Gabarito de listas

Arthur Rodrigues Bruna Bazaluk

1/2021

Semana 1 (3/5 até 10/5)

E1.
item a

$$\begin{aligned} q(cm) &= a_0 + a_1(cm) + a_2(cm)^2 + \cdots + a_{d-1}(cm)^{d-1} + a_d(cm)^d \\ &= a_0 + a_1cm + a_2c^2m^2 + \cdots + a_{d-1}c^{d-1}m^{d-1} + a_dc^dm^d \\ &= c(1 + a_1m + a_2cm^2 + \cdots + a_{d-1}c^{d-2}m^{d-1} + a_dc^{d-1}m^d) \end{aligned}$$

Definindo $x := 1 + a_1m + a_2cm^2 + \cdots + a_{d-1}c^{d-2}m^{d-1} + a_dc^{d-1}m^d$, obtemos

$$q(cm) = c \cdot x \tag{1}$$

Logo $q(cm)$ é múltiplo de c.

item b
Queremos provar que (o polinômio q não é constante e $c > 1$) $\implies$ (existem infinitos valores valores n para os quais $q(n) \in \mathbb{Z}$ não são primos).

> **Lembrete:** Um polinômio $p(n)$ ser constante significa que $p(n) = a_0 \in \mathbb{Z}$, ou seja, $p(n)$ é uma constante em $\mathbb{Z}$. Se tivermos $q(n)$ não constante significa que $q(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \cdots + a_{d-1}n^{d-1} + a_dn^d$ e $a_d \neq 0$

Observando a igualdade (1), notamos que basta provar que $c > 1$ e $x > 1$, pois aí $q(n)$ não satisfará a definição de primo.

Por hipótese, temos que $c > 1$, então resta somente mostrar que existem infinitos valores tais que $x > 1$.

Primeiro, existe um valor $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n > N$, temos $|p(n)| > 0$.

Se tivermos $a_d < 0$, então $p(n) < 0$, logo $p(n)$ não será primo para todo $n > N$.

Se $a_d > 0$, então podemos pedir algo mais forte. Note que $c = a_0$ é fixo, então temos que existe $W \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $w > W$ temos que $q(cw) > c$. Assim temos

$$\begin{aligned} q(cm) = c \cdot x &> c \\ \frac{c}{c} x &> \frac{c}{c} \\ 1 \cdot x &> 1 \\ x &> 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Em (2), usei que $c > 1 > 0$. Concluímos que para todo $w \in \mathbb{Z}$ tal que $w > W$, $q(cw)$ não é primo.

item c

Notemos que não temos mais a hipótese de $c > 1$. Escolhemos $n = 0$.
Se tivermos $c \leqslant 1$, então:

$$\begin{aligned} q(n) &= c + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_{d-1} n^{d-1} + a_d n^d \\ &= c + n \cdot (a_1 + a_2 n + \cdots + a_{d-1} n^{d-2} + a_d n^{d-1}) \\ q(0) &= c + 0 \cdot (a_1 + a_2 0 + \cdots + a_{d-1} 0^{d-2} + a_d 0^{d-1}) \\ &= c \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Como o menor primo é 2, segue que $q(n)$ não é primo.

E2.

Queremos provar que $1 = -1 \implies 2 = 1$. Para tal vamos assumir podemos realizar operação em ambos os lados de uma igualdade.

Suponhamos que $1 = -1$, então temos

$$\begin{aligned} 1 &= -1 && \implies \\ 1 + 1 &= -1 + 1 && \implies \\ 2 &= 0 && \implies \\ 2 \times 1 &= 0 && \implies \\ 1 &= 0/2 && \implies \\ 1 &= 0 && \implies \\ 1 + 1 &= 0 + 1 && \implies \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

E3.

a) Acho essa proposta meio overkill, mas que tal isso:

Como $r \leqslant 0$, $s \leqslant 0$, então $rs \leqslant 0$. Como o enunciado fala, rs terá duas raízes quadradas, uma positiva e uma negativa, ou seja, existe um único número real positivo tal que

$$x^2 = rs$$

e o denotamos por $\sqrt{rs}$, mas notemos que

$$\begin{aligned}(\sqrt{r}\sqrt{s})^2 &= \sqrt{r}\sqrt{s}\sqrt{r}\sqrt{s} \\ &= \sqrt{r}\sqrt{r}\sqrt{s}\sqrt{s} \\ &= (\sqrt{r})^2(\sqrt{s})^2 \\ &= rs\end{aligned}$$

Pela unicidade da raiz, temos que $\sqrt{r}\sqrt{s} = \sqrt{rs}$.

b) Quando fazemos a passagem $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ passamos a trabalhar com a múltiplicação de 2 números complexos, pois $\sqrt{-1} = i$. Como os complexos são definidos da forma $z = ai + b$, $\sqrt{-1}$ deve ser representado como i, por definição. Assim chegamos que $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = 1$.

