

# Gabarito de listas

Arthur Rodrigues      Bruna Bazaluk

1/2021

## Semana 17/05

**E13.** Seja  $n$  um inteiro ímpar. Para que

$$(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 2) \cdot \dots \cdot (x_n - n)$$

seja par, basta que exista  $k$  tal que  $(x_k - k)$  seja par, pois multiplicação de um par por outro inteiro será sempre par e para que  $(x_k - k)$  seja par, basta que a paridade de  $x_k$  e  $k$  seja a mesma.

Foi provado em monitoria que se  $n$  é um inteiro ímpar e  $I$  e  $P$  são os números de ímpares e pares, respectivamente, em  $[n]$ . Então  $I > P$ .

Como  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é um arranjo de  $[n]$  e é indexado por  $[n]$  (com  $n$  ímpar), então existem mais ímpares em  $[n]$  do que  $x_r$  com  $r$  par em  $[n]$ . Logo, pelo princípio da casa dos pombos, existe um  $x_k$  ímpar associado a um  $k$  ímpar.

## Semana 24/05

**E16.**

**item i** Provaremos que se  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , então

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Como  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , temos que  $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$  e logo

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 \\ \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 &\geq 0 \\ a + b &\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

**item ii** Usando  $P(n)$  nos conjuntos de variáveis  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e  $\{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}\}$  teremos que

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

$$\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \dots + x_{2n-1} + x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot x_{n+3} \cdot \dots \cdot x_{2n-1} \cdot x_{2n}}.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}} \\ \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Como  $x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{R}_+$ , então  $\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$  e  $\sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}$  são números reais, logo podemos usar  $P(2)$  neles, ou seja, temos

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}} \quad (2)$$

Por (1), (2) e a transitividade de  $\geq$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{2n} &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}} \\ &\geq \sqrt[2n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{2n}} \end{aligned}$$

**item iii** Temos que  $P(n)$  é verdadeira, ou seja, para  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ .

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Então, em particular, vale para todo  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  em que

$$x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}. \quad (3)$$

Então temos

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \\ (n-1)x_n &= x_1 + \dots + x_{n-1} \\ nx_n - x_n &= x_1 + \dots + x_{n-1} \\ nx_n &= x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n \\ x_n &= \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \end{aligned}$$

Se tivermos  $x_n = 0$ , então por 3 e como  $x_i \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , temos que para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  temos que  $x_i = 0$  e logo

$$x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = 0 \geq 0 = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}}$$

e logo vale  $P(n-1)$ . Caso  $x_n \neq 0$ , então continuemos a conta:

$$\begin{aligned} x_n &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \\ x_n^n &\geq x_1 \cdot \dots \cdot x_n \\ \frac{x_n^n}{x_n} &\geq x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \\ x_n^{n-1} &\geq x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \\ x_n &\geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \end{aligned}$$

e logo vale  $P(n-1)$ .

Uma outra resolução possível é: Para todo  $1 \leq i \leq n-1$  temos que

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \geq \sqrt{x_i x_{i+1}}$$

Então temos que

$$\frac{1}{n} \left( \frac{x_1 + x_2}{2} + \dots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) \geq \frac{1}{n} (\sqrt{x_1 x_2} + \dots + \sqrt{x_{n-1} x_n})$$

Por  $P(n)$ , temos que

$$\frac{1}{n} (\sqrt{x_1 x_2} + \dots + \sqrt{x_{n-1} x_n}) \geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_{n-1} x_n}}$$

Da transitividade de  $\geq$  temos que segue o resultado.

**item iv** A partir de  $i$  e  $ii$  podemos mostrar, por indução, que  $P(2^n)$ , vale para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Para isso adotemos o caso base como  $P(2)$  que foi provado no item  $i$ .

Agora assuma que vale para algum  $k \in \mathbb{N}^*$ , ou seja, assuma que  $P(2^k)$  é verdadeiro. Mostraremos que vale para  $k+1$ , o que é imediato, pois como  $P(2)$  e  $P(2^k)$  valem (hipótese de indução), então pelo item  $ii$ , temos que  $P(2 \cdot 2^k) = P(2^{k+1})$  é verdadeiro.

Logo, pelo princípio de indução finita, vale para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Agora considere  $m \in \mathbb{N}^*$ , mostraremos que  $P(m)$  vale. Note primeiro que existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $2^{k-1} \leq m < 2^k$ . Como visto em calculo 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$$

e logo não existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $2^x < m$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (e logo em particular, para todo  $x \in \mathbb{N}$ ).

Já provamos que  $P(2^k)$  é verdadeiro e pelo item  $iii$  temos que

$$P(2^k - 1), P(2^k - 2), P(2^k - 3), \dots, P(2^{k-1} + 1), P(2^{k-1})$$

valem. Como  $m \in \mathbb{N}$ ,  $2^{k-1} \leq m < 2^k$  e acima abordamos todos os naturais entre  $2^{k-1}$  e  $2^k$ , então em algum momento abordamos  $m$ . Terminamos.

Uma maneira mais algorítmica (ou construtiva) de resolver essa parte é escrever  $m$  em base dois e chamar de  $d$  o número de dígitos de  $m$  nessa base, então defina  $k := d + 1$  e se convença que  $2^k > m$  (essa um algoritmo p encontrar o  $2^k$  comentado anteriormente).

Agora considere  $p$ , o número escrito em base 2, cujo o  $i$ -ésimo dígito é dado por

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{se } m_i = 1 \\ 1, & \text{se } m_i = 0 \end{cases}$$

Então se convença de que  $m = 2^k - (p + 1)$  **em base 2**.

### Semana 07/06

**E11.** Seja

$$Q := \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Logo temos que

$$n(n-1)! = r!(n-r)!Q$$

Assim temos que  $n \mid r!(n-r)!Q$ . Como  $n$  é primo e  $Q$  inteiro, temos que  $n \mid Q$  ou  $n \mid r!(n-r)!$ . Basta mostrarmos que  $n \nmid r!(n-r)!$ .

Faremos por contradição, suponha que

$$n \mid r!(n-r)!.$$

Então novamente, como  $n$  é primo, temos que  $n \mid r!$  ou  $n \mid (n-r)!$ .

Note que  $n \nmid r!$ , pois para todo  $0 \leq m \leq r-1$  e todo  $p$  primo que divide  $(r-m)$ , satisfaz que

$$p \leq r-m \leq r < n$$

e logo  $p \neq n$ . Ou seja,  $n$  não está na decomposição em primos de  $r-m$ . Logo  $n$  não divide as parcelas de  $r! = r(r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  e assim não divide  $r!$ .

Agora note que  $n \nmid (n-r)!$ , pois para todo  $0 \leq m \leq n-r-1$  e todo  $p$  primo que divide  $(n-r-m)$ , satisfaz que

$$p \leq n-r-m < n$$

já que  $r \geq 1$  e logo  $p \neq n$ . Ou seja,  $n$  não está na decomposição em primos de  $n-r-m$ . Obtendo uma contradição.