Exercício 4 (Splines)

Enunciado: Consideramos a função

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x & \text{se } x \in [-1,0] \\ a(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

Determine os valores de α, β, a, c, d de modo que $s(x)$ seja um spline cúbico, e satisfaz também $s'(-1)=0$ e $s'(1)=0$. O spline obtido é um spline natural?

Solução: Vamos usar a notação:

$$s_1(x) = \alpha x^3 + \beta x \qquad s_2(x) = a(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + c(x-1) + d.$$

- Primeiro usaremos as condições $s'(-1)=0$ e $s'(1)=0$.

$$s'(1) = 0 \Leftrightarrow s_2'(1) = 0 \Leftrightarrow \left[3a(x-1)^2 + 6(x-1) + c\right]\Big|_{x=1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = 0}$$

$$s'(-1) = 0 \Leftrightarrow s_1'(-1) = 0 \Leftrightarrow \left[3\alpha x^2 + \beta\right]\Big|_{x=-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta = -3\alpha}$$

- Agora vamos usar a condição de regularidade $s \in C^2([-1,1])$, pois s é um spline cúbico. Então têm 3 condições a satisfazer:

$$\begin{cases} s_1(0) = s_2(0) \\ s_1'(0) = s_2'(0) \\ s_1''(0) = s_2''(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + 3 - c + d \\ \left[3\alpha x^2 + \beta\right]\big|_{x=0} = \left[3a(x-1)^2 + 6(x-1) + c\right]\big|_{x=0} \\ \left[6\alpha x\right]\big|_{x=0} = \left[6a(x-1) + 6\right]\big|_{x=0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+3-c+d=0 \\ \beta = 3a-6+c \\ 0 = -6a+6 \end{cases}$$

Vamos usar $c=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a-3 \\ \beta = 3a-6 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} d=-2 \\ \beta=-3 \\ a=1 \end{cases}}$$

- Finalmente, usando $\beta = -3\alpha$, obtemos $\alpha = 1$
- Então obtemos $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $a = 1$, $c = 0$, $d = -2$

e $$s(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{para } x \in [-1,0] \\ (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2 & \text{para } x \in [0,1] \end{cases}$$

- Podemos fazer algumas verificações rapidas, por exemplo:

$$s'(1) = \left[3(x-1)^2 + 6(x-1)\right]\Big|_{x=1} = 0 \quad \text{ok}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1'(0) &= \left[3x^2-3\right]\Big|_{x=0} = -3 \\ s_2'(0) &= \left[3(x-1)^2+6(x-1)\right]\Big|_{x=0} = -3 \end{aligned}\right\} \text{ok}$$

- O spline $s(x)$ é natural?

Temos $$s''(x) = \begin{cases} 6x & \text{em } [-1,0] \\ 6(x-1)+6 & \text{em } [0,1] \end{cases}$$

Calculamos $s''(-1) = -6 \neq 0$, então $s(x)$ não é um spline cúbico natural.