Gabarito de listas

Arthur Rodrigues Bruna Bazaluk

1/2021

E1. Tome $n = 4$

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$$

E2. Nesta questão utilizaremos o seguinte teorema provado em aula, válido para todo $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$:

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Provaremos por contrapositiva, ou seja, vamos provar que se n não for primo, então $2^n - 1$ também não é.

Tomando $x = 2$ e assumindo que $n = pq$ para $p, q > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 2^n}{1 - 2} &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
2^n - 1 &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + (2^p)^{q-3} + \cdots + 2^p + 1)
\end{aligned}$$

Como p é primo, temos que $p > 1$ e logo $2^n - 1 \neq 2^p - 1 > 1$.

E3.

($\Longrightarrow$) Se $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então pelo teorema de Bezout existem m, n inteiros tais que

$$ma + nb = \mathrm{mdc}(a, b) = 1$$

($\Longleftarrow$) Suponha $\mathrm{mdc}(a, b) = c > 1$, então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = xc \text{ e } b = yc,$$

pois divide a e b. Então

$$\begin{aligned}
ma + nb &= 1 \\
mcx + ncy &= \\
c(mx + ny) &=
\end{aligned}$$

Como $c > 1$ temos um absurdo.

E4. A afirmação é falsa.

Seja quais a e b tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$, então pelo teorema de Bezout existem m, n inteiros tais que

$$ma + nb = \text{mdc}(a, b) = 1$$

Logo

$$(2m)a + (2n)b = 2\text{mdc}(a, b) = 2$$

E6.

a) P é falsa e Q é verdadeira;

b) P é verdadeira ou Q é falsa;

c) P é falsa e Q é falsa;

d) P é falsa ou Q é falsa;

E7. Note que $P \wedge Q$ é verdadeira se e somente se P e Q são verdadeiras. Logo $P \wedge Q$ é tautologia se e somente se P e Q o forem.

$$(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

é tautologia.

E9. P xor $Q \equiv P \vee Q \wedge \neg(P \wedge Q)$

x	y	x xor y	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \vee Q \wedge \neg(P \wedge Q)$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0

E10. Note que $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$ e $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$

x	y	$\neg(x \wedge y)$	$(\neg x) \vee (\neg y)$	$\neg(x \vee y)$	$(\neg x) \wedge (\neg y)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

E12.

a) Não é tautologia nem contradição;

b) Contradição;

c) Tautologia;

d) Tautologia.

E13. 2^n

E15.

$$P \vee (\neg Q)$$

ou

$$(\neg P) \to (\neg Q)$$

ou

$$((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee (P \wedge (\neg Q)) \vee (P \wedge Q)$$

E16.

$$\begin{aligned} (P \wedge Q \wedge R) \vee \\ (P \wedge Q \wedge (\neg R)) \vee \\ (P \wedge (\neg Q) \wedge R) \vee \\ ((\neg P) \wedge Q \wedge R) \vee \\ ((\neg P) \wedge Q \wedge (\neg R)) \vee \\ ((\neg P) \wedge (\neg Q) \wedge (\neg R)) \end{aligned}$$

E17.
Solução direta
Para n qualquer inteiro positivo. Considere os conjuntos

$$A := \{i \in [n] : x_i = F\}$$

Notemos que $A \subseteq [n]$ e que $\gamma_A = F$, pois

$$\varphi_A = \bigvee_{i \in A} x_i = \bigvee_{i \in A} F = F$$
$$\psi_A = \bigvee_{i \in [n] \setminus A} \neg x_i = \bigvee_{i \in A} (\neg V) = F$$

Logo

$$\gamma_A = \varphi_A \wedge \psi_A = F.$$

Por fim

$$\Phi_n = \bigwedge_{S\subseteq[n]\gamma_S} \gamma_S = \gamma_A \wedge \bigwedge_{S\subseteq[n]\gamma_S, S\neq A} \gamma_S = F \wedge \bigwedge_{S\subseteq[n]\gamma_S, S\neq A} \gamma_S = F$$

Solução usando Principio da Boa Ordem:
Seja

$$C := \{n \in \mathbb{Z}_+^* : \Phi_n \text{ é satisfazível.}\}$$

Suponha que $C \neq \emptyset$, como C é um conjunto de inteiros positivos, temos que, pelo Principio da Boa Ordem, existe um mínimo $m \in C$.

Como m é mínimo, sabemos que Φ_{m-1} é insatisfazível. Agora note que

$$\gamma_S = x_m \vee \gamma_{S\setminus\{m\}}, \text{ se } m \in S$$

e

$$\gamma_S = \neg x_m \vee \gamma_{S\setminus\{m\}}, \text{ se } m \notin S$$

Logo temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_m &= \bigwedge_{S\subseteq[m]} \gamma_S \\
&= \left(\bigwedge_{m\in S, S\subseteq[m]} \gamma_S\right) \wedge \left(\bigwedge_{m\notin S, S\subseteq[m]} \gamma_S\right) \\
&= \left(\bigwedge_{m\in S, S\subseteq[m]} x_m \vee \gamma_{S\setminus\{m\}}\right) \wedge \left(\bigwedge_{m\notin S, S\subseteq[m]} \neg x_m \vee \gamma_{S\setminus\{m\}}\right) \\
&= \left(x_m \vee \bigwedge_{m\in S, S\subseteq[m]} \gamma_{S\setminus\{m\}}\right) \wedge \left(\neg x_m \vee \bigwedge_{m\notin S, S\subseteq[m]} \gamma_{S\setminus\{m\}}\right) \\
&= (x_m \wedge \neg x_m) \vee \left(\bigwedge_{S\subseteq[m]} \gamma_{S\setminus\{m\}}\right) \\
&= (x_m \wedge \neg x_m) \vee \Phi_{m-1}
\end{aligned}$$

$(x_m \wedge \neg x_m) = F$ para todo valor de x_m, como Φ_{m-1} é insatisfazível, concluímos que Φ_m também é, uma contradição.