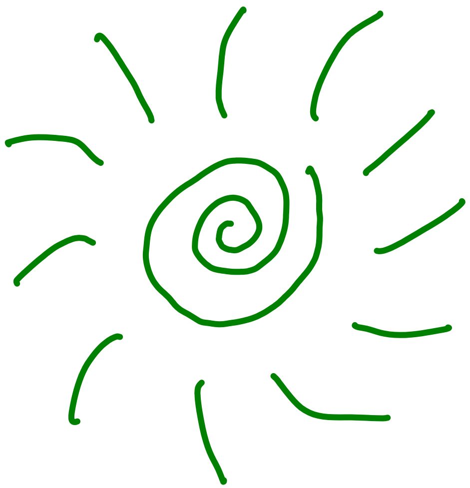
MAC 0329

01/06/2021



Bom dia!!

$\langle B, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle \qquad B = \{0, 1\}$

Expressões booleanas em $\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}$

variaváveis que tomam valor em B

$x_1 + x_2 \quad , \forall x_1, x_2 \in B$

Produto: $x_1 x_2 \dots x_n \quad , \quad x_1 \overline{x_2}$

Soma: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad , \quad x_2 + x_5 \quad , \quad \overline{x_1}$

Expressões booleanas definem uma <u>função booleana</u>.

$x_1(x_2+\bar{x}_3)$ (3 variáveis)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\overbrace{(x_2+\bar{x}_3)}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Produtos canônicos

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 x_2 x_3$

$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $x_1 \bar{x}_2 x_3$, $x_1 x_2 \bar{x}_3$, $x_1 x_2 x_3$

n variáveis $\Longrightarrow$ 2^n produtos canônicos

n variáveis $\Longrightarrow$ 2^n diferentes formas de atribuição de valores a elas

cada produto toma valor 1 p/ apenas 1 atribuição de valores

$$x_1 \overline{x_2} x_3 = 1 \iff x_1 = 1,\ x_2 = 0 \text{ e } x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3	$x_1(x_2+\overline{x_3})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\underbrace{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3}$$

$$f : B^n \to B$$

$$B = \{0,1\}$$

$$F(n) = \{ f : B^n \to B \}$$

$$(f+g)(x) = \overbrace{f(x)}^{B} + \overbrace{g(x)}^{B}$$

$x \in B^n$ $x \in B^n$ $x \in B^n$

definido em $F(n)$

definido em B

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$$

A1 $f+g = g+f$

$f \cdot g = g \cdot f$

$$(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) + g(x)$$

$$= g(x) + f(x)$$

$$\overset{\text{def}}{=} (g+f)(x)$$

A2 $f(g+h) = fg + fh$

$f + gh = (f+g)(f+h)$

A3 $f + 0 = f$

$f \cdot 1 = f$

A4 $f + \overline{f} = 1$

$f \cdot \overline{f} = 0$

$F(n) = \{ f : B^n \to B \}$ é uma álgebra booleana.

$$\boxed{f \leq g \iff f + g = g}$$

$\boxed{f \text{ é átomo se } \bar{\exists}\ \text{existe } g \neq 0 \text{ tal que}}$ $0 < g < f$

em $F(n)$ em B

$$\boxed{f \leq g \iff \underline{f(x) \leq g(x)}} \quad \forall x \in B^n$$

0

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$x_1 x_2$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_2$ $\quad$ $\bar{x}_1 x_2$ $\quad$ $\bar{x}_1 \bar{x}_2$

$2^2 = 4$

Produtos canônicos

$f \leq g$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 = 1 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 x_2 = 1 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

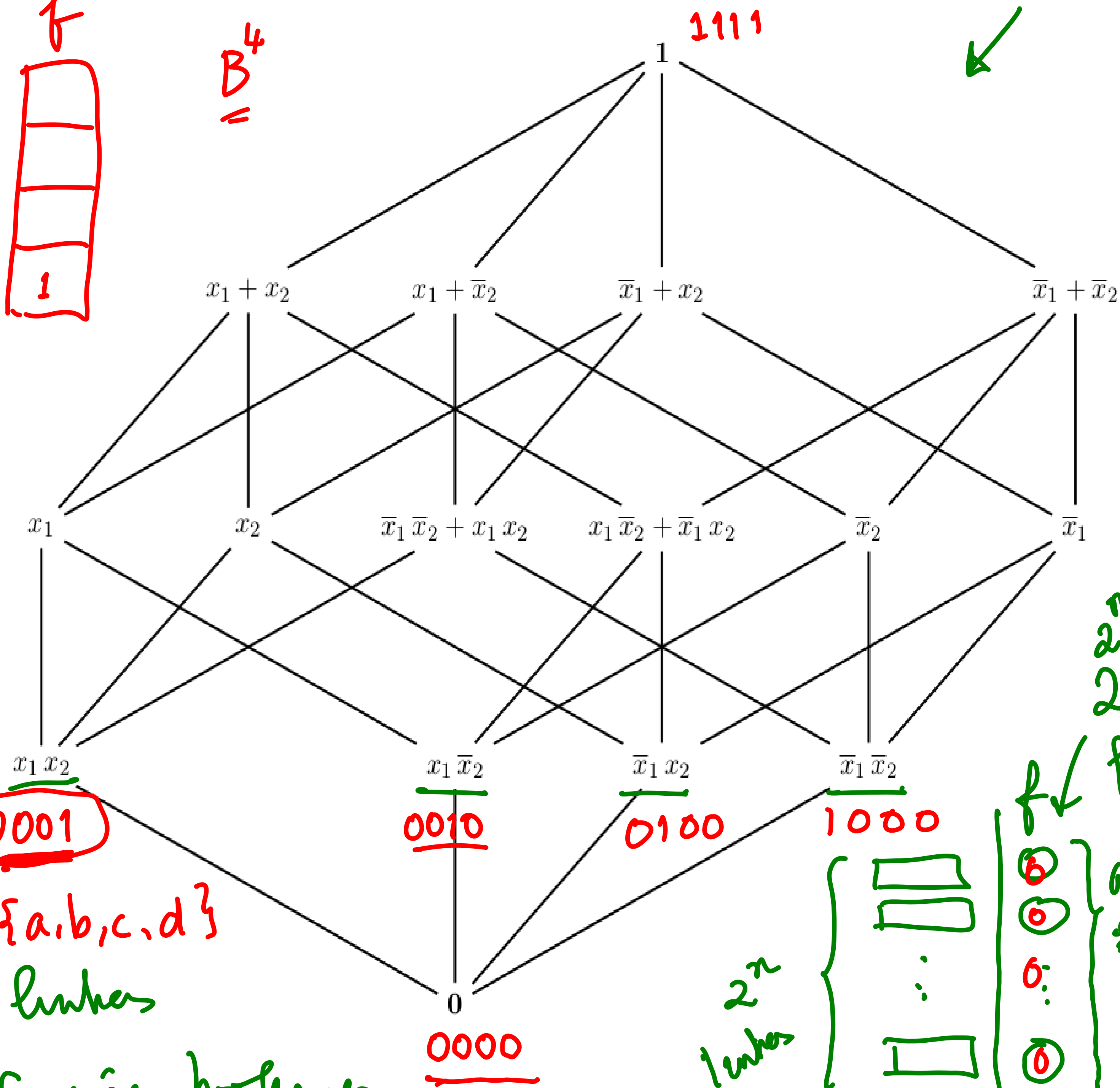
$$x_1 \bar{x}_2 = 1 \iff x_1 = 1,\ x_2 = 0$$