E4. Se $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ for racional, então acabamos, pois temos que $\sqrt{2}$ é um irracional que elevado a outro irracional resultará em um racional.

Caso x seja irracional, então

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{2}} &= \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} \\ &= \sqrt{2}^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

E5. Provaremos por contradição. Defino $y := log_7 n$. Suponha que $y \in \mathbb{Q}$ mas $y \notin \mathbb{Z}$ e $y \notin \mathbb{I}$. Sabemos que $7^y = n$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, sabemos que $n = p_1^{x1} p_2^{x2} ... p_n^{xn}$, com p_k sendo primos e xk inteiros. Mas $n = 7^y$ e 7 de fato é primo, mas y não é inteiro pela nossa suposição, então chegamos a uma contradição.

E6.

Prova direta: Pelo teorema fundamental da aritmética, a admite uma única decomposição em primos

$$a = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m \tag{3}$$

Dessa forma, temos que a seguinte decomposição em primos de $a^n = p_1^n \times p_2^n \times \cdots \times p_m^n$. Como o teorema fundamental da aritmética garante que a decomposição em primos é única, temos que essa é **a** decomposição de a^n.

Como a^n é par, temos que $2 \mid a^n$*, logo existe $i \in \{1, \ldots m\}$ tal que $2 = p_i$. Logo 2 está na decomposição em primos de a, logo $2 \mid a$ e portanto a é par.

Prova por contradição: Suponha a ímpar, então na decomposição (3) temos que $p_i \neq 2$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Como $a^n = p_1^n \times p_2^n \times \cdots \times p_m^n$, temos que $2 \nmid a^n$†, logo a^n é ímpar. Uma contradição com o fato de a^n ser par.

E7.
Suponha que $a = b = \sqrt{n}$. Neste caso, $ab = \sqrt{n}\sqrt{n} = n$. Suponha agora que $a > \sqrt{n}$ E $b > \sqrt{n}$. Então $ab > \sqrt{n}\sqrt{n} > n$, mas ab deveria ser IGUAL a n, o que é uma contradição.
Portanto, a NEGAÇÃO de $(a > \sqrt{n}$ E $b > \sqrt{n})$ é verdadeira, ou seja, a OU b é(são) menor(es) que n.
$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

E8. Se n^2 é múltiplo de 3, n^2 é da forma $3x$, sendo x também um inteiro não negativo e menor que n^2. Então, $n^2 = 3x \rightarrow n = 3\frac{x}{n} \rightarrow n = 3y$. Portanto n é múltiplo de 3.

E9.

Existem vários exemplos possíveis, vamos criar vários "numa tacada só".

Vamos definir $m := p_1^2 \times p_2^2 \times \cdots \times p_u^2$, onde $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ são primos distintos. Então $n := p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u \times v$, onde v é um primo distinto dos demais.

Pois

$$n^2 = p_1^2 \times p_2^2 \times \cdots \times p_u^2 \times v^2 = m \times v^2$$

Ou seja, n^2 é múltiplo de m.

Agora vamos provar, por contradição, que $m \nmid n$. Suponha que $m \mid n$, logo existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} m \times x &= n \\ p_1^2 \times p_2^2 \times \cdots \times p_u^2 \times x &= p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u \times v \\ p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u \times x &= v \end{aligned}$$

Logo temos que $x \mid v$, como v é primo, temos que ou $x = 1$ ou $x = v$.

Se $x = 1$, obtemos $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u = v$, um absurdo, pois v é primo.

*Lembre que essa é a notação para "2 divide a^n"
†Lembre que essa é a notação para "2 não divide a^n"

Se $x = v$, obtemos

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u \times x &= v \\ p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u \times v &= v \\ p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_u &= 1 \end{aligned}$$

Uma contradição com o fato de $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_u$ serem primos.[‡] Se tomarmos v muito grande, teremos $n > m$.

E10.

a) Vamos provar por contradição. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional.

Notemos que $\sqrt{2} > 1$, pois

$$\begin{aligned} 2 &> 1 \\ \sqrt{2} &> \sqrt{1} \\ \sqrt{2} &> 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Em 4, usei o fato de que raiz quadrada é uma função estritamente crescente.

Logo temos que $\sqrt{2} - 1 > 0$. Logo, como $\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{Q}$, temos que existem $p, q_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $p \geqslant 0$, $q_0 > 0$ e

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q_0}.$$

Logo temos que $(\sqrt{2}-1)q_0 = p \in \mathbb{Z}$. Seja q o menor desses q_0, formalmente falando:

$$q := \min\{q_0 : q_0 \in \mathbb{Z}, q_0 > 0, (\sqrt{2} - 1)q_0 \in \mathbb{Z}\}$$

Note que esse mínimo existe, pois $q_0 \geqslant 1$ para todo q_0 no conjunto acima.

