Lista 1: Revisão

Álgebra Linear

1) Estude a demonstração do **Teorema do Núcleo e da Imagem**: se V, W são espaços vetoriais, $\dim V < \infty$ e $T\colon V \to W$ é uma transformação linear, então

$$\dim \ker T + \dim T(V) = \dim V$$

2) Sejam V, W subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

(i) para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existem $x^{(1)} \in V, x^{(2)} \in W$ tais que $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ (i.e., $\mathbb{R}^n = V + W$);

(ii) $V \cap W = \{0\}$.

(Dizemos que $\mathbb{R}^n$ é *soma direta* de V e W, e escrevemos $\mathbb{R}^n = V \oplus W$). Se $\dim V = m$ e $\dim W = r$, prove que $n = m + r$ e que existe uma transformação linear bijetora $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(V) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^r = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^m$$
$$T(W) = \{0\}^m \times \mathbb{R}^r = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 = \cdots = x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^r$$

Isto é, a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ é, de certa forma, linearmente equivalente à decomposição canônica $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^r$. (Esse resultado é importante para a demonstração do Teorema da Função Implícita).

Topologia do $\mathbb{R}^n$

3) Bartle, Cap. II, Exs. 8.K, 8.M, 8.N, 8.O.

4) Bartle, Cap. II, Exs. 9.K, 9.L.

Funções Contínuas

5) Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $y \in X$ e $||x - y|| < \delta$, então $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$. Se f é contínua em todo $x \in X$, dizemos que f é contínua.

Mostre que são equivalentes:

(1) f é contínua;

(2) Para cada $x \in X$, se V é uma vizinhança aberta de $f(x)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta) \cap X) \subset V$;

(3) Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então existe $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto tal que $f^{-1}(V) = U \cap X$.

Desafios

6) Prove que não existe função bijetora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ n > 1$, tal que f e f^{-1} sejam contínuas (dica: use que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo).

7) (i) Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Prove que, se $X \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e $x_2 \in K$ para todo $x = (x_1, x_2) \in X$, então

$$X_1 := \{x_1 \mid \text{existe } x_2 \in K \text{ tal que } (x_1, x_2) \in X\} \subset \mathbb{R}$$

é fechado. Dica: para cada $t \notin X_1$, $\{t\} \times K \subset X^c$, que é aberto; usar que K é compacto (definição via coberturas abertas) para mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times K \subset X^c$.

(ii) Dê um exemplo de um conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ fechado tal que

$$F_1 := \{x_1 \mid \text{existe } x_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x_1, x_2) \in F\}$$

não é fechado. Dica: construa F tal que $F_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$.