MAC0329 27/04/2021

Revisão:

1) Sistemas de representação numérica

b: base $\qquad D = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$

(Exemplo: $b = 4 \Rightarrow D = \{0, 1, 2, 3\}$)

$\Rightarrow$

d_{n-1}	d_{n-2}	$\cdots$	d_1	d_0

$\rightarrow$ posicional

mais significativo $\qquad$ menos significativo

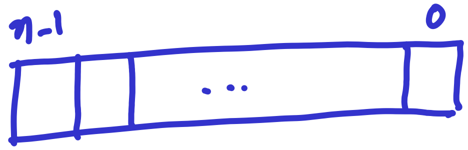
$$\Rightarrow \quad d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + \ldots + d_1 b^1 + d_0 \times b^0 \rightarrow \text{polinomial}$$

2) Mudança de bases

Bases discutidas : 2, 10, 8, 16

$$\begin{array}{cc} 8 & 16 \\ \Uparrow & \Uparrow \\ 2^3 & 2^4 \end{array}$$

3) Representação de inteiros no computador



n bits (dígitos 0 ou 1)

↳ tipicamente $n = 32$ ou $n = 64$.

⇒ sem sinal

nºs de 0 a $2^n - 1$

⇒ com sinal

⇒ sinal-magnitude → 2 zeros!

⇒ complemento de 1 → 2 zeros!

⇒ complemento de 2

-2^{n-1} até $2^{n-1} - 1$

Exemplo: $n = 3 \Rightarrow$ de -4 a 3

$n=4$

Representação binária	Valor em decimal de acordo com as interpretações			
$d_3\, d_2\, d_1\, d_0$	sem sinal	sinal-magnitude	complemento de 1	complemento de 2
0000	0	0	0	0
0001	1	1	1	1
0010	2	2	2	2
0011	3	3	3	3
0100	4	4	4	4
0101	5	5	5	5
0110	6	6	6	6
0111	7	7	7	7
1000	8	-0	-7	-8
1001	9	-1	-6	-7
1010	10	-2	-5	-6
1011	11	-3	-4	-5
1100	12	-4	-3	-4
1101	13	-5	-2	-3
1110	14	-6	-1	-2
1111	15	-7	-0	-1

positivos

negativos

iguais

depende da interpret.

Complemento de 2

interpretação

$$d_3\, d_2\, d_1\, d_0 \qquad \underbrace{-d_3 \times 2^3}\ + \underbrace{d_2 \times 2^2 + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0}$$

Exemplo

$0101 \longrightarrow -0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 4 + 1 = 5_{(10)}$

$1101 \longrightarrow -1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 =$

$= -8 + 4 + 1 = -3_{(10)}$

Complemento de 2

$0011 \longrightarrow 3_{(10)}$

-3 em binário é ?

$3_{(10)} = 0011 \xrightarrow{\text{complementar}} 1100 \xrightarrow{+1} 1100 + 1 = \underbrace{1101}$

$$\begin{array}{r} 1100 \\ 1 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$-8+4+1 = -3_{(10)}$

Adição de binários

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\;0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\;1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\;0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1 \\ +\;1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Adição, considerando vai-um

$$
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 0 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 0 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}
\qquad \cdots\cdots \qquad
\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline 11 \end{array}
$$

Múltiplos dígitos

conferindo ↓

$$
\begin{array}{rcl}
{\scriptstyle 1\ 1\ 1\ \ } & & \\
1011 & \longrightarrow & 11_{(10)} \\
+\ 0110 & \longrightarrow & 6_{(10)} \\
\hline
\boxed{1}0001 & \longrightarrow & 17_{(10)} \ \checkmark
\end{array}
$$

overflow: o resultado, 17, não cabe em 4 bits!

Mais exemplos

	comp. 2
000	0
001	1
010	2
011	3
100	-4
101	-3
110	-2
111	-1

Adição $3+(-2) = 1_{(10)}$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ 011 \\ +\ 110 \\ \hline \boxed{1}\underbrace{001} \end{array} \rightarrow 1_{(10)} \checkmark$$

Subtração $A - B = A + (-B)$

$3-1 = 3+(-1) = 2_{(10)}$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1} \\ 011 \\ +\ 111 \\ \hline \boxed{1}\underbrace{010} \end{array} \rightarrow 2_{(10)} \checkmark$$

o que fazer com esses?

Mas, exceto esse detalhe, o resultado ok.

Outro exemplo de subtração

$$2 - 3 = 2 + (-3)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & (-3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 010 & & 101 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & 010 \rightsquigarrow 2_{(10)} \\ + & 101 \rightsquigarrow -3_{(10)} \\ \hline & \boxed{1}\underbrace{11} \rightsquigarrow -1_{(10)} \checkmark \end{array}$$

negativo

$$-1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$-4 + 3 = -1 \checkmark$$

Ou seja, estamos calculando subtração por meio da adição.

