MAC0329 27/05/2021

Esta é a versão "a limpo" das anotações de hoje.

A aula de hoje foi meio confusa; ninguém merece aula confusa + anotações caótica ...

Revisão: nas últimas aulas vimos

- Relação de ordem parcial, definida por

$$x \leq y \iff x + y = y$$

- átomos:

  $x \in A$ é um átomo se não é possível escrever ele na forma $y + z$ com $y \neq x$ e $z \neq x$.

  (ou, equivalentemente, $\bar{\text{n}}$ existe y tq. $0 < y < x$, $y \neq 0$)

- Qualquer $x \in A$ pode ser escrito como união (soma) de átomos, de forma única. Especificamente

$$x = \bigvee \{ a \in A : a \text{ é átomo e } a \leq x \}$$

(união de todos os átomos menores ou iguais a x)

Essas definições e resultados servem para mostrar que duas álgebras booleanas com o mesmo nº de átomos são isomorfas.

Para isso, vamos primeiramente definir o que é isomorfismo entre álgebras booleanas.

Sejam duas álgebras booleanas:

$$\mathcal{A}_1 = \langle A_1, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle A_2, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$$

Uma função $\phi : A_1 \to A_2$ é um isomorfismo se

i) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\forall x, y \in A_1$

ii) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, $\forall x, y \in A_1$

iii) $\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$, $\forall x \in A_1$

Quando existe um isomorfismo entre as álgebras booleanas A_1 e A_2, dizemos que elas são <u>isomorfas</u>.

Teorema: Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são duas álgebras booleanas com o mesmo número de átomos, digamos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ (átomos de $\mathcal{A}_1$) e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ (átomos de $\mathcal{A}_2$), existe um isomorfismo $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ tal que

$$\phi(a_i) = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Para mostrar esse teorema, uma forma é construir uma ϕ que satisfaz $\phi(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ e mostrar que ela é um isomorfismo.

Construção de ϕ :

$\phi(a_i) = b_i$ (átomos mapeados p/ átomos)

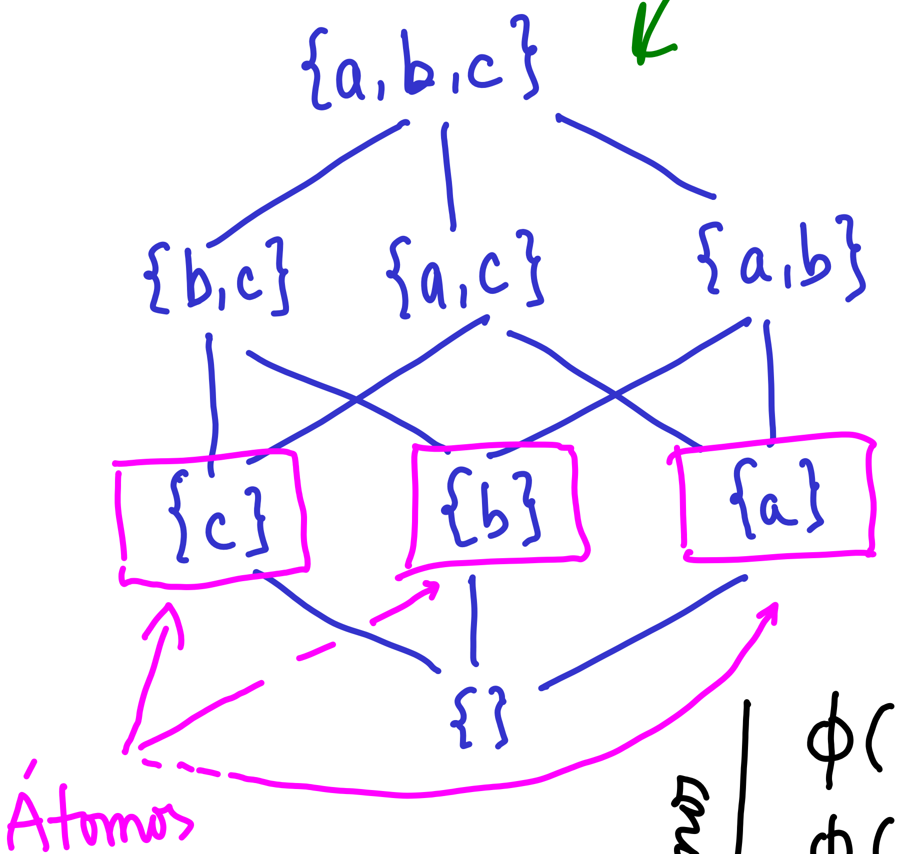
$$\phi(x) = \phi(\underbrace{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}}_{\text{essa é a decomposição de } x \text{ como soma de átomos}}) = \phi(a_{i_1}) + \phi(a_{i_2}) + \dots + \phi(a_{i_k})$$

