Gabarito de listas

Arthur Rodrigues Bruna Bazaluk

1/2021

Semana 2

E1. Usaremos o fato de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ser uma função estritamente crescente.
Fazendo os calculo diretamente, temos que

$$1,5^3 = 3,375$$

$$1,4^3 = 2,744$$

Logo $1,4 < \sqrt[3]{3} < 1,5$. Assim a aproximação para $\sqrt[3]{3}$ com uma casa decimal é $1,4$.

E2. Faremos uma prova por contradição. Suponha que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} &> \frac{a+b}{2} \\
(\sqrt{ab})^2 &> \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
ab &> \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
ab &> \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
4ab &> a^2+2ab+b^2 \\
0 &> a^2-2ab+b^2 \\
0 &> (a-b)^2
\end{aligned}$$

Um absurdo com o fato de $a, b \in \mathbb{R}$, que implica que $a - b \in \mathbb{R}$ e logo que $(a-b)^2 > 0$.

E3. Nesta questão utilizaremos o seguinte teorema provado em aula, válido para todo $x, y \in \mathbb{R}$, exceto $x \neq y$:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

item a

Tomando $x := a$, $y := -b$ e $n := 2k+1$ teremos:

$$\begin{aligned} a^{2k+1} - (-b)^{2k+1} &= (a - (-b))(a^{2k} + x^{2k-1}y + \cdots + xy^{2k-1} + y^{2k}) \\ a^{2k+1} + b^{2k+1} &= (a + b)(a^{2k} + x^{2k-1}y + \cdots + xy^{2k-1} + y^{2k}) \end{aligned}$$

Logo $a + b$ divide $a^{2k+1} + b^{2k+1}$.

item b

Provaremos que $10^{17} + 1$ não é primo. Vamos definir $x := 1$, $y := -10$ e $n := 16$ e aplicar o teorema (1):

$$1 + (-10) + (-10)^2 + ... + (-10)^{16} = \frac{1 - (-10)^{16+1}}{1 - (-10)} \rightarrow$$

$$1 - 10 + 10^2 - 10^3 + ... + 10^{16} = \frac{1 + 10^{17}}{1 + 10}$$

Multiplicando os dois lados por $(1 + 10)$ temos:

$$1 + 10^{17} = (1 + 10)(1 - 10 + 10^2 - 10^3 + ... + 10^{16})$$

Dessa forma, $1 + 10^{17}$ não é primo pois vemos que ele é divisível por outros números, não só o 1 e ele mesmo.

item c

Para provar que $22^{19} + 1$ não é primo, basta seguir o modelo do item anterior utilizando $x = -22$ e $n = 18$.

E4. Provaremos por contradição que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Suponha que (2) não seja válida para algum n ≤ 0, isso quer dizer que, pelo princípio da boa ordem, existe um inteiro não negativo m mínimo, tal que (2) seja falsa para n=m.

Quando n=0, porém, a equação é verdadeira, então $m \geq 1$. Sendo assim, $m - 1$ não é um número negativo e é menor que m, então (2) deve ser verdadeira para $n = m - 1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1)((m-1)+1)(2(m-1)+1)}{6} \tag{2}$$

Se adicionarmos m^2 dos dois lados da equação (3) temos:

$$0 + 1^2 + 2^2 + ... + (m-1)^2 + m^2 = \sum_{k=0}^{m} k^2$$
$$= \frac{(m-1)((m-1)+1)(2(m-1)+1)}{6} + m^2$$

Desenvolvendo a expressão chegamos a:

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

que é exatamente a equação (2) para $n = m$, o que é uma contradição.
Desse modo, não há um inteiro não negativo mínimo para o qual (2) falhe, portanto, ela vale para todos os inteiros não negativos.

E5. Mesmo raciocínio da questão 8.

E6. Considere C o conjunto de contra-exemplos para propriedade do enunciado. Logo temos que

$C := \{n \in [2^{m+1}]$: não há combinação de envelopes tais que a nome deles resulte em $n\}$

Assumindo que $C \neq \emptyset$. Temos que ele é um conjunto de inteiros não negativos. Logo, pelo principio da boa ordem, temos que existe c valor mínimo em C.

É imediato que $2^m < c$, pois caso contrario, existe a combinação de somente um envelope tal que representa c. Logo $0 < c-1$ e, por minimidade de c, temos que existe combinação B de envelopes cuja soma resulta em $c-1$.

A partir de agora denotaremos o envelope que contem o valor n de v_n.

Note que a combinação B deve conter o envelope v_1, pois caso contrario, $B \cup \{v_1\}$ é uma combinação que resulta c.

Agora, se $v_2 \notin B$, então $B \setminus \{v_1\} \cup \{v_2\}$ é uma combinação que resulta em c. Concluindo assim que v_2 deve ser elemento de B.

Analogamente, se $v_3 \notin B$, então $B \setminus \{v_2\} \cup \{v_3\}$é uma combinação que resulta em c. Concluindo assim que v_3 deve ser elemento de B.

Podemos repetir esse processo para todas as cartas, concluindo que B contem todas as cartas, logo a soma de seus elementos é

$$1 + 2 + \cdots + 2^m = 2^{m-1} - 1 = c - 1.$$

Logo $c = 2^{m-1}$, uma contradição com o fato de $c < 2^{m-1}$.