Agora seja $q' := (\sqrt{2} - 1)q$, notemos que

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 1)q' &= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)q \\ &= (2 - 2\sqrt{2} + 1)q \\ &= q - 2(\sqrt{2} - 1)q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $(\sqrt{2} - 1) < 1$, temos que $q > q'$, o que contradiz a minimidade de q.

b) (discussão)

[‡]Lembrem que primos são necessariamente diferentes que 1.

E11. Queremos mostrar que se $k \in \mathbb{N}$ não é da forma $k = n^m$, então $\sqrt[m]{k}$ é irracional.

Considere o polinomio $p(x) = x^m - k$, notemos que $\sqrt[m]{k}$ é raiz desse polinomio. Logo ele é ou um inteiro ou irracional.

Suponha que $\sqrt[m]{k}$ seja inteiro, logo podemos tomar $\sqrt[m]{k} = n$, daí temos que

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{k} &= n \\ (\sqrt[m]{k})^m &= n^m \\ k &= n^m \end{aligned}$$

Logo, por contrapositiva, se k não tiver forma $k = n^m$, então $\sqrt[m]{k}$ é irracional.

E12. Seja $A := \{\{1, \{2\}\}, \{3\}\}$. Os elementos de A são $\{\{1, \{2\}\}$ e $\{3\}$, pois $\{\{1, \{2\}\} \in A$ e $\{3\} \in A$.

Os subconjuntos de A são $\emptyset$, $\{\{3\}\}$, $\{\{\{1, \{2\}\}\}$ e A.

E13. Se temos que $A \subset B$ e $B \subset C$, então vale

$$\forall x, x \in A \implies x \in B \tag{5}$$
$$\forall x, x \in B \implies x \in C \tag{6}$$

Se temos $x \in A$, então por 5 temos que $x \in B$ e logo, por 6, temos que $x \in C$, ou seja, vale que

$$\forall x, x \in A \implies x \in C$$

Logo $A \subseteq C$.

E14. Seja A um conjunto com n elementos. Todos seus subconjuntos têm de 0 até n elementos. Desse modo, a quantidade de subconjuntos é a soma da combinação n-escolhe-k, para cada k de 1 a n, ou seja, cada tamanho possível de subconjunto, mais 1, que seria o conjunto vazio. Portanto, um conjunto com n elementos tem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} + 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + 1 \tag{7}$$

subconjuntos.

E15. Sim. $A \subseteq B$, pois a afirmação $x \in A \implies x \in B$ é verdadeira. Analogamente $B \subseteq A$, pois $x \in B \implies x \in A$.

E16.

a) Falsa. Pois $\{\{\emptyset\}\} \cup \emptyset = \{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

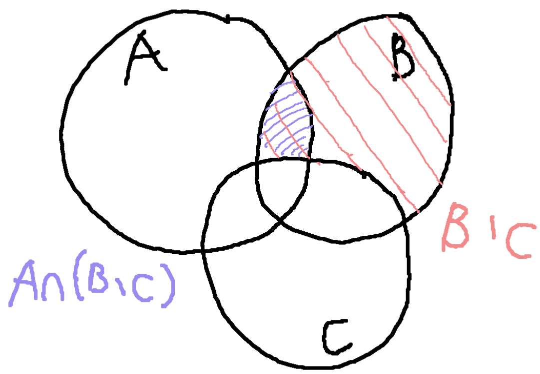
b) Verdadeira.

c) Falsa. Pois

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$$

d) Verdadeira.

E17.



Mostraremos que

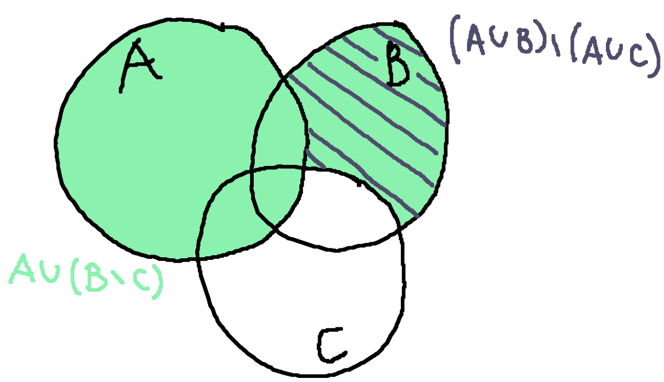
$$\begin{aligned} &A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C) \text{ e que} \\ &A \cap (B - C) \supseteq (A \cap B) - (A \cap C) \end{aligned}$$

Seja $x \in A \cap (B - C)$, então $x \in A$ e $x \in (B - C)$, então $x \in B$ e $x \notin C$.

