MAP 2220 Fundamentos de Análise Numérica

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2012 - $3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Exercício 1 Determine o número mínimo de repetições para se aproximar $\int_1^3 (x \ln x - x)\,dx$ pelo método de n-Simpsons com erro menor do que 5×10^{-4} e calcule a aproximação.

Exercício 2 Deseja-se calcular $\int_0^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ onde $b > 0$ e f é uma função suave. A singularidade do integrando pode ser eliminada com a mudança de variável $x = y^2$. Use esta mudança para aproximar $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ pelo método de Simpson com duas repetições e estime o erro.

Exercício 3 A fórmula de integração

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = [5f(-a) + 8f(0) + 5f(a)]/9$$

onde $a = \sqrt{0.6}$, é exata para todo polinômio de grau até cinco. Utilize-a para avaliar $\int_0^3 t^5 - 3t^2 dt$. Verifique a correção do resultado.

Exercício 4 Seja $\{p_k\}$ a família de polinômios ortogonais mônicos relativamente ao produto interno $< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\,dx$. Use a relação de recorrrência para construir p_0, p_1, p_2 e p_3. Deduza a fórmula de quadratura Gaussiana de 3 pontos para a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$.

Fórmulas úteis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(2k-1),\ n \geq 1.$$

Exercício 5 A fórmula de integração

$$\int_0^4 f(x)\ dx = A_1 f(1) + A_2 f(2) + A_3 f(3)$$

é exata para todo polinômio de grau 2.

a) Mostre que $A_i = \int_0^4 L_i(x)dx, i = 1, 2, 3$ onde os $L_i(x)$ são os polinômios de Lagrange de grau 2 associados aos pontos 1,2 e 3.

b) Determine exatamente o valor de $A_i, i = 1, 2, 3$, usando para tal uma fórmula de integração numérica de sua escolha (justificada).

c) Use mudança de varável para obter a fórmula de integração para $\int_a^b f(x)\,dx$.

d) Use a fórmula obtida para aproximar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Exercício 6 Considere a fórmula de Simpson $S(h)$ com $h = (b-a)/2n$. Mostre que

$$S(h) = \frac{4T(h) - T(2h)}{3}.$$

Exercício 7 (Integração de Gauss) Seja $\{q_k\}$ uma família de polinômios ortogonais em relação ao produto interno

$$< u, v >= \int_a^b \omega(x)u(x)v(x)\,dx$$

e denote por $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ as n raízes distintas de q_n. Seja $p_{n-1}(x)$ o polinômio interpolador de uma função f relativamente aos pontos x_k, $1 \le k \le n$. Considere a seguinte aproximação para a integral de f:

$$\int_a^b \omega(x)f(x)\,dx \approx \int_a^b \omega(x)p_{n-1}(x)\,dx = Q_n(f).$$

a) Mostre que a aproximação para a integral pode ser escrita na forma $Q_n(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)$. Qual é a relação entre α_k e os polinômios de Legendre L_k?

b) Prove que se f é um polinômio de grau menor ou igual a $2n-1$, a fórmula é exata. Sugestão: mostre que se f é um polinômio de grau menor ou igual a $2n-1$, então $f(x) = h(x)q_n(x) + p_{n-1}(x)$, onde h é um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$; use ortogonalidade.

Exercício 8 No cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$ obtivemos $\frac{4}{3}$ com 1-Trapézio, $\frac{7}{16}$ com 2-Trapézios e $\frac{67}{60}$ com 4-Trapézios. Determine que valores são obtidos ao se calcular a integral por 1-Simpson e por 2-Simpsons. Aproxime a integral pelo método de Romberg.

Exercício 9 Obtenha uma fórmula de integração numérica baseada em splines cúbicos interpoladores subordinados a uma partição com espaçamentos iguais de tamanho h.

Exercício 10 Considere a partição do intervalo $[a,b]$ $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$, onde $h = (b-a)/n$, e a seguinte aproximação para a integral de uma função f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^n f(x_i - 0.5h).$$

Denote por $E(h)$ o erro entre a integral exata e a aproximação. Prove que se $f \in C^2([a,b])$, então existe $t_h \in [a,b]$ tal que $E(h) = (b-a)h^2 f''(t_h)/24$.