Revisão

- Relação de ordem parcial

$$x \leq y \iff x + y = y$$

- Átomos

x é átomo se ñ podem ser escritos como $y + z$ com $y \neq x$ e $z \neq x$

- $\forall x$ é escrito como união de átomos, de forma única.

$$x = \bigvee \{ a : a \leq x \}$$

Isomorfismo

$$\mathcal{A}_1 = \langle A_1, +, \cdot, \bar{\ }, 0_1, 1_1 \rangle$$
$$\mathcal{A}_2 = \langle A_2, +, \cdot, \bar{\ }, 0_2, 1_2 \rangle$$

têm a mesma quantidade de átomos

$\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que

$$\Rightarrow \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$
$$\Rightarrow \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$
$$\Rightarrow \phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$$

$\mathcal{A}_1 = \langle A_1, +, \cdot, -, 0_1, 1_1 \rangle \Rightarrow At(A_1) = \{a_1, \dots, a_n\}$

$\mathcal{A}_2 = \langle A_2, +, \cdot, -, 0_2, 1_2 \rangle \Rightarrow At(A_2) = \{b_1, \dots, b_n\}$

<u>Definir $\phi : A_1 \to A_2$</u>.

$\phi(a_i) = b_i$ $\leftarrow$ a_i é átomo de A_1

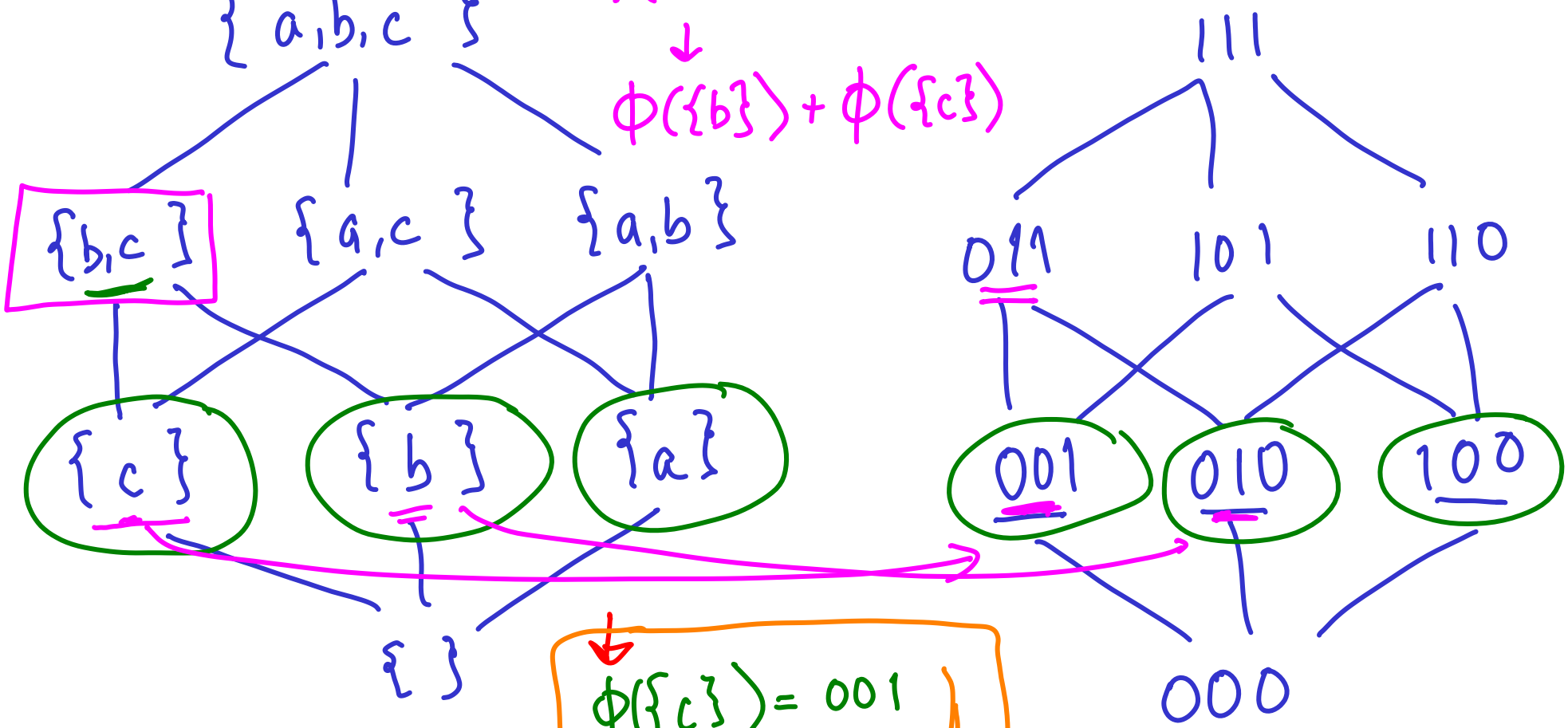
$$\phi(x) = \phi(\underbrace{a_{i_1} + \dots + a_{i_k}}_{\subseteq At(A_1)}) = \underbrace{\phi(a_{i_1}) + \phi(a_{i_2}) + \dots + \phi(a_{i_k})}$$

qualquer elemento de A_1

$\phi(\{b,c\}) = 010 + 001 = 011$

$\downarrow$

$\phi(\{b\}) + \phi(\{c\})$



$\phi(\{c\}) = 001$

$\phi(\{b\}) = 010$

$\phi(\{a\}) = 100$

$\phi(\{b,c\}) = \phi(\{b\} \cup \{c\})$

$= \phi(\{b\}) + \phi(\{c\})$

$\mathcal{P}(\{a,b,c\})$

$\underline{\underline{A}}_1$

$\underline{\underline{B}}^3$

$B = \{0,1\}$

$\underline{\underline{A}}_2$

$$\phi(\underbrace{\{b,c\}}_{x} \cup \underbrace{\{a,c\}}_{x}) = \phi(\{b,c\}) + \phi(\{a,c\})$$

