PTC 2640 - Modelos Probabilísticos - 2^a Lista 2019

1^a Questão: Suponha que a probabilidade de chover ou não chover hoje depende das condições meteorológicas anteriores através dos dois últimos dias. Especificamente, suponha que se choveu nos últimos dois dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,8; se choveu hoje, mas não ontem, então choverá amanhã com probabilidade 0,6; se choveu ontem mas não hoje, então choverá amanhã com probabilidade 0,4; se não choveu nos dois últimos dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,3.

a) Dado que não choveu na 2a feira mas choveu na 3a feira, qual é a probabilidade de chover no sábado?

b) Qual é a proporção de dias que chove?

2^a Questão: Suponha que bolas sejam distribuídas sucessivamente entre 8 urnas, com cada bola tendo a mesma probabilidade de ser colocada em qualquer uma dessas urnas. Qual é a probabilidade de se ter exatamente 3 urnas não vazias depois de 9 bolas terem sido distribuídas?

3^a Questão: Um problema de interesse para os sociólogos é determinar a proporção de pessoas em uma sociedade que tem uma ocupação de classe alta, média, ou baixa. Um possível modelo matemático seria assumir que as transições entre classes sociais das gerações sucessivas em uma família pode ser considerado como transições de uma cadeia de Markov. Vamos supor que tal modelo é apropriado e que a matriz de probabilidade de transição é dada por (estado 1 - alta, estado 2 - média, estado 3 - baixa):

$$P = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Determine a long prazo o percentual de pessoas em cada uma das 3 classes.

4^a Questão: Toda vez que um time vence um jogo, esse time ganha seu próximo jogo com probabilidade de 0,8; toda vez que perde um jogo, ganha seu próximo jogo com probabilidade de 0,3. Se a equipe ganha um jogo, então os jogadores saem para jantar juntos com probabilidade 0.7, enquanto se a equipe perde, os jogadores jantam juntos com probabilidade 0.2. Qual é proporção de jogos que vai resultar em um jantar em equipe?

5^a Questão: Um professor aplica continuamente três tipos de exames para seus alunos. A classe é classificada como tendo feito bem ou mal um exame, sendo p_i a probabilidade da turma se sair bem em um exame do tipo i. Suponha que $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,6$ e $p_3 = 0,9$. Se a turma se sair bem em um exame, então o próximo exame é igualmente provável que seja qualquer um dos três tipos. Se a classe vai mal, então o próximo exame é sempre do tipo 1. A longo prazo qual é a proporção de vezes que o exame do tipo i é aplicado, $i = 1, 2, 3$?

6^a Questão: Suponha que X seja uma variável de Poisson com média λ. Suponha também que λ seja uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 1. Determine $P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, ...$

7^a Questão: Três bolas brancas e três bolas pretas são colocadas em 2 urnas de modo que cada urna sempre contém três bolas. A cada rodada uma bola é sorteada de cada urna, e a bola da urna 1 e colocada na urna 2, e a bola da urna 2 é colocada na urna 1.

a) Modele o problema como uma cadeia de Markov $\{X_k; k = 0, 1, ...\}$, especificando os estados e o significado de X_k.

b) Dado que inicialmente urna 1 contém 3 bolas brancas, determine a probabilidade de se ter pelo menos 2 bolas brancas na urna 1 após 6 rodadas.

c) No limite quando k tende a infinito, determine a probabilidade de se ter n bolas brancas na urna 1, $n = 0, 1, 2, 3$.

8^a Questão: Seja a matriz de transição P dada por

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Obtenha uma fórmula para P^n. Determine $lim_{n\to\infty} P^n$.

9^a Questão: Moeda 1 tem probabilidade $0,7$ de sair cara, e moeda 2 tem probabilidade $0,6$ de sair cara. Se a moeda jogada hoje der cara, então escolhe-se a moeda 1 para ser jogada no dia seguinte, caso contrário escolhe-se a moeda 2. Se a moeda escolhida inicialmente é igualmente provável de ser a moeda 1 ou 2, qual é a probabilidade de que a moeda jogada no terceiro dia seja a moeda 1?