Mais especificamente,

$$A - B = A + (-B)$$

$$-B = \overline{B} + 1$$

(isso vale na interpretação complemento de 2)

Em seguida vamos ver adição p/ os casos:

$\Rightarrow$ sem sinal

$\Rightarrow$ complemento de 2 (c/ sinal)

$n=2$

0 a 3

00	00	00	00
00	01	10	11
00	01	10	11
0+0=0	0+1=1	0+2=2	0+3=3

	1		1 1
01	01	01	01
00	01	10	11
01	10	11	00
1+0=1	1+1=2	1+2=3	1+3≠0

overflow

		1	1
10	10	10	10
00	01	10	11
10	11	00	01
2+0=2	2+1=3	2+2≠0	2+3≠1

	1 1	1	1 1
11	11	11	11
00	01	10	11
11	00	01	10
3+0 =3	3+1≠0	3+2≠1	3+3≠2

sem sinal

-2 a 1

00	00	00	00
00	01	10	11
00	01	10	11
0+0=0	0+1=1	0+(-2)=-2	0+(-1)=-1

	1		1 1
01	01	01	01
00	01	10	11
01	10	11	00
1+0=1	1+1≠-2	1+(-2)=-1	1+(-1)=0

overflow

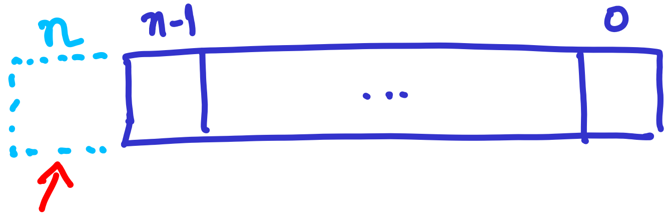
		1	1
10	10	10	10
00	01	10	11
10	11	00	01
(-2)+0=-2	(-2)+1=-1	(-2)+(-2)≠0	(-2)+(-1)≠1

	1 1	1	1 1
11	11	11	11
00	01	10	11
11	00	01	10
(-1)+0=-1	(-1)+1=0	(-1)+(-2)≠1	(-1)+(-1)=-2

com sinal (compl. de 2)

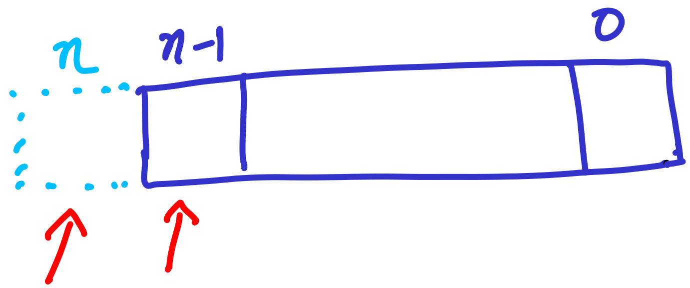
Overflow (na adição)

⇒ Sem sinal



vai-um p/ a coluna n indica overflow

⇒ Com sinal



vai-um p/ a coluna n diferente do vai-um p/ a coluna $n-1$ indica overflow.

Subtração

Vamos usar adição p/ efetuar subtração

$$A - B = A + (-B) = A + (\overline{B} + 1)$$

$-B \rightarrow \overline{B} + 1$

iremos usar esse +1 como vai-um na coluna $\underline{\underline{0}}$.

SUB

0 a 3 (OBS. na prox. pag.)

111	1	11	1
00	00	00	00
11	10	01	00
00	11	10	01
0+(-0)=0	0+(-1)=3	0+(-2)=2	0+(-3)=1

111	111	11	11
01	01	01	01
11	10	01	00
01	00	11	10
1+(-0)=1	1+(-1)=0	1+(-2)=3	1+(-3)=2

111	1 1	111	1
10	10	10	10
11	10	01	00
10	01	00	11
2+(-0)=2	2+(-1)=1	2+(-2)=0	2+(-3)=3

111	111	111	111
11	11	11	11
11	10	01	00
11	10	01	00
3+(-0) =3	3+(-1)=2	3+(-2)=1	3+(-3)=0

sem sinal

-2 a 1

111	1	11	1
00	00	00	00
11	10	01	00
00	11	10	01
0+(-0)=0	0+(-1)=-1	0+(-(-2))=-2	0+(-(-1))=1

111	111	11	11
01	01	01	01
11	10	01	00
01	00	11	10
1+(-0)=1	1+(-1)=0	1+(-(-2))=-1	1+(-(-1))=-2

111	1 1	111	1
10	10	10	10
11	10	01	00
10	01	00	11
(-2)+(-0)=-2	(-2)+(-1)=1	(-2)+(-(-2))=0	(-2)+(-(-1))=-1

111	111	111	111
11	11	11	11
11	10	01	00
11	10	01	00
(-1)+(-0)=-1	(-1)+(-1)=-2	(-1)+(-(-2))=1	(-1)+(-(-1))=0

com sinal

OBS: no caso da interpretação sem sinal, em $n=2$ bits temos os números

$00 \to 0$
$01 \to 1$
$10 \to 2$
$11 \to 3$

É óbvio que subtrair um nº maior de um menor, como em

$$2 - 3 = -1 \qquad (A=2, B=3)$$

vai dar ruim.

Na prática fazemos $2+(-3)$, sem nos preocuparmos com se -3 faz sentido. Só sei que $-B = \bar{B} + 1$. $B = 11 \Rightarrow \bar{B} = 00$

$$2-3 \Rightarrow \begin{array}{rl} 1 & \leftarrow +1 \\ 10 & \leftarrow 2_{(10)} \\ + \; 00 & \leftarrow \bar{B} \\ \hline 11 & \rightsquigarrow 3_{(10)} \; \underline{\underline{X}} \end{array}$$

Na próxima aula discutiremos mais isso e também como detectar o "deu ruim" no caso da subtração!