3ª Lista – GA (LOB1036) – Profa. Paula

1. Determine a equação de uma elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $(2,1)$ e cuja excentricidade é $\frac{2}{3}$. Existem quantas elipses que satisfazem essa condição? Justifique.

2. O segmento de reta que une dois pontos de uma cônica (parábola, elipse ou hipérbole), passa pelo foco e é ortogonal ao eixo é chamado *de Latus rectum*.

   a) Se uma elipse tem equação $4x^2 + 9y^2 = 36$, determine o comprimento do *Latus rectum*.

   b) Se a elipse tem eixo maior de comprimento $2a$ e eixo menor de comprimento $2b$, prove que o comprimento do *Latus rectum* é $2\frac{b^2}{a}$.

   c) Se a distância entre os vértices de uma hipérbole é $2a$, prove que o tamanho do *Latus rectum* é $2\frac{b^2}{a}$.

   d) Se o *latus rectum* de uma parábola tem comprimento 12, seu eixo está em Oy e o foco é (0,4), determine a equação da parábola.

3. Determine a equação da parábola cujo eixo de simetria é paralelo a Oy e que passa pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(3,6)$.

4. Sabe-se que a equação $x^2 + 2x - y + 1 = 0$ representa uma parábola no plano Oxy.

   a) Calcule a distância do foco até o vértice.

   b) Na equação $x^2 + ax + by + c = 0$, qual a distância do foco até o vértice?

5. Determine o lugar geométrico que representa cada uma das equações, seus elementos e esboce o gráfico:

   a) $9x^2 + 9y^2 + 18x - 36y = 4$.

   b) $25x^2 - 16y^2 = 400$.

   c) $9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y = 55$.

   d) $9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y = -89$.

   e) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 13 = 0$.

   f) $3x - 2y^2 + 4y = 4$.

   g) $x^2 - 2\pi x + 4y^2 - 4\sqrt{2}y + 2 = -\pi^2$.

   h) $xy + 2 = 0$.

   i) $xy - 2x + y = 4$.

j) $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0.$

k) $xy - x + 2y - 10 = 0.$

l) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x - 3y \pm 2 = 0.$

m) $\sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0.$

n) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0.$

o) $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5.$

p) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1.$

q) $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72.$

r) $13x^2 + 13y^2 + 10xy - 36x - 36y = 36.$

6. Mostre que as eqs. paramétricas da parábola são:

a) $\begin{cases} x = 4ptgt \\ y = -4ptg^2t \end{cases}$ se o eixo está sobre Oy e a concavidade é negativa.

b) $\begin{cases} x = 4ptg^2t \\ y = 4ptgt \end{cases}$ se o eixo está sobre Ox e a concavidade é positiva.

c) $\begin{cases} x = -4ptg^2t \\ y = 4ptgt \end{cases}$ se o eixo está sobre Ox e a concavidade é negativa.

7. Mostre que as eqs. paramétricas da elipse são $\begin{cases} x = bcost \\ y = asent \end{cases}$ se o eixo maior está sobre Oy.

8. Mostre que as eqs. paramétricas da hipérbole são $\begin{cases} x = btgt \\ y = asect \end{cases}$ se o eixo real está sobre Oy.

9. Os exercícios a seguir fornecem equações paramétricas e intervalos do parâmetro para o movimento de uma partícula no plano Oxy. Identifique a trajetória da partícula e encontre sua equação cartesiana. Represente o gráfico em coordenadas cartesianas e indique a parte do gráfico percorrida pelo movimento e o sentido do movimento.

a) $x = cos2t, y = sen2t, 0 \leq t \leq \pi$

b) $x = 4cost, y = 2sent, 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = sec^2t - 1, y = tgt, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

d) $x = -cosht, y = senht, -\infty \leq t \leq \infty$

10. Encontre equações paramétricas e um intervalo do parâmetro para o movimento de uma partícula que parte em $(a, 0)$ e traça a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Uma vez em sentido anti-horário.

b) Uma vez em sentido horário.

c) Duas vezes em sentido anti-horário.

d) Duas vezes em sentido horário.

