MAC 0329

FRIO DIA!

25/05/2021

	sem sinal	com sinal
$\begin{array}{r} 1 \\ 101 \\ +\ 001 \\ \hline 110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 1 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} -3 \\ +\ 1 \\ \hline -2 \end{array}$

Revisão

Relação de ordem parcial

Em Álgebra Booleana.

$$\boxed{x \leq y \iff x + y = y}$$

é uma relação de ordem parcial

i) $x \leq x$

ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$$x \le y \iff xy = x$$

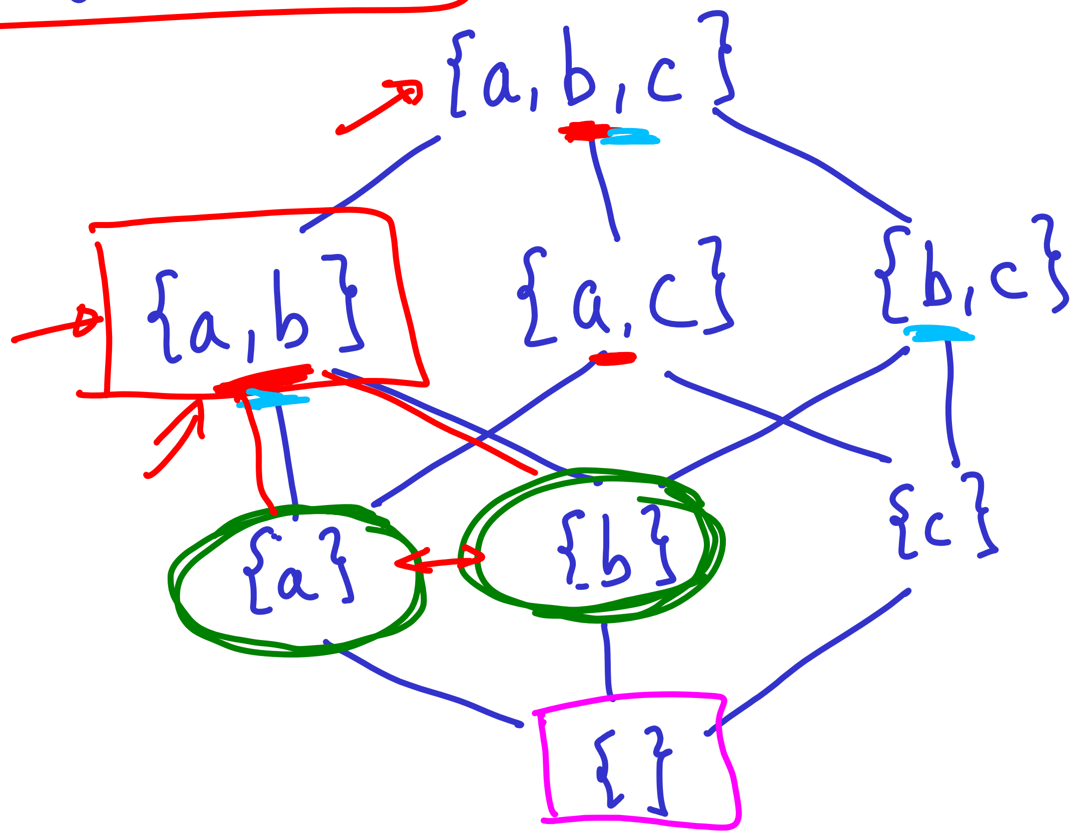
$$\boxed{x \le y \iff x + y = y}$$

$$\{a\} \overset{\cup}{+} \{b\} = \{a, b\}$$

$$\{a\} \underset{\cap}{\cdot} \{b\} = \{\,\}$$

$$\{a\} + \{a, b\} = \{a, b\}$$

$$x + y = y$$



Átomos (supondo $\leq$)