E7. Seja C o conjunto de contra-exemplos para a afirmação do enunciado, como esse conjunto é de inteiros positivos, então pelo principio de boa ordem, temos que existe um mínimo c de C.

Como c é o menor contra-exemplo, temos que a afirmação é verdadeira para $c-1$, logo existem inteiros positivos m, n tais que

$$c - 1 = 3n + 5m.$$

Podemos assumir que $c - 1 > 9$, pois é trivial encontrar combinações de 3 e 5 para os números 8 e 9. Logo podemos concluir que $n, m > 1$.

Assim note que

$$c = 3(n+2) + 5(m-1)$$

e $n+2$ e $m-1$ são inteiros positivos. Logo temos uma contradição.

E8.

Suponhamos que existam a, b, c e d inteiros positivos tais que

$$\begin{aligned} d^4 &= 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 \\ &= 2(4a^4 + 2b^4 + c^4) \end{aligned}$$

Logo d^4 é par, logo d é par e assim tem forma $d = 2x_d$, para algum $x_d \in \mathbb{Z}$. Substituindo d na equação temos:

$$\begin{aligned} (2x_d)^4 &= 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 \\ 16x_d^4 &= 2(4a^4 + 2b^4 + c^4) \\ 8x_d^4 &= 4a^4 + 2b^4 + c^4 \\ c^4 &= 2(4x_d^4 - 2a^4 - b^4) \end{aligned}$$

Logo c^4, e consequentemente c, são pares. Logo tem forma $c = 2x_c$, para algum $x_c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (2x_c)^4 &= 2(4x_d^4 - 2a^4 - b^4) \\ 16x_c^4 &= 2(4x_d^4 - 2a^4 - b^4) \\ 8x_c^4 &= 4x_d^4 - 2a^4 - b^4 \\ b^4 &= 4x_d^4 - 2a^4 - 8x_c^4 \\ &= 2(2x_d^4 - a^4 - 4x_c^4) \end{aligned}$$

Logo b^4, e consequentemente b, são pares. Logo tem forma $b = 2x_b$, para algum $x_b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (2x_b)^4 &= 2(2x_d^4 - a^4 - 4x_c^4) \\ 8x_b^4 &= 2x_d^4 - a^4 - 4x_c^4 \\ a^4 &= 2x_d^4 - 4x_c^4 - 8x_b^4 \\ &= 2(x_d^4 - 2x_c^4 - 4x_b^4) \end{aligned}$$

Logo a^4, e consequentemente a, são pares, para algum $x_a \in \mathbb{Z}$.

Agora seja a, b, c e d a solução tal que a assume o menor valor positivo possível. Então é uma solução e como mostrado anteriormente teremos que a, b, c e d são pares. Logo têm forma $a = 2a'$, $b = 2b'$, $c = 2c'$ e $d = 2d'$, para $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Como $a > 0$, temos que $a' > 0$.

Mostraremos que a', b', c' e d' é uma solução para a equação de Fehman:

$$\begin{aligned} d^4 &= 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 \\ (2d')^4 &= 8(2a')^4 + 4(2b')^4 + 2(2c')^4 \\ 16d'^4 &= 16(8a'^4 + 4b'^4 + 2c'^4) \\ d'^4 &= 8a'^4 + 4b'^4 + 2c'^4 \end{aligned}$$

Por fim, como a é par, o algoritmo de divisão de Euclides garante que $0 < a' < a$. Uma contradição com a minimidade de a.

E9. Deixaremos a verificação para $n \leq 4$ para es estudantes.

Seja C o conjunto de contra-exemplos da afirmação do enunciado. Pelo principio da boa ordem, temos que esse conjunto assume mínimo c. Agora seja $b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = b + 1$$

Pela verificação feita anteriormente, temos que $c > 4$, logo $b \geq 4$. Como c é o menor dos contra-exemplos, temos que

$$3^{\frac{b}{3} \geq b}$$

Agora note que:

$$\begin{aligned} 3^{\frac{c}{3}} &= 3^{\frac{b+1}{3}} \\ &= 3^{\frac{b}{3}} \sqrt[3]{3} \\ &\geq b\sqrt[3]{3} \\ &\geq b \cdot 1,4 \\ &\geq b + 0,4b \\ &\geq b + 1 \\ &\geq c \end{aligned}$$

Nas contas acima, usei que $0,4b \geq 1$, pois $b \geq 4$ e que $\sqrt[3]{3} > 1,4$ o que é imediato, pois $1,4$ é a aproxição com uma casa decimal para $\sqrt[3]{3}$.

E10.

a) Pois o conjunto de contra exemplos é composto por número inteiros positivos. Assim pelo principio da boa ordem, temos que esse conjunto assume mínimo.

b) Basta calcular a soma dos primeiros um inteiro positivo, que vale $1 = 1^2$. Logo o menor contra exemplo é maior ou igual a 3.

c) Como $m \geq 2$, então $m-1 \geq 1$ e como m é o menor contra exemplo, então a propriedade vale para $m-1$.

d) Deve-se adicionar $2m-1$.

e)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-2}(2(i-1)+1) &= (m-1)^2 \\
&= m^2 - 2m + 1 \\
\sum_{i=1}^{m-2}(2(i-1)+1) + 2m - 1 &= m^2 \\
\sum_{i=1}^{m}(2(i-1)+1) &= m^2
\end{aligned}$$