ZAB0461 - Cálculo IV

10ª Lista de Exercícios

Em cada um dos problemas a seguir, encontre a solução do problema de valor inicial e esboce o gráfico da solução e do termo não homogêneo; explique a relação entre eles.

1) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$ $\quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi \text{ e } t \ge 2\pi \end{cases}$

2) $y'' + 4y = \text{sen}t + u_\pi(t)\,\text{sen}(t - \pi)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$

3) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$ $\quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$

4) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$

5) $y'' + y = u_{3\pi}(t)$ $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$

6) $y'' + y = g(t)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$ $\quad f(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \le t < 6 \\ 3, & t \ge 6 \end{cases}$

7) $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t)$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$ $\quad y''(0) = 0$, $\quad y'''(0) = 0$

8) Considere o problema de valor inicial: $\quad y'' + \frac{1}{3}y' + 4y = f_k(t)$

$y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$ $\quad f_k(t) = \begin{cases} 1/2k, & 4 - k \le t < 4 + k \\ 0, & 0 \le t < 4 - k \quad e \quad t \ge 4 + k \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de $f_k(t)$. Note que a área sob o gráfico é independente de k. Se $f_k(t)$ representa uma força, isso significa que o produto do módulo da força e do intervalo de tempo durante o qual ela age não depende de k.

b) Escreva $f_k(t)$ em termos da função degrau unitário e depois resolva o problema de valor inicial dado.

c) Desenhe o gráfico da solução para k = 2, k = 1 e k = 1/2. Descreva a solução dependente de k.

9) Batimento e Ressonância – Considere o problema de valor inicial:

$$y'' + y = f(t) \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\, u_{k\pi}(t)$$

a) Desenhe o gráfico de $f(t)$ em um intervalo $0 \le t \le 6\pi$

b) Encontre a solução do problema de valor inicial.

c) Seja $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique porque ela se comporta dessa maneira.

d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?