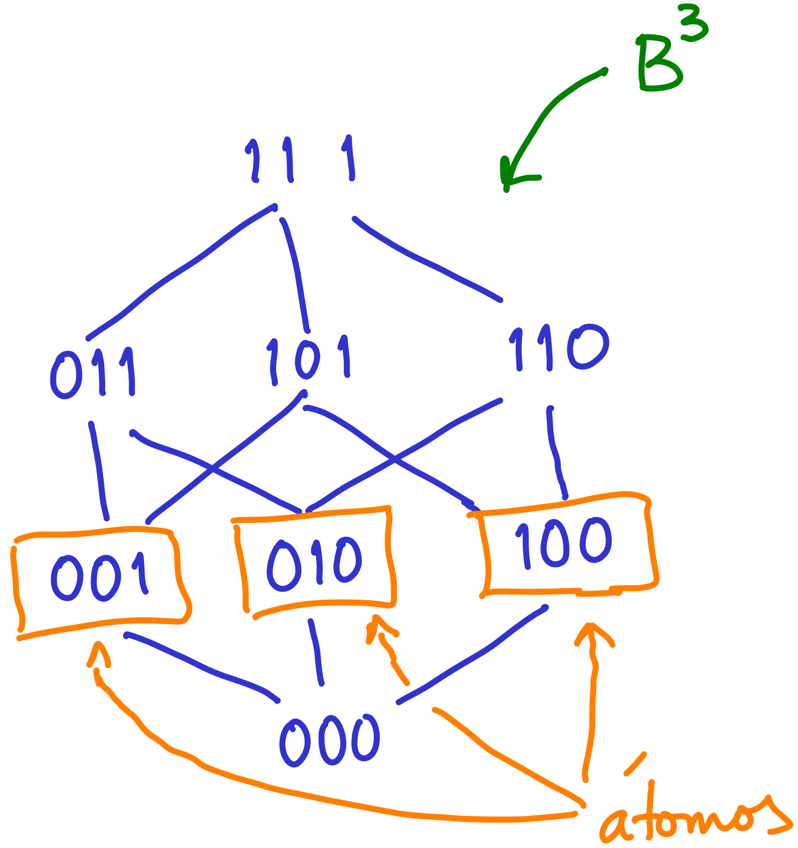
estou definindo a imagem de x desta forma

Agora teríamos que mostrar que ϕ é isomorfismo.

Vamos aceitar, em paz ☺

Exemplo





Átomos

$\phi(\{a\}) = 100$

$\phi(\{b\}) = 010$

$\phi(\{c\}) = 001$

ñ átomos (Exemplo): $\phi(\{b,c\}) = \phi(\{b\} \cup \{c\}) = \phi(\{b\}) + \phi(\{c\})$

$010 + 001 = 011$

Definimos de forma similar p/ outros.

Assim, eu teria

$\phi(\{a\}) = 100$

$\phi(\{b\}) = 010$

$\phi(\{c\}) = 001$

$\phi(\{a,b\}) = \phi(\{a\}) + \phi(\{b\}) = 110$

$\phi(\{a,c\}) = \phi(\{a\}) + \phi(\{c\}) = 101$

$\phi(\{b,c\}) = \phi(\{b\}) + \phi(\{c\}) = 011$

$\phi(\{a,b,c\}) = \phi(\{a\}) + \phi(\{b\}) + \phi(\{c\}) = 111$

$\phi(\{\}) = 000$

Definição completa do ϕ

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ \phi(X \cup Y) = \phi(X) + \phi(Y) \\ ii)\ \phi(X \cap Y) = \phi(X) \cdot \phi(Y) \\ iii)\ \phi(X^c) = \overline{\phi(X)} \end{array}}$$

Para mostrar que é isomorfismo, precisamos mostrar isso.

(Ver notas de aula)

➡ Uma consequência importante do teorema anterior é que qualquer álgebra booleana com n átomos é isomorfa à algebra booleana

$$\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, S \rangle$$

na qual $|S| = n$ (cardinalidade de S é n).

Assim, na dúvida, sempre podemos recorrer ao $\mathcal{P}(S)$!

→ Agora vamos mudar um pouco de assunto e pensar em <u>expressões booleanas em n variáveis</u>, $x_1, x_2, \dots, x_n$.

→ Vamos supor que $x_1, x_2, \dots, x_n$ tomam valor em $\{0,1\} = B$.

Exemplos de expressão booleana (n variáveis)

0

1

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$

$x_1 + x_3, \quad x_2 + x_3 + \overline{x_4}, \ldots, x_1 x_2, \ldots$

$x_1 x_1 (x_2 + x_3), \quad \overline{x_1 + x_2}, \ldots$

$x_1 \overline{x_2} + x_3 \overline{x_4} + x_5, \ldots$

(se quiserem, podem pensá-las como regras de cálculo e aplicá-las para qualquer valoração das variáveis)

Expressões do tipo produto

x_1

$x_1 x_2 \quad , \quad x_1 \overline{x}_2$

$x_1 x_3 x_5 \quad \ldots$

Produto canônico (3 variáveis)

$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \; , \; \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \; , \; \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \; , \; \overline{x}_1 x_2 x_3$

$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \; , \; x_1 \overline{x}_2 x_3 \; , \; x_1 x_2 \overline{x}_3 \; , \; x_1 x_2 x_3$

Há 2^n produtos canônicos!

➡ Uma expressão booleana em n variáveis define uma função $f: B^n \to B$

<u>Exemplo</u>: $n = 2$

$$f(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$$

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2$$

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

➡ OK, uma expressão booleana define uma função $f: B^n \to B$.

➡ Será que toda função $f: B^n \to B$ pode ser definida por uma expressão booleana em n variáveis?

Exemplo:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\Longrightarrow f(x_1, x_2) = \underbrace{\bar{x}_1 x_2} + \underbrace{x_1 x_2}$$

Note :

produtos canônicos $\rightsquigarrow$ toma valor 1 quando

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \rightsquigarrow x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

$\bar{x}_1 x_2 \rightsquigarrow x_1 = 0$ e $x_2 = 1$

$x_1 \bar{x}_2 \rightsquigarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 0$

$x_1 x_2 \rightsquigarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 0$

Funções definidas pelos produtos canônicos

$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 x_2$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

posso definir qualquer outra função somando alguns desses produtos canônicos!

Não perca o próximo capítulo:

vamos mostrar que o conjunto

$$F(n) = \{ f : B^n \to B \}$$

com

$$(f+g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)$$

$$(f \cdot g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

é uma ÁLGEBRA BOOLEANA!!!