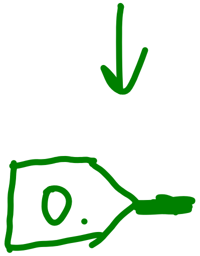
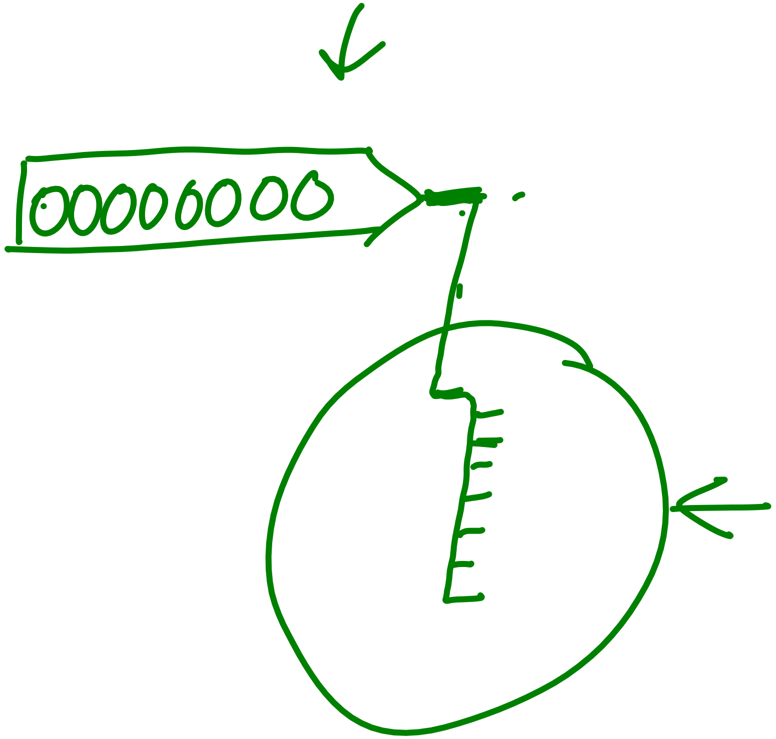
MAC 0329