$$x_1 x_2 = 1 \iff x_1 = 1,\ x_2 = 1$$

x_1	x_2	f
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	1

B^4

$f_0(x_1,x_2) = 0$
$f_1(x_1,x_2) = x_1\,x_2$
$f_2(x_1,x_2) = x_1\,\overline{x}_2$
$f_3(x_1,x_2) = x_1$
$f_4(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,x_2$
$f_5(x_1,x_2) = x_2$
$f_6(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,x_2 + x_1\,\overline{x}_2$
$f_7(x_1,x_2) = x_1 + x_2$
$f_8(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2$
$f_9(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 + x_1\,x_2$
$f_{10}(x_1,x_2) = \overline{x}_2$
$f_{11}(x_1,x_2) = x_1 + \overline{x}_2$
$f_{12}(x_1,x_2) = \overline{x}_1$
$f_{13}(x_1,x_2) = \overline{x}_1 + x_2$
$f_{14}(x_1,x_2) = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$
$f_{15}(x_1,x_2) = 1$



$S = \{a, b, c, d\}$

$n = 2$

2^n ~~$x_1\,x_2$~~ linhas

$2^{2^2} = 16$ funções booleanas

2^n linhas

f

0
0
0
0

2^{2^n} formas de atribuir valor

$\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ é isomorfismo se

$$\psi(f + g) = \underbrace{\psi(f)} + \underbrace{\psi(g)}$$

$$\psi(f \cdot g) = \psi(f) \cdot \psi(g)$$

$$\psi(\bar{f}) = \overline{\psi(f)}$$

$$\psi(0_1) = 0_2$$

$$\psi(1_1) = 1_2$$

x_1	x_2	x_3	$x_1(x_2+\overline{x_3})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

→ Soma de produtos canônicos

$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

Produto de somas canônicas

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x_3})(x_1+\overline{x_2}+x_3)$$
$$(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{i_1} + P_{i_2} + \cdots + P_{i_k}$$

$$\overline{\overline{f}} = f$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\overline{P_{i_1} + P_{i_2} + \cdots + P_{i_k}}}$$

$$= \overline{\underbrace{\overline{P_{i_1}}} \cdot \underbrace{\overline{P_{i_2}}} \cdot \cdots \cdot \overline{P_{i_k}}}$$

De Morgan

Teorema: Se $f : B^n \to B$ é uma função booleana então

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \underbrace{f(0, \underbrace{x_2, \ldots, x_n}_{})}_{} + x_1 f(1, \underbrace{x_2, \ldots, x_n}_{})$$

$$f_1 : B^{n-1} \to B$$

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 f(0, x_2) + x_1 f(1, x_2)$$

$$= \bar{x}_1 \left[\bar{x}_2 f(0,0) + x_2 f(0,1) \right] + x_1 \left[\bar{x}_2 f(1,0) + x_2 f(1,1) \right]$$

$$= \underbrace{f(0,0)}_{} \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2}_{} + \underbrace{f(0,1)}_{} \underbrace{\bar{x}_1 x_2}_{} + \underbrace{f(1,0)}_{} \underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{} + \underbrace{f(1,1)}_{} \underbrace{x_1 x_2}_{}$$

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 f(0, x_2) + x_1 f(1, x_2)$$

$$= \bar{x}_1 \left[\bar{x}_2 f(0,0) + x_2 f(0,1)\right] + x_1 \left[\bar{x}_2 f(1,0) + x_2 f(1,1)\right]$$

$$= \underbrace{f(0,0)}_{0} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \underbrace{f(0,1)}_{1} \bar{x}_1 x_2 + \underbrace{f(1,0)}_{1} x_1 \bar{x}_2 + \underbrace{f(1,1)}_{0} x_1 x_2$$

$$\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

$$x_1 (x_2 + \bar{x}_3)$$

$$x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_3$$