Aula 13 - Equações Diferenciais Estocásticas - EDE

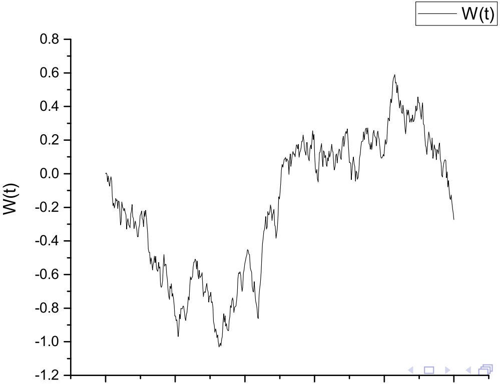
Ardson dos S. Vianna Jr.

Departamento de Engenharia Química - USP

14 de abril de 2021

Movimento browniano

- Equação de Langevin
- O modelo é resultado da aplicação da segunda lei de Newton para o pólen que se movimenta na superfície de um fluido



Gênese

A força que age sobre a partícula provem do atrito com o fluido, dado pela Equação de Stokes:

$$F \; = \; -6 \, \pi \, \mu \, D_p \, v \tag{1}$$

A força resultante na direção do movimento F_R é dada por:

$$F_R \; = \; -6 \, \pi \, \mu \, D_p \, v \; + \; \xi \tag{2}$$

onde ξ representa um ruído, que é relacionado com o processo de Wiener, dW.
Na sua forma diferencial:

$$m \frac{dv}{dt} \; = \; -6 \, \pi \, \mu \, D_p \, v \; + \; \xi \tag{3}$$

que é uma equação diferencial estocástica (EDE),

Solução

Os fundamentos da solução nos métodos numéricos.
Contudo, é necessário resolver o termo do ruído branco ξ apresentado na Equação de Langevin 3.

$$\begin{cases} d\vec{X} \;=\; \vec{b}(\vec{X})dt \;+\; \vec{B}(\vec{X},t)\,\vec{\xi} \\ \vec{X}(0) = \vec{X}_0 \end{cases} \tag{4}$$

Integração

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \int_0^t \vec{b}(\vec{X}(s))ds + \int_0^t \vec{B}(\vec{X},t)\, d\vec{W} \qquad (5)$$

A primeira integral é já conhecida de processos de integração convencionais determinísticos. A novidade está na segunda integral: como definir W, o processo de Wiener? como integrá-lo?

Processo de Wiener

O processo de Wiener unidimensional W: $[0, \infty)x\ \Omega \ \rightarrow \mathbb{R}$, também conhecido como movimento browniano, tem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} 1 - \text{ com prob. igual a 1, o map. t} \mapsto W(t) \text{ é contínuo } e\ W(0) = 0 \\ 2 - se\ \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T, \text{ então os incrementos } W(t_1 \\ 3 - \forall t > 0,\ o\ incremento\ W(t_1) - W(t_0) \text{ apresenta distribuição nor} \\ \text{com média zero e variância igual a t-s} \\ 4 - \text{as trajetórias } amostrais\ W^W : [0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ são funções contínuas } \forall W \end{cases}$$

Uma propriedade de W que devemos comentar é sobre:

$$dW \simeq \sqrt{dt} \tag{6}$$

Integral de Itô

O método mais simples de integração é a aproximação de Euler, e a correspondente integração estocástica é a fórmula de Itô ou Stratonovich. Considerando uma dimensão por simplicidade, a fórmula de Itô é dada por:

$$Y_{n+1} - Y_n = b_n \, \Delta t + Y_n \, \Delta W_n \tag{7}$$

Números aleatórios

Portanto, a integração numérica tem de considerar um processo browniano bem construído, com saltos que seguem uma distribuição normal.
O método de Box-M$\ddot{u}$ller gera duas variáveis aleatórias independentes x_1 e x_2 que seguem a distribuição normal a partir de duas variáveis aleatórias uniformemente distribuídas:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{-2\ ln\ y_2}\ cos(2\pi y_1) \\ x_2 = \sqrt{-2\ ln\ y_2}\ sen(2\pi y_1) \end{cases} \tag{8}$$

Conclusões

i. Uma parte da solução nos métodos numéricos
ii. Processo de Wiener - ruído branco
iii. Integral de Itô
iv. Algoritmo de Marsaglia

Bibliografia

- T. Tomé, M.J. de Oliveira, *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*, Edusp, (2001).
- C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, 2nd ed., (1996).
- A.S. Vianna Jr., *Equações Diferenciais*, Blucher, 2021.