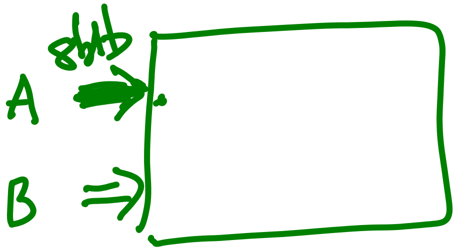
20/05/2021

$$\langle A, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$$



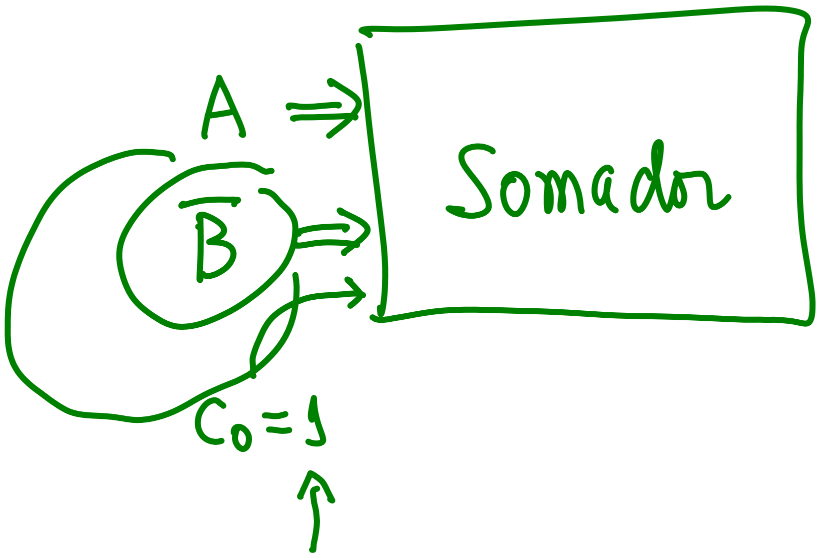


8 bits

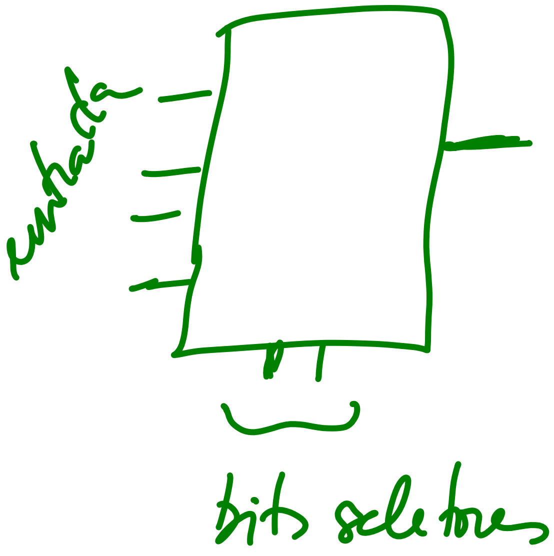


$$A + B$$

$$\underline{A - B} = \underbrace{A + (\bar{B} + 1)}$$



MUX



Axiomas

A1 $x+y=y+x$

$xy=yx$

A2 $x(y+z)=xy+xz$

$x+yz=(x+y)(x+z)$

A3 $x+0=x$

$x1=x$

A4 $x+\overline{x}=1$

$x\overline{x}=0$

Propriedades

- Unicidade do 0 e do 1
- $x+x=x$, $x.x=x$
- $x+1=1$, $x0=0$
- $\overline{1}=0$, $\overline{0}=1$
- $x+xy=x$, $x(x+y)=x$
- unicidade do $\overline{x}$
- $\overline{\overline{x}}=x$
- associativa
- $\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{x+y}=\overline{x}\,\overline{y}$

Exemplos

$$\boxed{a+\bar{a}b = a+b} \quad ?$$

$$a+\bar{a}b \overset{A2}{=} \underbrace{(a+\bar{a})}(a+b)$$

$$\overset{A4}{=} 1 \cdot (a+b)$$

$$\overset{A3}{=} a+b$$

//.

$$a\cdot(\bar{a}+b) \overset{?}{=} a\cdot b$$

$$a(\bar{a}+b) = a\bar{a}+ab$$

$$= 0+ab$$

$$= ab$$

Exemplo 2

$$b\bar{c}\,(\underbrace{\bar{c}+\bar{c}a}_{\text{absorção}}) + \overbrace{(\bar{a}+\bar{b})}^{\overline{ab}}(\underbrace{\bar{a}b+\bar{a}c}_{A2})$$

$$= \underbrace{b\bar{c}\bar{c}} + \underbrace{(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{a}}_{\text{absorção}}(b+c)$$

$$= b\bar{c} + \bar{a}(b+c)$$

$$= b\bar{c} + \underline{\bar{a}b} + \bar{a}c$$

$$= \underline{b\bar{c} + \bar{a}c}$$

Exercício :)

Relação de ordem parcial

Relação binária sobre A

É um subconjunto de $A \times A$.

$$A \times A = \{ (x, y) : x, y \in A \}$$

$R \subseteq A \times A$ se $(x, y) \in R \rightsquigarrow xRy$

Exemplo de $\underline{\underline{R}}$

$A : \mathbb{R}$ (reais)

$\leq$

$x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x \leq y}}$

$1 \leq 5.2$ $\qquad$ $(1, 5.2) \in R$

$3 \nleq 1$ $\qquad$ $(3, 1) \notin R$

Relação de ordem parcial

$\leq \sim R \subseteq A \times A$

Uma relação binária $\leq$ sobre A é uma relação de ordem parcial se:

i) $x \leq x$, $\forall x \in A$ (reflexiva)

ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in A$ (anti-simétrica)

iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

$(x,x) \in R$

$\left.\begin{matrix}(x,y)\\(y,x)\end{matrix}\right\} \in R$

$\left.\begin{matrix}(x,y)\\(y,z)\end{matrix}\right\} \in R$

$\Downarrow$

$(x,z) \in R$

ii) $x \leq y \overset{\Leftrightarrow}{e} y \leq x$ (simétrica) $\Leftarrow$ Relação de Equiv.