11. Encontre as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos, expressos em coordenadas polares:

a) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

c) $\left(5, tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

d) $\left(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

12. Encontre as coordenadas polares dos seguintes pontos, expressos em coordenadas cartesianas:

a) $(-2, -2)$.

b) $(-1, \sqrt{3})$.

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

d) $(-3,4)$.

13. Represente graficamente no plano $r\theta$ as equações polares a seguir. Encontre suas respectivas equações cartesianas:

a) $rsen\theta = 0$.

b) $r^2 = 1$.

c) $r = 2cos\theta + 2sen\theta$.

d) $r = cotg\theta + cossec\theta$.

14. Represente graficamente no plano $r\theta$ as equações polares a seguir. Encontre suas respectivas equações cartesianas e identifique a simetria:

a) $r = 1 - sen\theta$.

b) $r = \frac{1}{2} + sen\theta$.

c) $r = cos2\theta$.

d) $r = -1 + cos\theta$.

15. Encontre uma equação polar e esboce o gráfico no plano coordenado de cada círculo abaixo:

a) $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

b) $x^2 + y^2 + y = 0$.

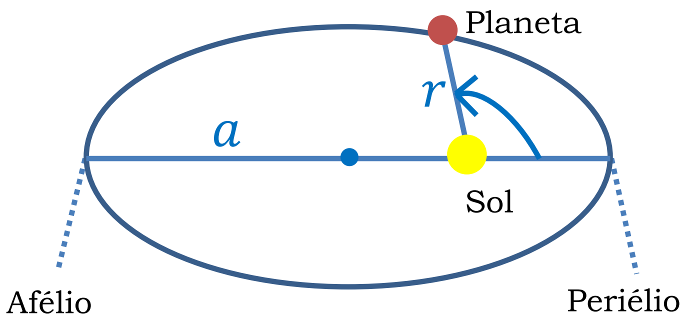
16. Represente graficamente no plano $r\theta$ as equações polares das cônicas a seguir. Classifique-as e encontre suas respectivas equações cartesianas:

a) $r = \frac{8}{4+cos\theta}$.

b) $r = \frac{1}{1-sen\theta}$.

c) $r = \frac{1}{1+2sen\theta}$.

17. Um planeta dá uma volta em torno do Sol em uma elipse cujo semieixo maior tem comprimento a e excentricidade e. Mostre que $r = a(1-e)$ quando o planeta está mais próximo do Sol (periélio) e que $r = a(1+e)$ quando o planeta está mais distante do Sol (afélio).



18. Identificar e construir o gráfico das quádricas representadas pelas equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$.

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$.

d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$.

e) $4x^2 + 9y^2 - 36z = 0$.

f) $4x^2 - y^2 - z = 0$.

19. Identifique e represente graficamente as seguintes superfícies cilíndricas:

a) $y = 4 - x^2$.

b) $9x^2 + 4z^2 - 36 = 0.$

c) $x^2 + 4y^2 = 16.$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$

e) $y^2 + z^2 - 9 = 0.$

f) $z^2 = 4y.$

g) $z = y^2 + 2.$

RESPOSTAS

1) $\frac{x^2}{\frac{29}{5}} + \frac{y^2}{\frac{29}{9}} = 1 \rightarrow 5x^2 + 9y^2 = 29$ (elipse com eixo maior em Ox)

$\frac{x^2}{\frac{41}{9}} + \frac{y^2}{\frac{41}{5}} = 1 \rightarrow 9x^2 + 5y^2 = 41$ (elipse com eixo maior em Oy)