10^a Questão: Uma matriz de transição P é dita ser duplamente estocástica se $\sum_i p_{ij} = 1$ para todo j. Se a cadeia é irredutível, aperiódica, e possui $M+1$ estados, mostre que as probabilidades limites são dadas por

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \ j = 0, 1, ..., M.$$

11^a Questão: Uma partícula se move em um círculo marcado pelos pontos 0, 1, 2, 3, 4 (sentido horário). Em cada instante a partícula tem probabilidade p de se mover para a direita (sentido horário) e $1-p$ para a esquerda (sentido anti-horário). Seja X_k a posição da partícula no instante k.

a) Determine a matriz de transição de probabilidades P.

b) A probabilidade da partícula estar na posição 2 no instante $k = 8$, dado que começou na posição 0 em $k = 0$. Considere $p = \frac{1}{2}$.

c) Calcule as probabilidades limites.

12^a Questão: Seja Y_n o resultado da soma de n dados independentes. Determine

$$lim_{n\to\infty} P(Y_n \text{ é múltiplo de 13}).$$

13^a Questão: Considere o problema da ruína do jogador com $N = 4$. Seja P_i a probabilidade do jogador sair vencedor quando começa com i e M_i o número esperado de jogadas até o jogo terminar, com o jogador quebrando ou ganhando 4. Calcule P_i e M_i para $i = 1, 2, 3$. Considere $p = \frac{1}{4}$.

14^a Questão: Considere uma agência de correio com 2 servidores. Três pessoas, A, B, C, entram simultaneamente na agência. A e B vão diretamente para os servidores, e C fica esperando até que A ou B termine o serviço. Qual é a probabilidade de A ainda estar sendo servido depois de B e C terem partido nas seguintes condições:

a) o tempo de serviço de cada servidor é exatamente 10 minutos.

b) os tempos de serviço são i minutos com probabilidades $\frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

c) os tempos de serviço são exponenciais com média $\frac{1}{\mu}$.

15^a Questão: Mostre que se $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 respectivamente então $N_1(t) + N_2(t)$ também é um processo de Poisson com taxa $\lambda_1 + \lambda_2$.

16^a Questão: Para um processo de Poisson $N(t)$ com parâmetro λ, obtenha a distribuição de

$$P(N(s) = k | N(t) = n)$$

para $s < t$.

17^a Questão: Clientes chegam a um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Suponha que 2 clientes tenham chegado ao banco na primeira 1 hora. Determine a probabilidade de que

a) ambos tenham chegado nos primeiros 20 minutos.

b) pelo menos 1 tenha chegado nos primeiros 20 minutos.

18^a Questão: Uma companhia de seguros recebe pedidos semanais de pagamento de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 5$ por semana. Se a quantia paga para cada apólice de seguro é exponencialmente distribuída com média $R\$ \ 2000,00$, qual é a média e a variância da quantia paga pela companhia em 4 semanas?

19^a Questão: Máquinas em uma fábrica falham a uma taxa exponencial de 6 por hora. Um único operário é responsável pelo reparo das máquinas, a uma taxa exponencial de 8 por hora. O custo pela produção perdida é de $R\$$ $10,00$ por hora por máquina. Qual é o custo médio por hora gerado pelas máquinas fora de uso? (Assuma que a fábrica possui um número muito grande de máquinas, aproximando por infinito).

20^a Questão: Considere uma fila infinita com um único servidor. Chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson a uma taxa λ. O tempo de cada serviço é uma variável exponencial com parâmetro μ. Sempre que um serviço é concluído o cliente pode retornar ao fim da fila com probabilidade $1-\alpha$ (portanto um cliente pode ser servido mais de uma vez).

a) Escreva as equações de balanço e resolva-as para obter as probabilidades estacionárias P_n, $n = 0, 1, ...$ Estabeleça a condição de equilíbrio para a fila.

b) Obtenha o tempo de espera médio de um cliente entre a sua chegada até a 1^a vez que é atendido.

c) Qual é a probabilidade de que um cliente seja atendido exatamente n vezes?

d) Qual é o tempo médio que um cliente gasta em serviço (não inclua o tempo na fila)?

