Fundamentos de Matemática para a Computação

MAC 105

Aula 4

5 de Maio, Quarta-feira, 2021

Coelho & Sinai
IME, University of São Paulo

Hoje

O plano é conversarmos hoje sobre:

1. Exemplos de expansão decimal repetida e por que eles são realmente séries geométricas infinitas

Plano

Nos começaremos cada aula com um problema concreto e, no processo de resolvê-lo, desenvolveremos as idéias matemáticas, notações, e definições relevantes.

Problema.

Plano

Nos começaremos cada aula com um problema concreto e, no processo de resolvê-lo, desenvolveremos as idéias matemáticas, notações, e definições relevantes.

Problema.

Dado o decimal representação do número seguinte:

$$n := .0909090909......$$

Plano

Nos começaremos cada aula com um problema concreto e, no processo de resolvê-lo, desenvolveremos as idéias matemáticas, notações, e definições relevantes.

Problema.

Dado o decimal representação do número seguinte:

n:= .0909090909......

como um fração:

$$n = \frac{a}{b},$$

Plano

Nos começaremos cada aula com um problema concreto e, no processo de resolvê-lo, desenvolveremos as idéias matemáticas, notações, e definições relevantes.

Problema.

Dado o decimal representação do número seguinte:

n:= .0909090909......

como um fração:

$$n = \frac{a}{b},$$

onde a, b são números inteiros, e coprimos.

Usando estes ideias, vamos generalizar este problema para desenvolver uma pequena teoria de séries geométricas infinitas.

Usando estes ideias, vamos generalizar este problema para desenvolver uma pequena teoria de séries geométricas infinitas.

(Não é difícil, tá?)

Problema.

Dado o decimal representação do número seguinte:

n:= .0909090909......

como um fração:

$$n = \frac{a}{b},$$

onde a, b são números inteiros, e coprimos.

Podemos escrever:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

Podemos escrever:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= 9\left(\frac{1}{10^2}\right) + 9\left(\frac{1}{10^4}\right) + 9\left(\frac{1}{10^6}\right) + \cdots$$

Podemos escrever:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= 9\left(\frac{1}{10^2}\right) + 9\left(\frac{1}{10^4}\right) + 9\left(\frac{1}{10^6}\right) + \cdots$$

$$= 9\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right)$$

Podemos escrever:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= 9\left(\frac{1}{10^2}\right) + 9\left(\frac{1}{10^4}\right) + 9\left(\frac{1}{10^6}\right) + \cdots$$

$$= 9\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{9}{10^2}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

Até agora, temos:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

Até agora, temos:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= \left(\frac{9}{10^2}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

Até agora, temos:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= \left(\frac{9}{10^2}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

Então, se pudermos escrever esta série geométrica

de uma forma mais compacta, estaremos no negócio!

Até agora, temos:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= \left(\frac{9}{10^2}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

Então, se pudermos escrever esta série geométrica

de uma forma mais compacta, estaremos no negócio!

Nós afirmamos que:

Até agora, temos:

$$.090909.... = .09 + .0009 + .000009 + ...$$

$$= \left(\frac{9}{10^2}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

Então, se pudermos escrever esta série geométrica

de uma forma mais compacta, estaremos no negócio!

Nós afirmamos que:

$$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}.$$

Se isso for verdade, então

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right)$$

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$= \frac{9}{100-1}$$

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$= \frac{9}{100-1} \quad = \frac{9}{99}$$

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$= \frac{9}{100-1} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}. \qquad \text{(Feito)}$$

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$= \frac{9}{100-1} \quad = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}. \qquad \text{(Feito)}$$

Então, porque e verdade que

Se isso for verdade, então

$$.090909... = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$= \frac{9}{100-1} \quad = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}. \qquad \text{(Feito)}$$

Então, porque e verdade que

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}???$$

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Teorema (Série geométrica, II)

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Teorema (Série geométrica, II)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r},$$

As vezes é mais fácil resolver uma problema aínda mais geral:

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Teorema (Série geométrica, II)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$, e $a \in \mathbb{R}$.

Vamos tentar provar isso!

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = ?$$

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = ?$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = ?$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$.

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = ?$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$.

(?)

Vamos tentar provar isso!

Podemos começar com a soma FINITA:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = ?$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 1$.

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots + x^N) - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N + x^{N+1})$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + \cancel{x} + x^2 + \cdots + x^N) - (\cancel{x} + x^2 + x^3 + \cdots + x^N + x^{N+1})$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cdots + x^N) - (\cancel{x} + \cancel{x^2} + x^3 + \cdots + x^N + x^{N+1})$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cdots + \cancel{x^N}) - (\cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cdots + \cancel{x^N} + x^{N+1})$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova. Respire, relaxe e pense ...

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cdots + \cancel{x^N}) - (\cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cdots + \cancel{x^N} + x^{N+1})$$

$$= 1 - x^{N+1}.$$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova.

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots + x^N) - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N + x^{N+1})$$

$$= 1 - x^{N+1}.$$

Podemos dividir os dois lados por $1 - x$, desde que $x \neq 1$.