Logo temos $x \in (A \cap B)$ e $x \notin C$, logo $x \in (A \cap B) - C$. Como $(A \cap B) \subseteq A$, temos que $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$.

Agora seja $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$, então $x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C)$. Então, por um lado $x \in A$ e $x \in B$, mas por outro $x \notin A$ ou $x \notin C$. Se tivéssemos $x \notin A$, então teríamos uma contradição, logo deduzimos que $x \notin C$.

Resumindo, temos que $x \in A$, $x \in B$ e $x \notin C$, então $x \in A$ e $x \in (B - C)$ e concluímos que $x \in A \cap (B - C)$.



Esse é um exemplo de "proof by picture", em que a figura deixa "óbvio" o porquê uma certa afirmação é verdadeira ou falsa.

Figuras não são suficiente para provarmos de fato, mas podem dar ideias de como podemos fazê-lo. Para mostrarmos que

$$A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$$

temos que encontrar um x tal que $x \in A \cup (B - C)$ e $x \notin (A \cup B) - (A \cup C)$. A figura nos dá a ideia de considerar $x \in A$. Vamos provar!

Seja $x \in A$, então $x \in A \cup (B - C)$. Agora para todo $y \in (A \cup B) - (A \cup C)$ temos que $y \notin A \cup C$ e logo $y \notin A$, assim necessariamente temos que $x \neq y$, ou seja, $x \notin (A \cup B) - (A \cup C)$.

E18.

Recomendamos que você faça o gráfico de Venn-Euler desses conjuntos! Provaremos que

$$A\Delta(B\Delta C) \supseteq (A\Delta B)\Delta C$$

Seja $x \in (A\Delta B)\Delta C$, então $x \in ((A\Delta B) \cup C) \setminus ((A\Delta B) \cap C)$. Então $x \in ((A\Delta B) \cup C)$ e $x \notin ((A\Delta B) \cap C)$.

Pela definição de união, temos que ou $x \in A\Delta B$ ou $x \in C$, vamos quebrar em casos:

Caso 1: $x \in (A\Delta B)$: e $x \notin C$

Sabemos que $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, então $x \in (A \cup B)$ e $x \notin (A \cap B)$. Portanto, ou $x \in A$ ou $x \in B$, mas não pertence a ambos.

Subcaso 1.1: $x \in A$ e $x \notin B$:

Como $x \in A$, temos que $x \in A \cup (B\Delta C)$.

Por hipótese do caso 1, temos que $x \notin C$, logo, como $x \notin B$, temos que $x \notin B\Delta C$ e logo que $x \notin A \cap (B\Delta C)$ e assim que para o caso 1.1 temos que $x \in A\Delta(B\Delta C)$.

Subcaso 1.2: $x \notin A$ e $x \in B$:

Como $x \notin A$ temos que $x \notin A \cap (B\Delta C)$. Então basta mostrar que $x \in A \cup (B\Delta C)$.

Por hipótese do caso 1, temos que $x \notin C$, assim $x \in B \cup C$ e $x \notin B \cap C$, logo $x \in B\Delta C$ e segue que $x \in A \cup (B\Delta C)$.

Caso 2: $x \in C$:

Queremos mostrar que $x \in A\Delta(B\Delta C) = A \cup (B\Delta C) \setminus A \cap (B\Delta C)$.

Como $x \notin A\Delta B$, então temos dois casos a avaliar: quando $x \in A \cap B$ e quando $x \notin A \cup B$

Caso 2.1: $x \in A \cap B$:

Como $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e logo $x \in A \cup (B\Delta C)$. Agora, como $x \in C$ e $x \in B$, temos que $x \in B \cap C$ e logo $x \notin (B\Delta C)$ concluindo assim $x \notin A \cap (B\Delta C)$.

Caso 2.2: $x \notin A \cup B$:

Notemos que $x \in B\Delta C$, pois $x \in C$ e $x \notin B$, logo $x \in A \cup (B\Delta C)$. Por fim, $x \notin A \cap (B\Delta C)$, pois $x \notin A$.

Para mostrar que

$$A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C$$

note primeiro que Δ é comutativo, ou seja, $X\Delta Y = Y\Delta X$ (prove!) logo temos que

$$A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A$$

Então pode-se repetir a prova anterior, mas trocando A por B, B por C e C por A.

A resolução dessa questão foi inspirada no começo de resolução apresentada em:

`https://www.math.ksu.edu/~dav/S2021ptset/Delta-is-assc.pdf`