uma barra de cobre, com 100 cm de comprimento são mantidas a 0 °C. Suponha que o centro é aquecido a 100 °C por uma fonte externa de calor e que esta situação é mantida até resultar em um estado estacionário. Encontre a distribuição de temperatura no estado estacionário. (b) Em um instante $t = 0$, depois de atingido o estado estacionário, suponha que a fonte externa é removida. No mesmo instante suponha que a extremidade $x = 0$ cm, é colocada em contato com um reservatório a 20 °C, enquanto que a outra extremidade permanece a 0 °C. Escreva e resolva a equação de calor. Encontre a temperatura em função da posição e do tempo. Faça o gráfico de u em função de x para $t = 0$ s, $t \rightarrow \infty$, e para um valor qualquer de t .

11) Considere uma barra com 30 cm de comprimento para a qual $\alpha^2 = 1$. Suponha que a distribuição inicial de temperatura é dada por $u(x,0) = x(60 - x)/30$ e que as condições de contorno são $u(0,t) = 30$ e $u(30,t) = 0$. Escreva e resolva a equação de calor. Encontre a distribuição de temperatura na barra em função da posição e do tempo. Faça o gráfico de u em função de x para $t = 0$ s, $t \rightarrow \infty$, e para um valor qualquer de t .