$\square$

Teorema.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, exceto $x = 1$.

Prova.

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^N) =$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots + x^N) - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N + x^{N+1})$$

$$= 1 - x^{N+1}.$$

Podemos dividir os dois lados por $1 - x$, desde que $x \neq 1$.

$\square$

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Isso mesmo!

Teorema (Série geométrica, I)

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Isso mesmo!

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Isso mesmo!

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Prova. Já temos:

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Isso mesmo!

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \tfrac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Podemos agora usar isso para AVALIAR a série geométrica infinita?

Isso mesmo!

Teorema (Série geométrica, I)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r},$$

onde $0 \leq r < 1$.

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \tfrac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Se sabemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r} = 0$, então

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \tfrac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Se sabemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r} = 0$, então

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \tfrac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Se sabemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r} = 0$, então

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \tfrac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Se sabemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r} = 0$, então

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0, \text{ quando } 0 \leq r < 1.$$

Prova. Já temos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}.$$

Precisamos considerar o limite dessa soma finita, como $N \to \infty$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Se sabemos que $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}}{1-r} = 0$, então

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0, \text{ quando } 0 \leq r < 1. \qquad \square$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N \to \infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Mas sempre que você escreveu no passado, qualquer representação decimal, você já presumiu que isso é verdade!

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Mas sempre que você escreveu no passado, qualquer representação decimal, você já presumiu que isso é verdade!

Você usou $r = \frac{1}{10}$,

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Mas sempre que você escreveu no passado, qualquer representação decimal, você já presumiu que isso é verdade!

$$\text{Você usou } r = \tfrac{1}{10},$$

e você assumiu que a sequência

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N \to \infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Mas sempre que você escreveu no passado, qualquer representação decimal, você já presumiu que isso é verdade!

$$\text{Você usou } r = \frac{1}{10},$$

e você assumiu que a sequência

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$$

Só precisamos usar o limite

$$\lim_{N\to\infty} r^N = 0,$$

quando $0 \leq r < 1$.

Tecnicamente, precisamos provar isso também. ;)

Mas sempre que você escreveu no passado, qualquer representação decimal, você já presumiu que isso é verdade!

$$\text{Você usou } r = \frac{1}{10},$$

e você assumiu que a sequência

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \cdots \quad \to 0.$$

Exemplo.

$$\text{Seja } n = .813813813813\cdots$$

Exemplo.

$$\text{Seja } n = .813813813813\cdots$$

Então

$$n = 8 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + 8 \cdot \frac{1}{10^4} + 1 \cdot \frac{1}{10^5} + 3 \cdot \frac{1}{10^6} + \cdots$$

Exemplo.

$$\text{Seja } n = .813813813813\cdots$$

Então

$$n = 8 \cdot \tfrac{1}{10} + 1 \cdot \tfrac{1}{10^2} + 3 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 8 \cdot \tfrac{1}{10^4} + 1 \cdot \tfrac{1}{10^5} + 3 \cdot \tfrac{1}{10^6} + \cdots$$

é chamada a representação decimal de
base 10 de n.

Exemplo.

$$\text{Seja } n = .813813813813\cdots$$

Então

$$n = 8 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + 8 \cdot \frac{1}{10^4} + 1 \cdot \frac{1}{10^5} + 3 \cdot \frac{1}{10^6} + \cdots$$

é chamada a representação decimal de base 10 de n.

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \frac{1}{10^3} + 813 \cdot \frac{1}{10^6} + 813 \cdot \frac{1}{10^9} + \cdots$$

Exemplo.

$$\text{Seja } n = .813813813813\cdots$$

Então

$$n = 8 \cdot \tfrac{1}{10} + 1 \cdot \tfrac{1}{10^2} + 3 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 8 \cdot \tfrac{1}{10^4} + 1 \cdot \tfrac{1}{10^5} + 3 \cdot \tfrac{1}{10^6} + \cdots$$

é chamada a representação decimal de base 10 de n.

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

onde $a := \frac{1}{10^3}$, e $r := \frac{1}{10^3}$.

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

onde $a := \frac{1}{10^3}$, e $r := \frac{1}{10^3}$.

Usando nossa teorema, obtemos:

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

onde $a := \frac{1}{10^3}$, e $r := \frac{1}{10^3}$.

Usando nossa teorema, obtemos:

$$n = 813 \left(\frac{a}{1-r} \right)$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$
\begin{aligned}
n &= 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots \\
&= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right) \\
&= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),
\end{aligned}
$$

onde $a := \tfrac{1}{10^3}$, e $r := \tfrac{1}{10^3}$.

Usando nossa teorema, obtemos:

$$
n = 813 \left(\frac{a}{1-r} \right) = 813 \left(\frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \right)
$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

onde $a := \frac{1}{10^3}$, e $r := \frac{1}{10^3}$.