Conjunto parcialmente ordenado $\underbrace{(A, \leq)}$

A com uma relação de ordem parcial $\leq$

$\subseteq \longrightarrow$ é uma relação de ordem parcial

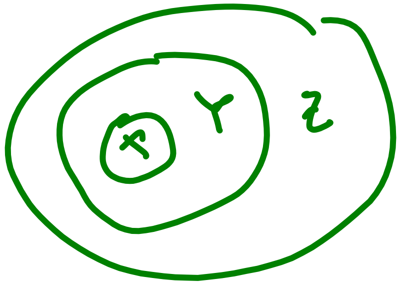
$(\mathcal{P}(S), \subseteq)$

i) $X \subseteq X, \ \forall X \in \mathcal{P}(S)$ ← reflexiva

ii) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$ ← anti-simétrica

$A \subseteq B$

iii) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ ← transitiva



$S = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(S) = \{ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

$(\mathcal{P}(S), \subseteq)$

$\{a,b,c\}$

$\{a,b\}$

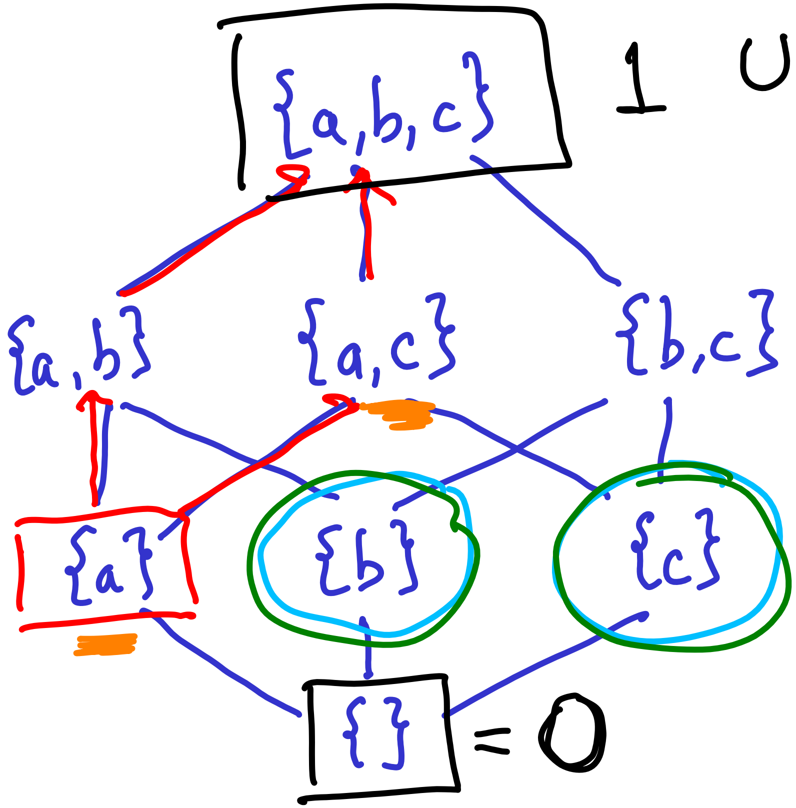
$\{a\}$

$\{\}$

$\{a\} \subseteq \{a,b\}$

$\{\} \subseteq \{a\}$

$\{\} \subseteq \{a,b,c\}$



$X + \bar{X} = 1$

$\rightarrow \langle \underline{A}, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$

Definir : $\underline{\underline{\leqslant}}$ da seguinte forma

$$\boxed{x \leqslant y \iff x + y = y}$$ definição

Vamos mostrar que $\leqslant$ é uma relação de ordem parcial

i) $x \leqslant x$? $\qquad x + x \stackrel{?}{=} x$ é verdade $\rightarrow$ reflexiva ✓

ii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$

$$x \leqslant y \xrightarrow{\text{def}} x + y = y \qquad y \leqslant x \rightarrow \underbrace{y + x}_{x+y} = x \Rightarrow x + y = x$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = y \\ x + y = x \end{array}\right\} \implies x = y$$

$$\boxed{x \leq y \iff x + y = y}$$ (definição do $\leq$)

iii) $\underbrace{x \leq y \text{ e } y \leq z}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{x \leq z}$ (transitiva)

$x + y = y \qquad y + z = z$

Queremos mostrar que $\underline{x + z = z}$

$$x + z = x + \underbrace{y + z} = (\underbrace{x + y}_{y}) + z = y + z = z \;//$$

$$x + z = z \iff x \leq z$$

$$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

$$\{a\} = \{a\}$$

a	b	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	
0	0	1	1	
⋮			⋮	

$$S = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c_{in}} + \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}$$

$\underline{S(a, b, c_{in})}$

$\underline{m(a, b, c_{in})} = \bar{a}\bar{b}c_{in}$

$= 0 \cdot 0 \cdot 1$