Gabarito de listas

Arthur Rodrigues Bruna Bazaluk

1/2021

Semana 17/05

E13. Seja n um inteiro ímpar. Para que

$$(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (x_n - n)$$

seja par, basta que exista k tal que $(x_k - k)$ seja par, pois multiplicação de um par por outro inteiro será sempre par e para que $(x_k - k)$ seja par, basta que a paridade de x_k e k seja a mesma.

Foi provado em monitoria que se n é um inteiro ímpar e I e P são os números de ímpares e pares, respectivamente, em $[n]$. Então $I > P$.

Como $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um arranjo de $[n]$ e é indexado por $[n]$(com n ímpar), então existem mais ímpares em $[n]$ do que x_r com r par em $[n]$. Logo, pelo principio da casa dos pombos, existe um x_k ímpar associado a um k ímpar.

Semana 24/05

E16.

item i Provaremos que se $a, b \in \mathbb{R}_+$, então

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Como $a, b \in \mathbb{R}_+$, temos que $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$ e logo

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geqslant 0 \\
\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 &\geqslant 0 \\
a + b &\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\
\frac{a+b}{2} &\geqslant \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

item ii Usando $P(n)$ nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}\}$ teremos que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

$$\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+\ldots+x_{2n-1}+x_{2n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_{n+1}\cdot x_{n+2}\cdot x_{n+3}\cdot\ldots\cdot x_{2n-1}\cdot x_{2n}}.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n} &\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}} \\ \frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n} &\geqslant \frac{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}}{2} \qquad (1) \end{aligned}$$

Como $x_1,\ldots,x_{2n}\in\mathbb{R}_+$, então $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$ e $\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}$ são números reais, logo podemos usar $P(2)$ neles, ou seja, temos

$$\frac{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\cdot\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}} \qquad (2)$$

Por (1), (2) e a transitividade de $\geqslant$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n} &\geqslant \sqrt{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\cdot\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}} \\ &\geqslant \sqrt[2n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{2n}} \end{aligned}$$

item iii Temos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, para $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}_+$.

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Então, em particular, vale para todo $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}_+$ em que

$$x_n=\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}. \qquad (3)$$

Então temos

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \\ (n-1)x_n &= x_1+\ldots+x_{n-1} \\ nx_n-x_n &= x_1+\ldots+x_{n-1} \\ nx_n &= x_1+\ldots+x_{n-1}+x_n \\ x_n &= \frac{x_1+\ldots+x_{n-1}+x_n}{n} \\ &\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \end{aligned}$$

Se tivermos $x_n=0$, então por 3 e como $x_i\geqslant 0$ para todo $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, temos que para todo $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ temos que $x_i=0$ e logo

$$x_n=\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}=0\geqslant 0=\sqrt[n-1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}$$

e logo vale $P(n-1)$. Caso $x_n \neq 0$, então continuemos a conta:

$$\begin{aligned} x_n &\geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \\ x_n^n &\geqslant x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \\ \frac{x_n^n}{x_n} &\geqslant x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \\ x_n^{n-1} &\geqslant x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \\ x_n &\geqslant \sqrt[n-1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}} \end{aligned}$$

e logo vale $P(n-1)$.

Uma outra resolução possível é: Para todo $1 \leqslant i \leqslant n-1$ temos que

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \geqslant \sqrt{x_i x_{i+1}}$$

Então temos que

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \ldots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \geqslant \frac{1}{n}(\sqrt{x_1 x_2} + \ldots + \sqrt{x_{n-1} x_n})$$

Por $P(n)$, temos que

$$\frac{1}{n}(\sqrt{x_1 x_2} + \ldots + \sqrt{x_{n-1} x_n}) \geqslant \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_{n-1} x_n}}$$

Da transitividade de $\geqslant$ temos que segue o resultado.

item iv A partir de i e ii podemos mostrar, por indução, que $P(2^n)$, vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Para isso adotemos o caso base como $P(2)$ que foi provado no item i.

Agora assuma que vale para algum $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, assuma que $P(2^k)$ é verdadeiro. Mostraremos que vale para $k+1$, o que é imediato, pois como $P(2)$ e $P(2^k)$ valem(hipótese de indução), então pelo item ii, temos que $P(2 \cdot 2^k) = P(2^{k+1})$ é verdadeiro.

Logo, pelo principio de indução finita, vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Agora considere $m \in \mathbb{N}^*$, mostraremos que $P(m)$ vale. Note primeiro que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $2^{k-1} \leqslant m < 2^k$. Como visto em calculo 1:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} 2^x = \infty$$

e logo não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^x < m$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (e logo em particular, para todo $x \in \mathbb{N}$).

Já provamos que $P(2^k)$ é verdadeiro e pelo item iii temos que

$$P(2^k - 1),\ P(2^k - 2),\ P(2^k - 3), \ldots,\ P(2^{k-1} + 1),\ P(2^{k-1})$$

valem. Como $m \in \mathbb{N}$, $2^{k-1} \leqslant m < 2^k$ e acima abordamos todos os naturais entre 2^{k-1} e 2^k, então em algum momento abordamos m. Terminamos.

Uma maneira mais algorítmica (ou construtiva) de resolver essa parte é escrever m em base dois e chamar de d o número de dígitos de m nessa base, então defina $k := d + 1$ e se convença que $2^k > m$(essa um algoritmo p encontrar o 2^k comentado anteriormente).

Agora considere p, o número escrito em base 2, cujo o i-ésimo digito é dado por

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{se } m_i = 1 \\ 1, & \text{se } m_i = 0 \end{cases}$$

Então se convença de que $m = 2^k - (p + 1)$ **em base 2**.

Semana 07/06

E11. Seja

$$Q := \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Logo temos que

$$n(n-1)! = r!(n-r)!Q$$

Assim temos que $n \mid r!(n-r)!Q$. Como n é primo, temos que $n \mid Q$ ou $n \mid r!(n-r)!$. Basta mostrarmos que $n \nmid r!(n-r)!$.

Faremos por contradição, suponha que

$$n \mid r!(n-r)!.$$

Então novamente, como n é primo, temos que $n \mid r!$ ou $n \mid (n-r)!$.

Note que $n \nmid r!$, pois para todo $0 \leqslant m \leqslant r - 1$ e todo p primo que divide $(r - m)$, satisfaz que

$$p \leqslant r - m \leqslant r < n$$

e logo $p \neq n$. Ou seja, p não está na decomposição em primos de $r - m$.Logo n não divide as parcelas de $r! = r(r-1) \cdot (r-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ e assim não divide $r!$.

Agora note que $n \nmid (n-r)!$, pois para todo $0 \leqslant m \leqslant n - r - 1$ e todo p primo que divide $(n - r - m)$, satisfaz que

$$p \leqslant n - r - m < n$$

já que $r \geqslant 1$ e logo $p \neq n$. Ou seja, p não está na decomposição em primos de $n - r - m$. Obtendo uma contradição.