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

$$\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$$

Toda álgebra booleana com n átomos é isomorfa à álgebra booleana

$$\boxed{\langle \mathcal{P}(\underline{\underline{S}}), \cup, \cap, {}^c, \phi, S \rangle}$$

com $\underline{\underline{S}}$ de n elementos.

$$\boxed{\langle B, +, \cdot, \overline{}, 0, 1 \rangle}$$

$B = \{0,1\}$

Expressões booleanas sobre B em n variáveis, $x_1, \dots x_n$,

- 0 e 1 são exp. booleanas
- $x_1, \dots, x_n$ são exp. booleanas
- se x e y são exp. booleanas então $x+y$, $x \cdot y$ e $\overline{x}$ também são.
- Qualquer exp. booleana é uma exp. construída aplicando-se as regras anteriores um nº ∞ de vezes.

Exemplos

$B = \{0, 1\}$

0

1

x_1

$x_1 + x_2$

$x_1 + x_3 x_4$

$x_1 (x_2 + x_3)$

$\overline{x_1} + x_2$

$x_1 + x_1 + x_1$

Função booleana em n variáveis

$$\boxed{f : B^n \to B}$$ tal que existe uma expressão booleana que a define.

$$(x_1 \ldots x_n) \to f(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\in B^n})$$

$$f(\underbrace{a_i, b_i, c_i}_{\in B^3}) \to \underset{\in B}{s_i}$$

Adição

$f : B^{16} \to B^{8}$

- $A \Rightarrow 8$ bits
- $B \Rightarrow 8$ bits

entrada

- $R \Rightarrow 8$ bits

$R = A + B$.

saída.

$$f(\underbrace{a_1 \ \dots \ a_8}, \underbrace{b_1 \ \dots \ b_8}) = (s_1, \dots, s_8)$$

$(f_1(\_), f_2(\_), \dots, f_8(\_))$

$$f_1(\underbrace{a_1 \dots a_8}, \underbrace{b_1 \dots b_8}) = s_1$$

$$\boxed{f_i : B^{16} \to B}$$

$$\langle A, +, \cdot, \bar{\ }, \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{1}} \rangle$$

$$0, 1 \in A, \quad 0 \underline{\underline{\neq}} 1$$

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Expressão **PRODUTO** n variáveis

são

$x_1 x_2$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_2 x_5$ $\quad$ x_1 $\quad$ $x_2 x_7$

$\underline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}$

não são

$x_1 + x_2$ $\quad$ $x_1(x_2 + x_3)$

$x_1 x_1$ $\quad$ $x_1 \bar{x}_1$ $\quad$ $\underline{x_2 x_3 x_3}$

$\underline{x_1 x_2 x_3}$

SOMA

sas

x_1 $\quad$ $x_1 + x_2$ $\quad$ $x_2 + \overline{x}_3$

nas sas

$x_1 + x_1$

$x_1 (x_2 + x_3)$ $\quad$ $x_1 + x_2 \overline{x}_3$

PRODUTO CANÔNICO

$n = 3 \longrightarrow 2^n$ produtos canônicos

$\boxed{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}$ $\quad x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$ $\quad x_1 \bar{x}_2 x_3$

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ $\quad x_1 x_2 \bar{x}_3$

$\bar{x}_1 x_2 x_3$ $\quad x_1 x_2 x_3$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

⇒ <u>Produtos canônicos</u> definem $f(x_1, \ldots, x_n)$ que toma valor 1 p/ apenas uma entrada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$.

$$\boxed{F(n) = \{ f : B^n \to B \}}$$

$\{0,1\}$

2^n

3^{3^n}

2^{2^n}

$2^8 = 256$

$\boxed{n=3}$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2^n

$$(\underline{\underline{F(n)}}, \leq)$$

	f		g
000	0	$\leq$	0
001	0	$\leq$	0
010	1	$\leq$	1
011	0	$\leq$	1
100	1	$\leq$	1
101	1	$\leq$	1
110	0	$\leq$	0
111	0	$\leq$	1

$f, g \in F(n)$

$$f \leq g \iff \underline{f(x) \leq g(x)} \quad \forall x \in B^n$$

$+, \cdot, \bar{\ }$

$\forall x \in B^n \rightarrow f(x) = ?$

$x_1 \; \dots \; x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
0 . . . 0	
1 . . . 1	

$= 2^n$

$\rightarrow$ 0 ou 1

$y = f(x)$

2^n

1		. . .	2^n
0/1			0/1

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \quad \cdots \quad \cdot 2}_{2^{2^n}}$

B^n que tem 2^n

$f : B^n \rightarrow B$

$$\underline{f : B^2 \to B}$$