2) a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{2b^2}{a}$

c)

d) $x^2 = 12\,(y - 1)$ ou $x^2 = -12\,(y - 7)$

3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)$

4) a) $\frac{1}{4}$

b) $\delta(V, F) = \frac{b}{4}, (p < 0)$

5) a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{49}{9}$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

c) $9x'^2 = 16y'^2, O'(-1, -2)$: 2 retas concorrentes

d) $-\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

e) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 23$

f) $(y - 1)^2 = \frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)$

g) Vazio

h) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, com\ rotação\ de\ 45°.$

i) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1, com\ origem\ do\ sistema\ transladado\ em: (-1, 2)\ e\ rotação\ de\ 45°.$

j) $x^2 = y, com\ rotação\ de\ 45°.$

k) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1, com\ origem\ do\ sistema\ transladado\ em: (-2,1)\ e\ rotação\ de\ 45°.$

l) Para F= 2: Vazio

Para F = -2: Duas retas paralelas: $\left(\sqrt{13}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, com\ rotação\ de\ 56°.$

m) $\frac{(\sqrt{12} + \sqrt{3})x^2}{2} + \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{12})y^2}{2} = 1, com\ rotação\ de\ 60°.$

n) $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}\left(y + \frac{4}{9}\right), com\ rotação\ de\ 37°.$

o) $\frac{x^2}{\frac{10}{21}} + \frac{y^2}{\frac{10}{15}} = 1, com\ rotação\ de\ 45°.$

p) $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=\frac{9}{\sqrt{5}}\left(y+\frac{6}{5}\right), com\ rotação\ de\ 27°.$

q) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, com\ rotação\ de\ 45°.$

r) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, com\ origem\ do\ sistema\ translado\ em: (1,1) e\ rotação\ de\ 45°.$

9) a) $x^2+y^2=1$, sentido anti-horário

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, sentido anti-horário.

c) $y^2=x$, sentido horário

d) $x^2-y^2=1$, sentido horário

10) a) $x=acost\ e\ y=bsent\ 0\ \ 0\le t\le 2\pi$

b) $x=acost\ e\ y=bsent\ 2\pi\le t\le 0$

c) $x=acost\ e\ y=bsent\ 0\le t\le 4\pi$

d) $x=acost\ e\ y=bsent\ 4\pi\le t\le 0$

11) a) $(1,1)$

b) $(-1,-1)$

c) $(3,4)$

d) $(\sqrt{3},3)$

12) Um ponto em coordenada cartesiana apresenta infinitas representações em coordenadas polares:

a) $(-2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$

b) $(2,\frac{2\pi}{3})$

c) $(1,\frac{\pi}{3})$

d) $(5,sen^{-1}\frac{4}{5})$

13) a) $y=0$

b) $x^2+y^2=1$

c) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

d)

14) a) $x^4-x^2+2x^2y^2+y^4+2y^3+x^2y+yx^2=0$, com simetria em Oy.

b) $4x^4+4y^4-8y^3-x^2-y^2+8x^2y^2-8x^2y+4y^2=0$, com simetria em Oy.

c) $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6-x^4-y^4+2x^2y^2=0$, com simetria em Ox.

d) $-2x^3+2x^2y^2-y^2+x^4-2xy^2+y^4=0$, com simetria em Ox.

15) a) $r=-2cos\theta$

b) $r=-sen\theta$

16) a) $15x^2+16y^2+16x-64=0$

b) $x^2-2y-1=0$

c) $x^2-3y^2+4y-1=0$

18) a) Elipsóide centrado.

b) Elipsóide centrado.

c) Hiperbolóide de uma folha, centrado e que cresce ao longo de Oy..

d) Hiperbolóide de duas folhas, centrado e com Ox e Oy vazios.

e) Parabolóide elíptico, não centrado e que cresce ao longo de Oz.

f) Parabolóide hiperbólico, não centrado.

19) a) Superfície cilíndrica (diretriz: parábola, geratriz: reta paralela à Oz).

b) Superfície cilíndrica (diretriz: elipse, geratriz: reta paralela à Oy).

c) Superfície cilíndrica (diretriz: elipse, geratriz: reta paralela à Oz).

d) Superfície cilíndrica (diretriz: hipérbole, geratriz: reta paralela à Oz).

e) Superfície cilíndrica (diretriz: circunferência, geratriz: reta paralela à Ox).

f) Superfície cilíndrica (diretriz: parábola, geratriz: reta paralela à Ox).

g) Superfície cilíndrica (diretriz: parábola, geratriz: reta paralela à Oy).