$x \in A$ é um átomo se e somente se

x não pode ser escrito na forma

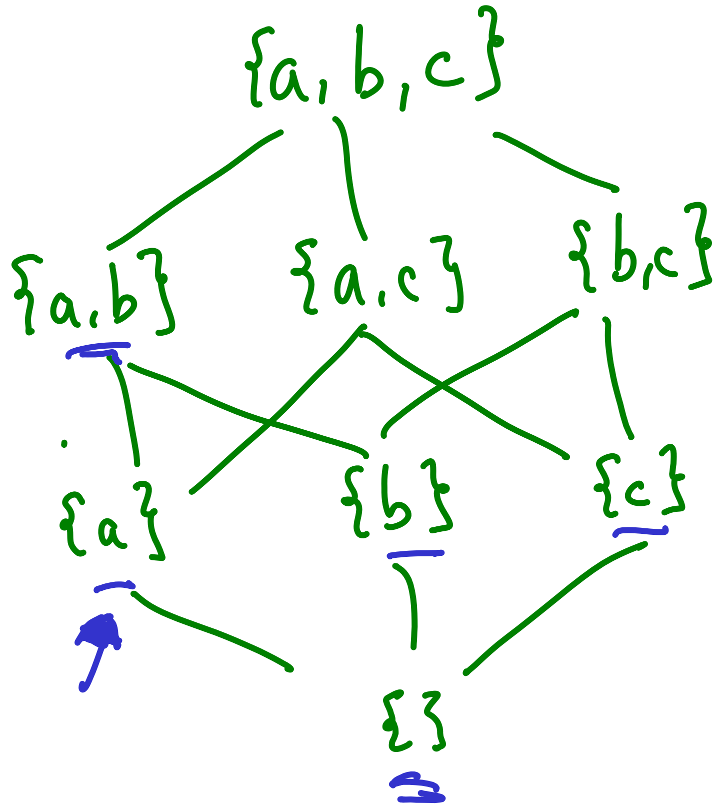
n̄ nulo

$$x = y + z$$

com $y \neq x$ e $z \neq x$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \{a,b\} = \underbrace{\{a\}}_{y} \cup \underbrace{\{b\}}_{z} \end{array}}$$

n̄ é átomo



Teorema: $x \neq 0$ é um átomo se e somente se não existe $y \in A$ tal que $0 < y < x$.

$<$

($\Rightarrow$) se x é átomo $\Rightarrow$ $\nexists\, y$ tq $0 < y < x$

($\Leftarrow$) se $\nexists\, y$ tq $0 < y < x$ $\Rightarrow$ x é átomo.

x é átomo $\Rightarrow \boxed{\nexists\, y \text{ tq } \boxed{0 < y < x}}$

- x é átomo
- y é tal que $y < x \Rightarrow \underbrace{y \leq x}$ e $y \neq x$ **

Se $y \leq x \Rightarrow \begin{cases} x + y = \boxed{y + x = x} \quad (*) \\ xy = y \quad (***) \end{cases}$

$\boxed{x} = x \cdot 1 = \underbrace{(y+x)}_{*}(y+\bar{y}) \overset{A2}{=} \boxed{y + x\bar{y}}$

→ Substituindo **** em ***

$\underbrace{(x\bar{y})}_{x} y = y$

$x\bar{y}y = x0 = 0 = y$

$y = 0$.

Como x é átomo, $\cancel{y = x}$ ou $x\bar{y} = x$

** ****

$\boxed{x = y + z}$

Teorema: $\underline{\underline{A}}$ álgebra booleana

$\underline{\underline{AT}} \subseteq A$ é o conjunto de átomos de A.

$\Rightarrow$ Cada elemento $\underline{x \neq 0}$ em A pode ser escrito na forma

$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$

$$\boxed{x = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}}$$

na qual $\underline{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} \subseteq AT}$.

Essa forma é única, a menos da ordem dos a_{i_j}.

Esqueleto da demonstração.

i) Mostramos que $x = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$

(sempre é possível escrever x como soma de átomos — não sei quais)

ii) $B = \{ \underline{a \in AT} : \underline{a \leq x} \}$

$$x = \bigvee_{a \in B} a$$

iii) Unicidade da "decomposição".

$y > y' > y'' > \cdots\cdots > y'''''''''' > \cdots$

$y = y' + z'$

$$\boxed{x = \underbrace{y}_{} + \underbrace{z}_{}}$$

x não é átomo

$y' < y$

$$x = \underbrace{y + y} + z$$

$$= y + \underbrace{(y + z)}_{x}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{y \leq x} \Longrightarrow y \lneq x$$

ii) $B = \{ a \in AT : \underline{\underline{a \leq x}} \}$

$$x = \bigvee_{a \in B} a$$

$$x = x \cdot \underset{=}{1} = x \cdot (\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}) $$

$$= \boxed{\underbrace{x a_1} + x a_2 + \dots + x a_n}$$

$$\boxed{x a_i \leq a_i} \Rightarrow \begin{cases} x a_i = 0 \\ \text{or} \\ \boxed{x a_i = a_i} \Longleftrightarrow \underline{\underline{a_i \leq x}} \end{cases}$$

$$x a_i \leq x$$

iii) Unicidade

$$x = \underbrace{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}} \quad (*)$$

qualquer a_{i_j} em (*) está no B e vice-versa.

$$a \le x$$

$\{a, b, c\} \rightsquigarrow 111$

$\{a, b\} \rightsquigarrow 11\underline{0}$