21^a Questão: Uma pequena barbearia, operada por um único barbeiro, tem espaço para no máximo 2 clientes. Clientes em potencial chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa de 3 clientes por hora. O tempo de serviço para cada cliente é uma variável exponencial com média igual a 15 minutos. Determine:

a) o número médio de clientes na barbearia.

b) a proporção de clientes em potencial que entra na barbearia.

c) o tempo médio gasto na barbearia por um cliente que entra.

d) se o barbeiro pudesse trabalhar 2 vezes mais rápido, quantos clientes a mais ele poderia atender?

22^a Questão: Clientes em potencial chegam a um posto de gasolina de acordo com um processo de Poisson com taxa de 20 carros por hora. O posto tem espaço para no máximo 3 carros. O tempo médio de atendimento é exponencialmente distribuído com média de 5 minutos. Determine:

a) a proporção do tempo que o servidor ficará ocupado.

b) a proporção de clientes em potencial que é perdida.

c) o tempo médio gasto no sistema por um cliente que entra.

d) o tempo médio gasto na fila por um cliente que entra.

23^a Questão: Clientes em potencial chegam a uma loja de acordo com um processo de Poisson com taxa de 40 clientes por hora. A loja tem espaço para, no máximo, 4 clientes. Enquanto o total de clientes na loja é menor ou igual a 2 apenas um funcionário atende os clientes. O tempo de serviço desse funcionário é uma variável exponencial com média de 2 minutos. Quando a loja possui 3 ou 4 clientes, um assistente auxilia o trabalho do funcionário de modo a reduzir o tempo esperado de serviço para 1 minuto. Determine:

a) a proporção do tempo que os servidores estão livres.

b) o pagamento que cada servidor deverá receber se o total a ser pago é de R$ $100,00$, e cada servidor receberá de acordo com o tempo efetivamente trabalhado.

24^a Questão: Uma fábrica possui 3 máquinas e 2 estações de reparo. O tempo até falha de cada máquina possui distribuição exponencial com média de 10 horas. Cada estação de reparo leva um tempo exponencial para reparar uma máquina defeituosa, com média de 8 horas. Determine:

a) o número médio de máquinas fora de uso.

b) a proporção do tempo que as 2 estações de reparo estão ocupadas.

c) a proporção do tempo que cada máquina fica fora de uso.

25^a Questão: Considere um sistema de serviço sequêncial com 2 servidores, A e B. Um cliente que chega só entra se o servidor A estiver livre e, nesse caso, é imediatamente servido por este servidor. Quando o serviço do servidor A é concluído, ele segue para o servidor B caso este esteja livre. Se o servidor B estiver ocupado, o cliente vai embora imediatamente. Considerando que clientes em potencial chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa de 2 por hora, e que o tempo de serviço dos servidores A e B são variáveis exponenciais com média de 15 minutos e 30 minutos respectivamente, determine:

a) a proporção de clientes que entra no sistema.

b) a proporção de clientes que entra e recebe o serviço do servidor B.

c) o número médio de clientes no sistema.

d) o tempo médio gasto no sistema por um cliente que entra.

26^a Questão: Clientes chegam a uma fila ilimitada de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Dois servidores A e B atuam em paralelo, cada um com um tempo de serviço exponencialmente distribuído com taxas μ_A e μ_B respectivamente. Quando o sistema está vazio, o cliente que chega se dirige ao servidor A com probabilidade α, ou ao servidor B com probabilidade $1 - \alpha$. Nas outras situações o cliente na ponta da fila se dirige ao primeiro servidor livre.

a) Apresente o diagrama de Markov deste modelo, e equacione as equações de balanço.

b) Escreva em função de P_n o número médio de clientes no sistema, e o número médio de servidores ociosos.

c) Escreva em função de P_n a probabilidade de um cliente ser atendido pelo servidor A.

27^a Questão: Considere um equipamento que pode estar em 2 estados, em operação ou em reparo. A taxa exponencial de falhas é λ, e a taxa exponencial de reparos é μ. Utilizando as equações de avanço determine a probabilidade do equipamento estar em operação no instante t dado que inicialmente o equipamento está em operação.

28^a Questão: Considere 2 máquinas, cada uma com taxa exponencial de falha λ. Um único servidor repara as máquinas em caso de falhas, com um tempo exponencialmente distribuído com média $\frac{1}{\mu}$. Determine a probabilidade dos 2 equipamentos estarem em operação no instante t dado que inicialmente os 2 equipamentos estão em operação.