Usando nossa teorema, obtemos:

$$n = 813 \left(\frac{a}{1-r} \right) = 813 \left(\frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \right) = 813 \left(\frac{1}{10^3 - 1} \right)$$

Exemplo. Seja $n = .813813813813\cdots$

Podemos também escrever:

$$n = 813 \cdot \tfrac{1}{10^3} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^6} + 813 \cdot \tfrac{1}{10^9} + \cdots$$

$$= 813 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots \right)$$

$$= 813 \left(a + ar + ar^2 + \cdots \right),$$

onde $a := \frac{1}{10^3}$, e $r := \frac{1}{10^3}$.

Usando nossa teorema, obtemos:

$$n = 813 \left(\frac{a}{1-r} \right) = 813 \left(\frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \right) = 813 \left(\frac{1}{10^3 - 1} \right) = \frac{813}{999}.$$

Corolário.

Corolário.

Qualquer número real que tenha uma expansão decimal:

Corolário.

Qualquer número real que tenha
uma expansão decimal:

$$x = .a_1 a_2 a_3 ... a_N \, a_1 a_2 a_3 ... a_N \, a_1 a_2 a_3 ... a_N \cdots$$

Corolário.

Qualquer número real que tenha
uma expansão decimal:

$$x = .a_1a_2a_3...a_N\,a_1a_2a_3...a_N\,a_1a_2a_3...a_N\cdots$$

pode ser representado pela fração:

Corolário.

Qualquer número real que tenha
uma expansão decimal:

$$x = .a_1a_2a_3...a_N\, a_1a_2a_3...a_N\, a_1a_2a_3...a_N \cdots$$

pode ser representado pela fração:

$$x = \frac{a_1a_2\cdots a_N}{999\cdots 9}.$$

Corolário.

Qualquer número real que tenha uma expansão decimal:

$$x = .a_1a_2a_3...a_N\, a_1a_2a_3...a_N\, a_1a_2a_3...a_N \cdots$$

pode ser representado pela fração:

$$x = \frac{a_1a_2\cdots a_N}{999\cdots 9}.$$

Prova. Isso é uma boa prática pra você.

Corolário.

Qualquer número real que tenha
uma expansão decimal:

$$x = .a_1 a_2 a_3 ... a_N \, a_1 a_2 a_3 ... a_N \, a_1 a_2 a_3 ... a_N \cdots$$

pode ser representado pela fração:

$$x = \frac{a_1 a_2 \cdots a_N}{999 \cdots 9}.$$

Prova. Isso é uma boa prática pra você.

(você não tem que entregar isso)

Pergunta. Por outro lado, é sempre possível escrever qualquer fração $\frac{a}{b}$ como uma expansão decimal repetida?

Pergunta. Por outro lado, é sempre possível escrever qualquer fração $\frac{a}{b}$ como uma expansão decimal repetida?

Se isso é sempre possivel, temos uma teorema sobre repetindo expansões decimais com um frase "se e somente se"!

Pergunta. Por outro lado, é sempre possível escrever qualquer fração $\frac{a}{b}$ como uma expansão decimal repetida?

Se isso é sempre possivel, temos uma teorema sobre repetindo expansões decimais com um frase “se e somente se”!

Você pode escrever este frase?

Sobremsa.

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido,
usando nossas ideias de hoje?

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido, usando nossas ideias de hoje?

Solução.

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido, usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n =$$

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido, usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n = \; b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) =$$

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido,
usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n = \; b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) = \quad b^n \left(x^n - 1 \right),$$

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido, usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n = \; b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) = \quad b^n \left(x^n - 1 \right),$$

onde $x := \frac{a}{b}$.

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido,
usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n = \ b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) = \quad b^n \left(x^n - 1 \right),$$

onde $x := \frac{a}{b}$.

Mas já sabemos que

Sobremsa.

Você pode fatorar $a^n - b^n$ rapido,
usando nossas ideias de hoje?

Solução.

$$a^n - b^n = \; b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) = \quad b^n \left(x^n - 1 \right),$$

onde $x := \frac{a}{b}$.

Mas já sabemos que

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

Sobremsa.

Solução.

$$a^n - b^n = b^n\left(\frac{a^n}{b^n} - 1\right) = b^n\left(x^n - 1\right),$$

$$= b^n(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$$

$$= b^n(\tfrac{a}{b}-1)(1+\tfrac{a}{b}+\left(\tfrac{a}{b}\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{a}{b}\right)^{n-1})$$

$$= (a-b)(b^{n-1}+ab^{n-1}+a^2b^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$$

A propósito, já conhecíamos o caso $n = 2$:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Exemplo. O número inteiro 973 é primo ou não?

Podemos escrever 973 como $a^n - b^n$?

Sim! $973 = 1000 - 27 = 10^3 - 3^3$

$$a^n - b^n = (a-b)(b^{n-1} + ab^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad 973 = 10^3 - 3^3 = (10-3)(3^2 + 10 \cdot 3 + 10^2)$$

$$= (7)(139).$$

$\Longrightarrow$ Não é primo.

Se cuidem!